MANUAL DO PROFESSOR

Bonjorno • Giovanni Jr. • Paulo Câmara

Matemática Completa 2

ENSINO MÉDIO
COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

FTD

Matemática Completa

2

ENSINO MÉDIO
COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

José Roberto Bonjorno

Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale"
Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1973

José Ruy Giovanni Júnior

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo
Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1985

Paulo Roberto Câmara de Sousa

Mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba
Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco
Professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1974
Professor de programas de formação continuada e pós-graduação desde 1990
Professor do Departamento de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste – UFPE

4ª edição
São Paulo – 2016

FTD

MANUAL DO PROFESSOR

Copyright © José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr., Paulo Roberto Câmara de Sousa, 2016

Diretor editorial Lauri Cericato
Gerente editorial Flávia Renata P. A. Fugita
Editora Cibeli de Oliveira Chibante Bueno
Editores assistentes Juliana Montagner, Adriano Rosa Lopes, Marcos Antônio Silva, Thais B. Moura, Janaina B. Pereira e Carlos Eduardo B. S. Esteves
Assessoria Rodolfo Campos
Gerente de produção editorial Mariana Milani
Coordenador de produção editorial Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Coordenadora de arte Daniela Máximo
Projeto gráfico Casa Paulistana
Projeto de capa Bruno Attili
Foto de capa Thais Falcão/Olho do Falcão
Modelos da capa: Andrei Lopes, Angélica Souza, Beatriz Raielle, Bruna Soares, Bruno Guedes, Caio Freitas, Denis Wiltemburg, Eloá Souza, Jardo Gomes, Karina Farias, Karoline Vicente, Letícia Silva, Lilith Moreira, Maria Eduarda Ferreira, Rafael Souza, Tarik Abdo, Thaís Souza
Supervisora de arte Isabel Cristina Corandin Marques
Diagramação Adriana M. Nery de Souza, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, José Aparecido A. da Silva, Laura Alexandra Pereira, Lucas Trevelin, Nadir Fernandes Racheti, Márcia Sasso, Sara Slovac Savero
Tratamento de imagens Eziquiel Racheti
Coordenadora de ilustrações e cartografia Marcia Berne
Ilustrações Alberto de Stefano
Cartografia Allmaps
Coordenadora de preparação e revisão Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão Izabel Cristina Rodrigues
Revisão Cristiane Casseb, Desirée Araújo, Dilma Dias Ratto, Iara R. S. Mletchol, Juliana Rochetto, Jussara Gomes, Kátia Cardoso, Lilian Vismari, Regina Barrozo, Renato Colombo Jr., Solange Guerra, Yara Afonso Pinto.
Coordenador de iconografia e licenciamento de textos Expedito Arantes
Supervisora de licenciamento de textos Elaine Bueno
Iconografia Paloma Klein
Diretor de operações e produção gráfica Reginaldo Soares Damasceno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bonjorno, José Roberto
Matemática Completa 2º ano / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 4. ed. – São Paulo: FTD, 2016. – (Coleção Matemática Completa)

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-96-00326-1 (aluno)
ISBN 978-85-96-00327-8 (professor)

1. Matemática (Ensino Médio) I. Giovanni Júnior, José Ruy. II. Sousa, Paulo Roberto Câmara de. III. Título. IV. Série.

16-03481 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Reprodução proibida: Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados à

EDITORA FTD S.A.

Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo-SP
CEP 01326-010 – Tel. (0-XX-11) 3598-6000
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
E-mail: central.atendimento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD S.A.
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

Apresentação

Este livro tem o objetivo de auxiliar e estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la em seu dia a dia e na continuação dos seus estudos.

Após cada conceito, com a intenção de ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos, os capítulos trazem exercícios resolvidos e propostos que priorizam a compreensão e aplicação do conteúdo abordado.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Bons estudos!

Os Autores

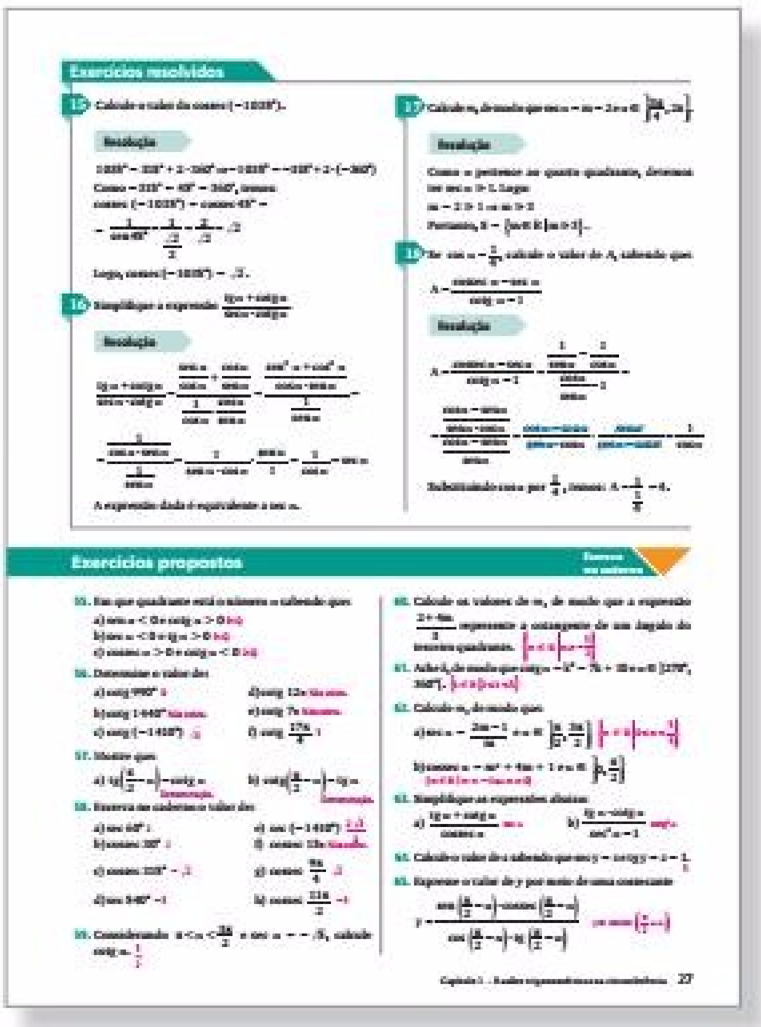
Conheça o seu livro

Unidade 3

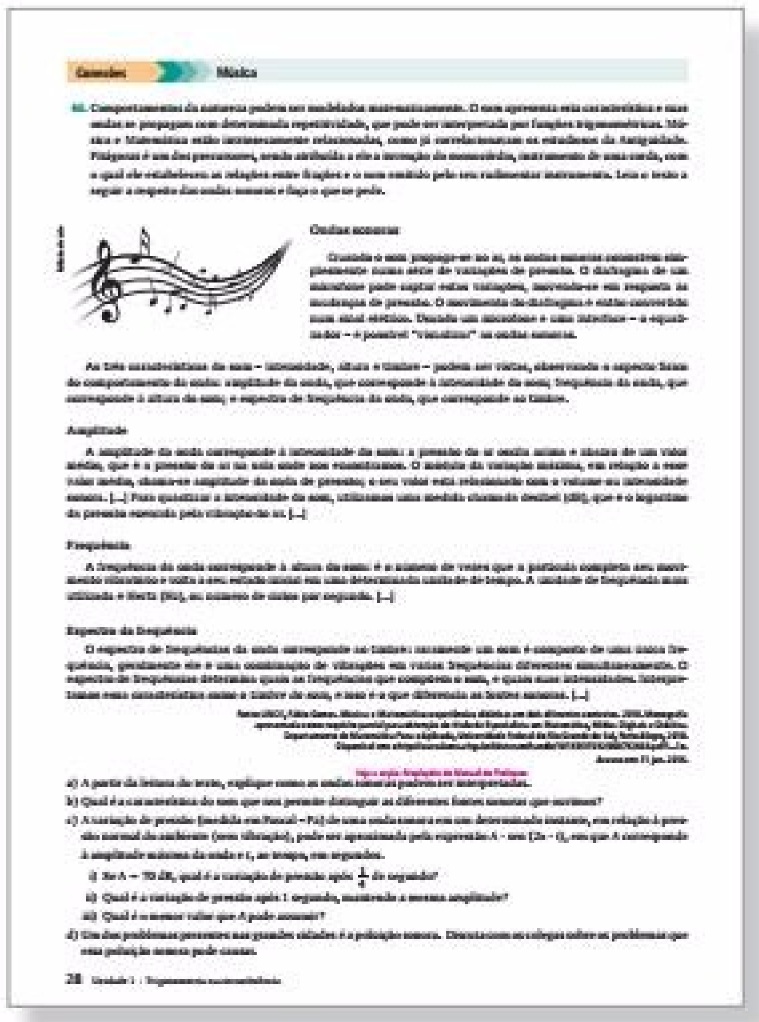
Geometria plana e espacial

Abertura de unidade

Apresenta por meio de imagens, de um pequeno texto e algumas questões um tema relacionado ao conteúdo matemático que será desenvolvido na unidade.


Exercícios resolvidos

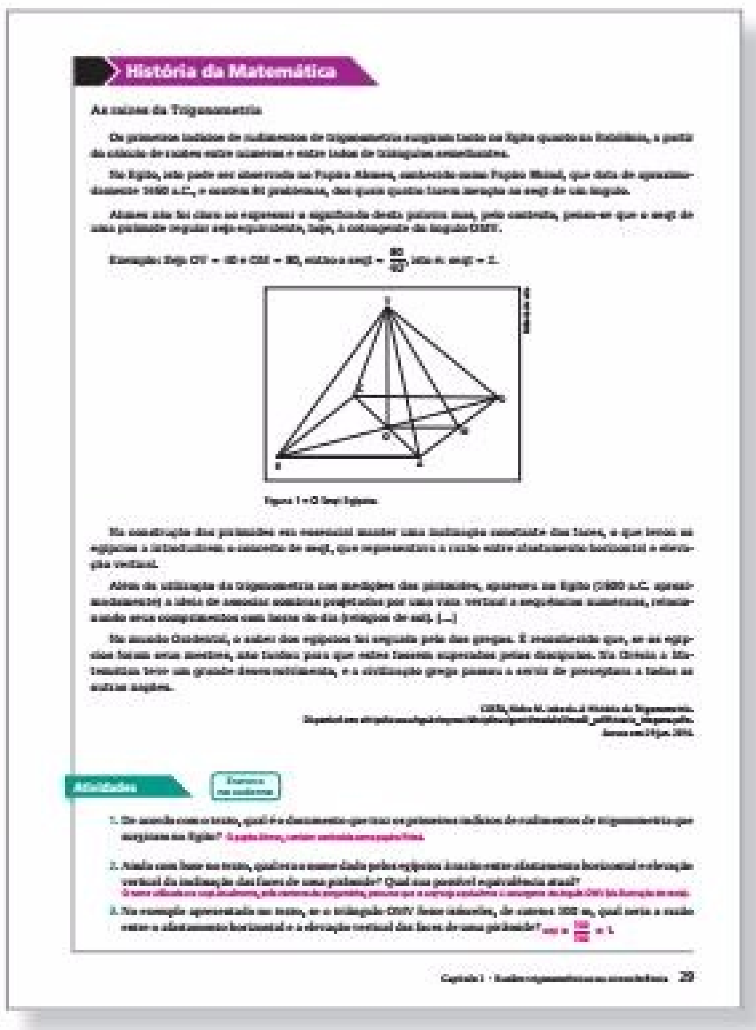
Exercícios propostos


Conexões

Música

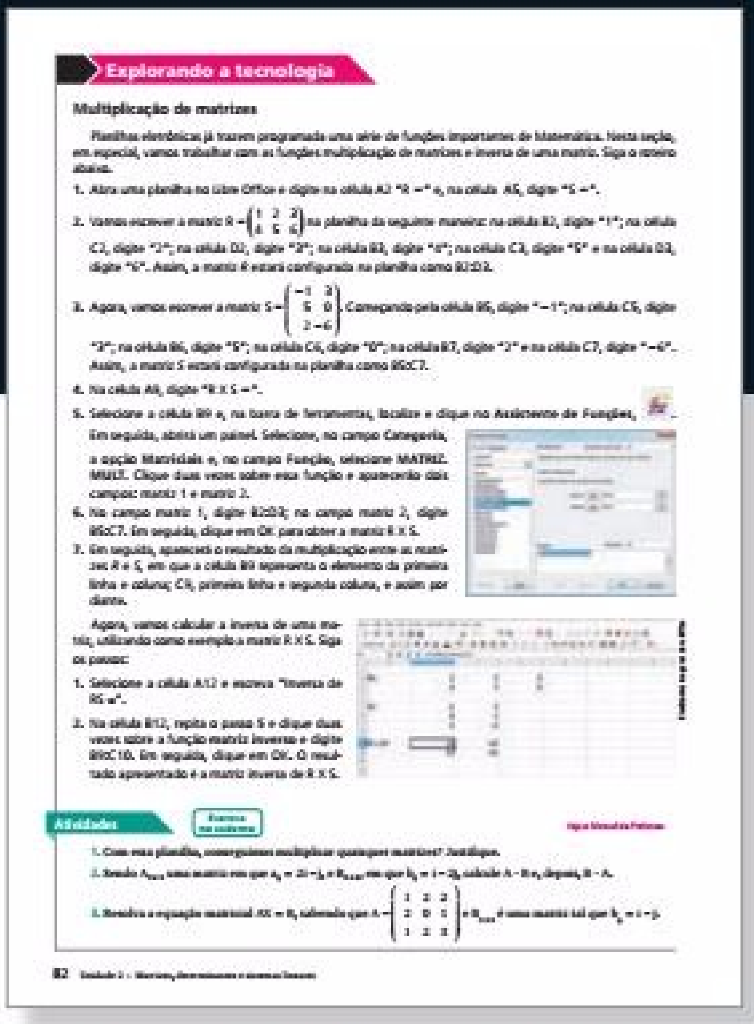
Exercícios resolvidos e propostos

Os exercícios resolvidos aparecem após a apresentação de cada conteúdo, seguidos de exercícios propostos para consolidar a teoria abordada. Em cada capítulo, há uma atividade diferenciada, denominada *Conexões*, que apresenta textos que exploram a aplicação da Matemática em diversas áreas do conhecimento.


História da Matemática

História da Matemática

Esta seção relaciona os conteúdos abordados à história da Matemática por meio de um texto acompanhado de questões.

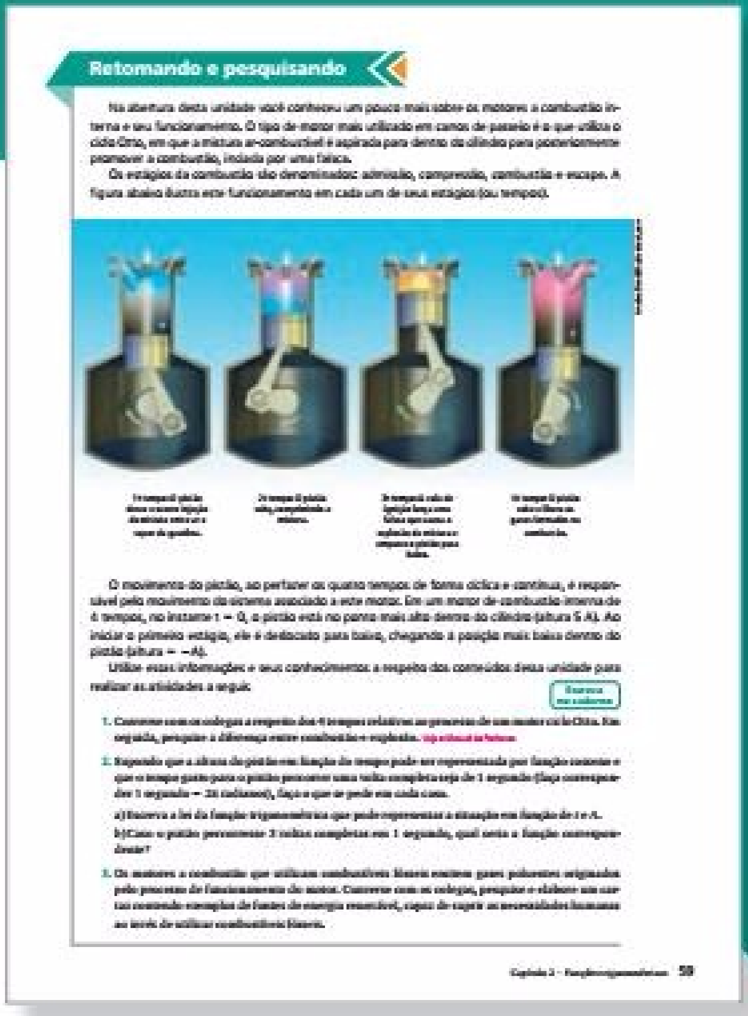


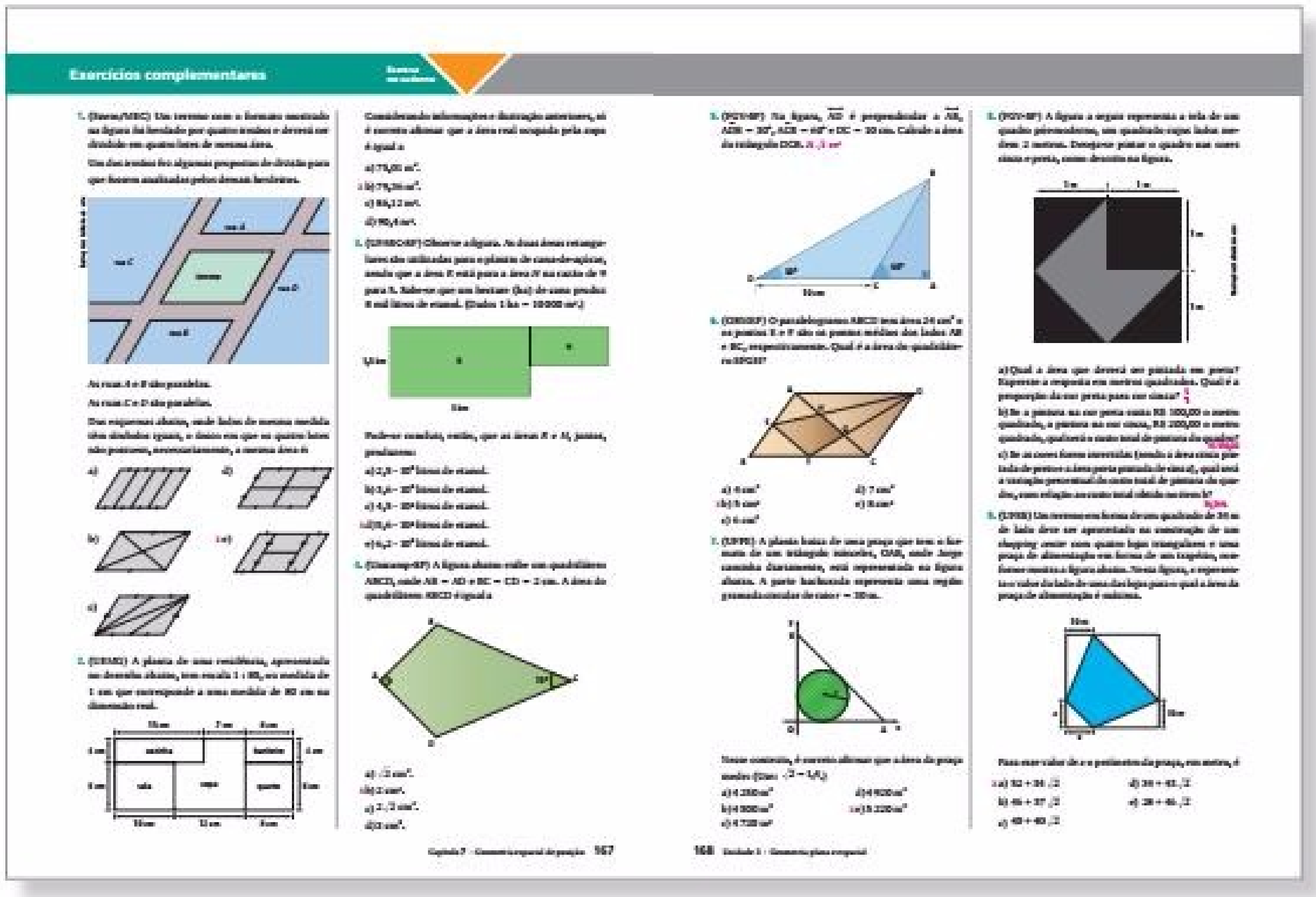
Explorando a tecnologia

Nesta seção são apresentadas atividades relacionadas ao conteúdo em estudo utilizando *softwares* de geometria dinâmica e planilha eletrônicas.

Retomando e pesquisando

Retoma e discute o tema da abertura da unidade, relacionando-o aos conteúdos estudados ao longo da unidade.



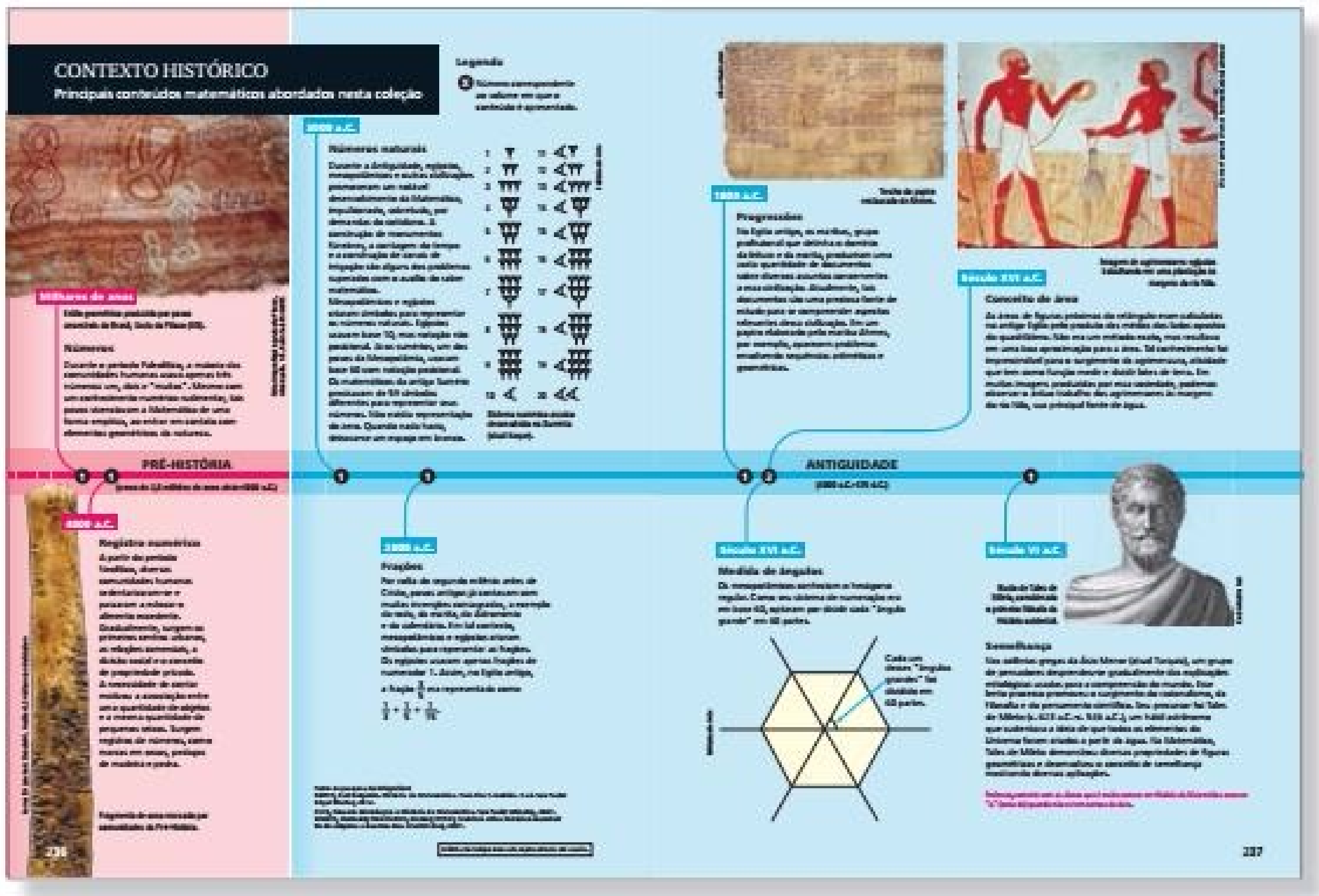


Exercícios complementares

No final de cada unidade, esta seção apresenta questões relacionadas aos conteúdos trabalhados ao longo da unidade. São apresentadas questões autorais, de vestibulares, do Enem e de outros concursos nacionais.

Infográfico: Contexto histórico

Ao final do volume há um infográfico que apresenta uma linha do tempo relacionando os conteúdos abordados na coleção com tópicos da história da Matemática.



Sumário

Unidade 1 – Trigonometria na circunferência 8

- Capítulo 1 – Razões trigonométricas na circunferência 10
  - Arcos de circunferência 10
    - Medida e comprimento de arcos de circunferência 10
  - Ângulo central 11
  - Unidades de medida de arcos de circunferência 11
    - Grau 11
    - Radiano 11
    - Relação entre grau e radiano 12
  - Arco orientado 14
  - Circunferência trigonométrica 14
  - Arcos côngruos 15
  - Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica 15
  - Seno e cosseno de um arco 17
    - Valores notáveis do seno e do cosseno 18
    - Redução ao primeiro quadrante 18
  - Tangente de um arco 21
    - Valores notáveis da tangente 22
    - Redução ao primeiro quadrante 22
  - Relações entre seno e cosseno 24
  - Cotangente de um arco 26
  - Secante e cossecante de um arco 26
  - História da Matemática 29
  - Explorando a tecnologia 30

- Capítulo 2 – Funções trigonométricas 32
  - Função seno 32
    - Gráfico da função seno 32
  - Função cosseno 36
    - Gráfico da função cosseno 36
  - Função tangente 40
    - Gráfico da função tangente 40
  - Explorando a tecnologia 42
  - Transformações trigonométricas 44
    - Fórmulas da adição e da subtração de arcos 44
    - Fórmulas do arco duplo e do arco metade 47
    - Fórmulas de transformação em produto 48
  - Equações trigonométricas 50
  - Identidades trigonométricas 52
  - Inequações trigonométricas 53
- Exercícios complementares 54
- Retomando e pesquisando 59

Unidade 2 – Matrizes, determinantes e sistemas lineares 60

- Capítulo 3 – Matrizes 62
  - Conceito 63
  - Matrizes especiais 64
    - Matriz linha e matriz coluna 64
    - Matriz nula 64
  - Matriz quadrada 66
  - Igualdade de matrizes 68
  - Adição e subtração de matrizes 68
    - Matriz oposta 70
    - Propriedades da adição de matrizes 70
  - Multiplicação de um número real por uma matriz 72
  - Matriz transposta 73
    - Propriedades da matriz transposta 73
  - Matriz simétrica 74
  - Multiplicação de matrizes 75
    - Propriedades da multiplicação de matrizes 76
  - Inversa de uma matriz 79
  - Explorando a tecnologia 82

- Capítulo 4 – Determinantes 83
  - Determinante 84
    - Determinante de uma matriz de ordem 1 84
    - Determinante de uma matriz de ordem 2 84
    - Determinante de uma matriz de ordem 3 86
  - Explorando a tecnologia 89
  - Propriedades e teoremas dos determinantes 90

- Capítulo 5 – Sistemas lineares 96
  - Equação linear 96
  - Sistemas lineares 2 × 2 98
  - Interpretação geométrica e classificação 100
  - Sistemas lineares 103
    - Sistemas lineares 3 × 3 103
    - Resolução de um sistema linear 3 × 3 104
  - Matrizes associadas a um sistema linear 106
  - Escalonamento de sistemas lineares 108
    - Resolução de um sistema linear por escalonamento 109
  - Classificação de um sistema linear 111
    - Discussão de um sistema linear 112
  - Regra de Cramer 114
  - Sistema linear homogêneo 116
  - História da Matemática 118
- Exercícios complementares 119
- Retomando e pesquisando 123

Unidade 3 – Geometria plana e espacial 124

- Capítulo 6 – Áreas 126
  - A ideia de área 126
  - Área de polígonos 126
    - Área do retângulo 126
    - Área do quadrado 126
    - Área do paralelogramo 127
    - Área do triângulo 130
    - Área do losango 134
    - Área do trapézio 134
  - Área do círculo e de suas partes 136
    - Área do círculo 136
    - Área do setor circular 137
    - Área da coroa circular 137

História da Matemática 140
Polígonos regulares 140
  Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência 141
  Relações métricas nos polígonos regulares 141
  Área de um polígono regular 142
Razão entre áreas de figuras planas semelhantes 144
Explorando a tecnologia 146

Capítulo 7 – Geometria espacial de posição 147
Noções primitivas 147
Postulados 148
  Postulados da reta 148
  Postulados do plano 148
Determinação do plano 149
Posições relativas 151
  Posições relativas de duas retas no espaço 151
  Posições relativas de uma reta e um plano no espaço 152
  Posições relativas de dois planos no espaço 152
Paralelismo no espaço 154
  Teoremas do paralelismo 154
Perpendicularismo no espaço 157
  Perpendicularismo entre reta e plano 157
  Planos perpendiculares 157
  Teoremas do perpendicularismo 158
Projeção ortogonal 162
  Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano 162
  Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano 162
  Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano 162
Ângulo de uma reta com um plano 165
Diedro 165
  Secção normal de um diedro 165
Triedro 166
Ângulos poliédricos 166
Exercícios complementares 167
Retomando e pesquisando 175

Unidade 4 – Análise combinatória 176

Capítulo 8 – Combinatória 178
Princípio multiplicativo 179
Fatorial 182
Arranjo simples 183
  Permutação simples 186
Permutação com elementos repetidos 188
Combinação simples 190
Binômio de Newton 195
  Número binomial 195
  Números binomiais complementares 195
  Triângulo de Pascal 196
  Fórmula do binômio de Newton 199
Explorando a tecnologia 200
  Termo geral do binômio de Newton 203

Capítulo 9 – Probabilidade 205
Experimentos aleatórios 205
O espaço amostral e evento 206
  Tipos de eventos 206
Probabilidade 209
História da Matemática 214
Probabilidade da união de dois eventos 215
Probabilidade condicional 219
Eventos independentes 223
Experimentos não equiprováveis 227
Exercícios complementares 229
Retomando e pesquisando 234

Infográfico: Contexto histórico 235

Respostas 244

Sugestões para pesquisa e leitura 253

Lista de siglas 255

Referências bibliográficas 256

Unidade 1

Trigonometria na circunferência

O motor é uma máquina que transforma qualquer forma de energia (térmica, elétrica, hidráulica, química etc.) em energia mecânica. Existem diversos tipos de motores, um deles é o motor a combustão interna, dispositivos em que a queima do combustível acontece no interior do cilindro do motor. Nesse caso, a transformação de energia é de energia térmica em energia mecânica e é feita pela combustão ou queima do combustível.

Os motores a combustão interna podem ser de dois ou quatro tempos. Os de quatro tempos recebem esse nome porque realizam quatro estágios de funcionamento, repetidas vezes e de forma cíclica. Esses estágios cíclicos são: admissão, compressão, combustão e escape e são chamados de ciclos termodinâmicos (movimento e calor).

Dentro do cilindro há um pistão, que se movimenta para cima e para baixo por conta da queima do combustível e gera a energia mecânica, que é levada por um sistema denominado transmissão até as rodas (no caso de um carro), ou até qualquer outro mecanismo (como uma máquina industrial, por exemplo), transformando-se em movimento.

A combustão realizada nesses motores é um processo exotérmico, ou seja, libera grande quantidade de energia térmica. Dessa forma, eles necessitam de um sistema de resfriamento, sendo comumente utilizado água.

Os carros são um dos principais exemplos em que o motor a combustão interna é utilizado. Foto em Natal, RN, 2014.

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

BRASIL
BRASIL
BRASIL
BRASIL

Dorling Kindersley/Getty Images

Motor a combustão interna de um carro visto em corte. Para poder gerar a energia necessária para movimentar o carro, os motores possuem mais de um pistão.

1. Você já conhecia o mecanismo de funcionamento de um motor a combustão interna? Qual é a transformação de energia realizada por esse mecanismo? Veja o Manual do Professor.
2. Pesquise o significado do termo comburente e indique qual é o elemento comburente na reação térmica realizada no motor a combustão interna.
3. Os motores a combustão interna são amplamente utilizados nos carros, nas motos e nos caminhões que trafegam pelas ruas, avenidas e rodovias do nosso país e de todo o mundo. Reúna-se com mais dois colegas e pesquisem sobre os poluentes emitidos por esses motores e sua consequência para os seres vivos e o meio ambiente. Em seguida, apresentem alternativas de meios de locomoção menos poluentes.

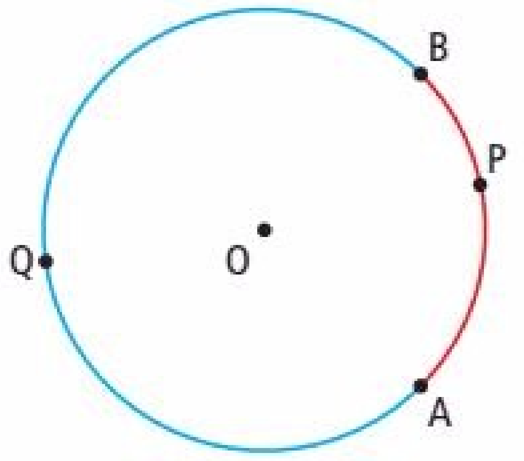
Escreva no caderno

CAPÍTULO 1

Razões trigonométricas na circunferência

No Ensino Fundamental, você provavelmente estudou as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. No capítulo 12 do volume 1 desta coleção, esses conceitos foram retomados para o triângulo retângulo. Agora, estudaremos essas e outras razões trigonométricas na circunferência, ou seja, para ângulos maiores que 90°. Mas, antes, vamos relembrar alguns conceitos da Geometria que serão necessários ao longo desta unidade.

Arcos de circunferência



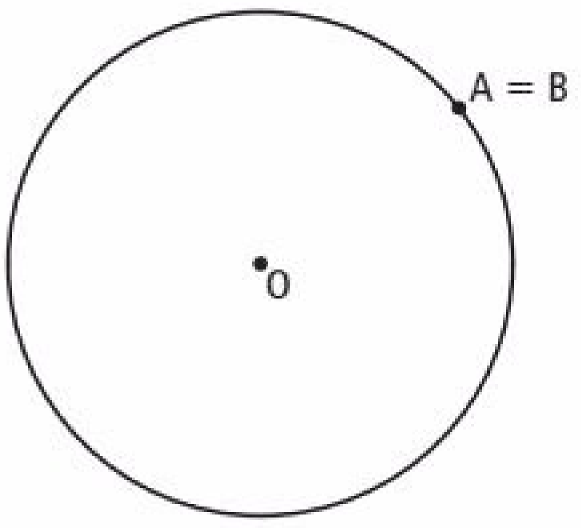
Arcos AB.

Ao marcarmos dois pontos *A* e *B* sobre uma circunferência de centro *O*, ela fica dividida em duas partes denominadas **arcos de circunferência** ou, simplesmente, **arcos**.

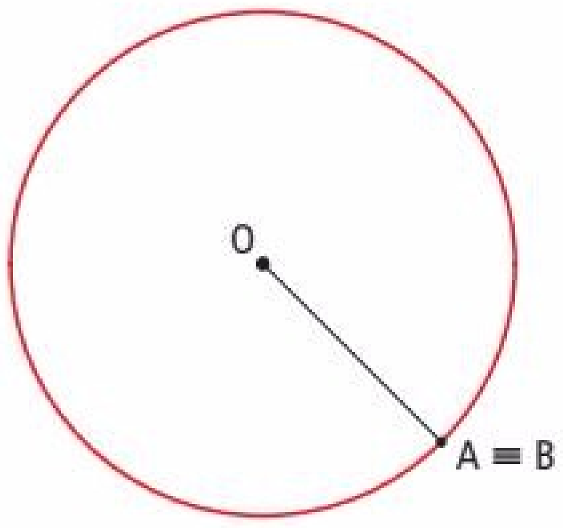
Os pontos *A* e *B* determinam dois arcos de circunferência que podem ser indicados por $\overset{\frown}{AB}$. Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo podemos inserir um ponto entre as extremidades *A* e *B* e utilizar a notação $\overset{\frown}{APB}$ ou $\overset{\frown}{AQB}$.

Se as extremidades *A* e *B* coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto e o outro é a própria circunferência e são chamados, respectivamente, **arco nulo** e **arco de uma volta**.

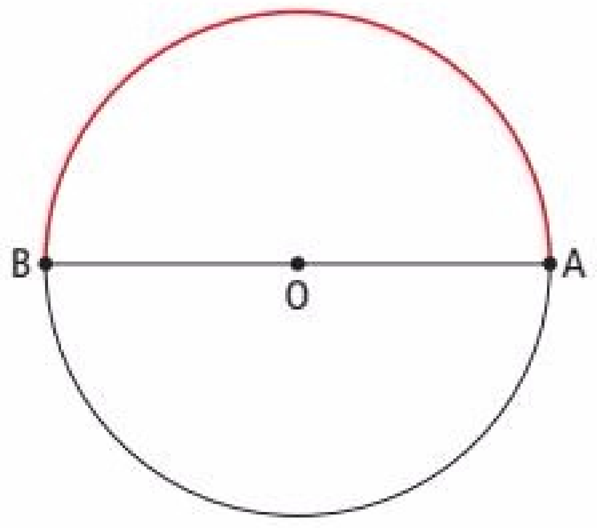
Quando as extremidades correspondem às extremidades de um diâmetro, teremos duas **semicircunferências** ou **arcos de meia-volta**.



Arco nulo.



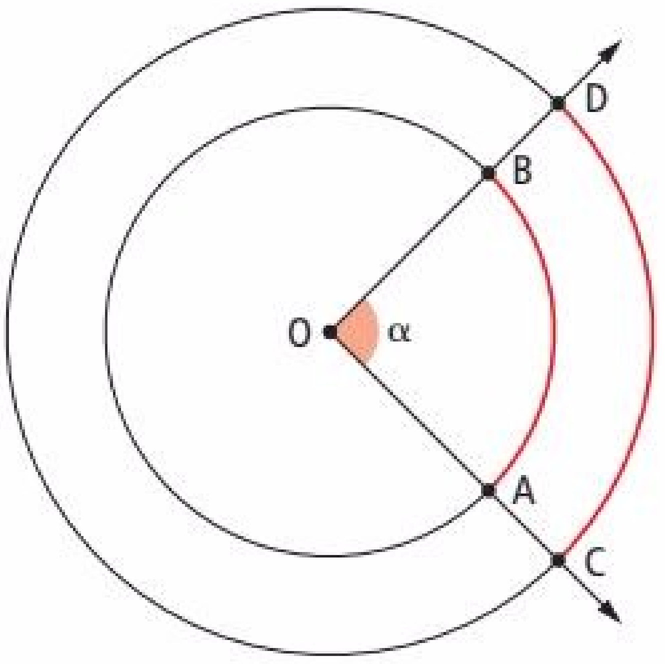
Arco de uma volta.



Arcos de meia-volta ou semicircunferências.

Ilustrações: Editoria de arte

Medida e comprimento de arcos de circunferência



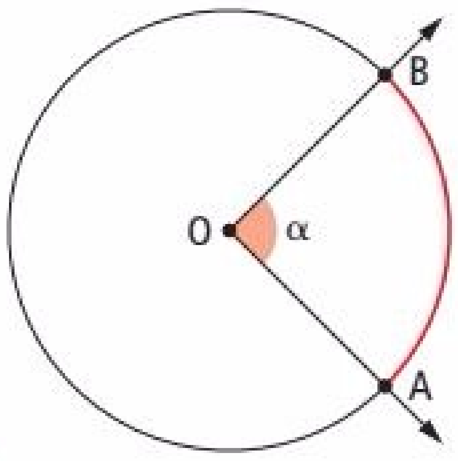
A medida (ou medida angular) de um arco é igual à medida do ângulo que tem vértice no centro da circunferência e cujos lados passam pelas extremidades do arco.

Na figura ao lado, a medida angular do arco AB é igual a α. Também podemos representá-la por med($\overset{\frown}{AB}$).

O comprimento (ou medida linear) de um arco é a medida de uma extremidade à outra, ou seja, ao longo do arco.

Assim, dois arcos de medidas angulares iguais podem ter comprimentos diferentes. Por exemplo, os arcos AB e CD da figura ao lado possuem a mesma medida angular α, porém não têm o mesmo comprimento.

Ângulo central



O ângulo que tem vértice no centro da circunferência e cujos lados passam pelas extremidades do arco correspondente a esse ângulo é chamado **ângulo central**.

A medida do ângulo central é, por definição, igual à medida do arco de circunferência correspondente.

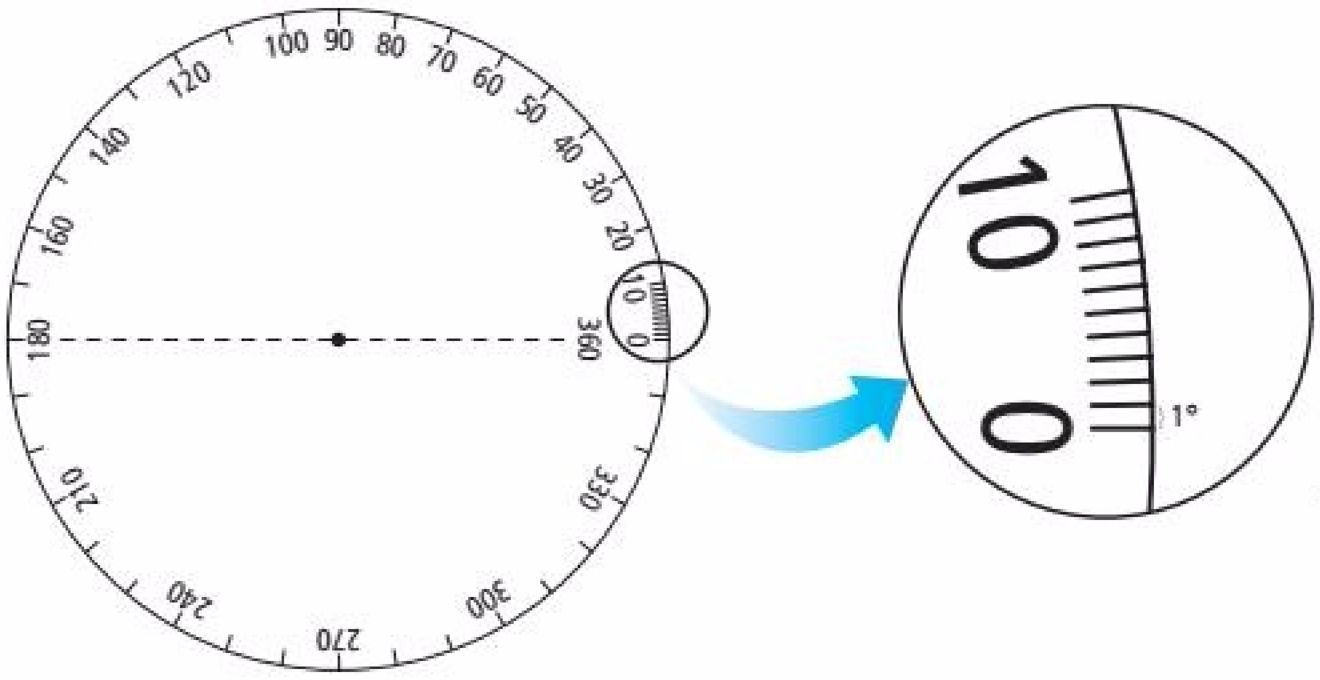
Na figura ao lado temos que a medida do arco AB é igual a α, assim como a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ também é igual a α.

Unidades de medida de arcos de circunferência

A medida de um arco de circunferência pode ser expressa em **grau** ou em **radiano**.

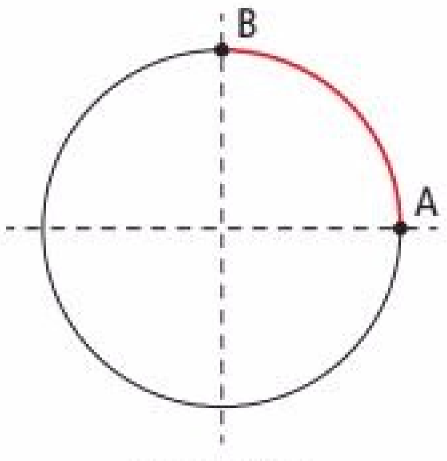
Grau

Dividindo uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de 1 grau que se indica 1°. Assim, a circunferência tem 360°.

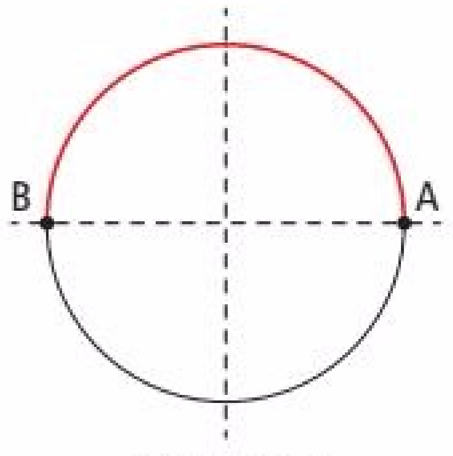


Ilustrações: Editoria de arte

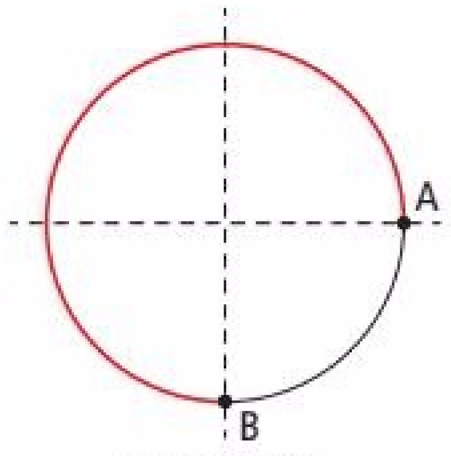
Os arcos de 90°, 180°, e 270°, marcados em sentido anti-horário nas figuras a seguir, representam um quarto, metade e três quartos da circunferência, respectivamente, pois $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$, $\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$ e $\frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$.



arco de 90°



arco de 180°



arco de 270°

Um grau se divide em **minutos** e **segundos**, seus submúltiplos, sendo que:

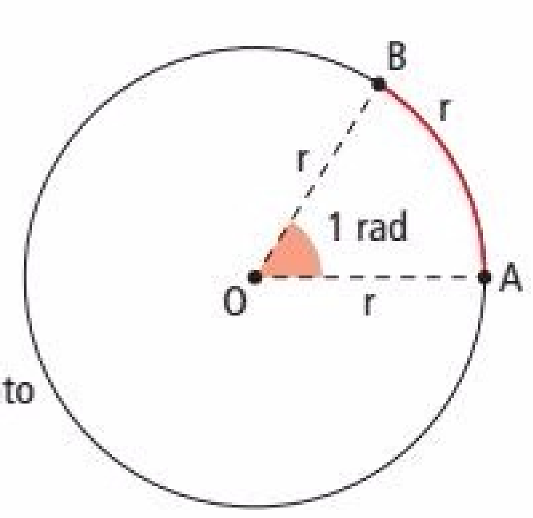
- um minuto (1′) é igual a $\frac{1}{60}$ do grau;
- um segundo (1″) é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

Assim, podemos dizer que 1° = 60′, 1′ = 60″ e 1° = 360″.

Radiano

Quando o comprimento de um arco é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém dizemos que a medida desse arco é 1 radiano (1 rad).

Professor, comente com os alunos que a medida em radiano de um ângulo é expressa por um número real.



comprimento do arco AB = comprimento do segmento de reta OA = r.
$\text{med}(\widehat{AB}) = 1 \text{ rad}$

Relação entre grau e radiano

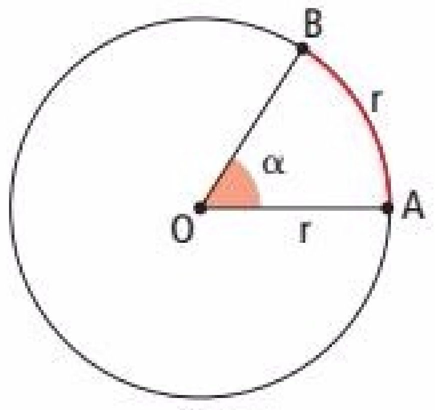
Um problema que instigou muitos matemáticos ao longo dos tempos foi o cálculo da razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Como você provavelmente já estudou, essa razão é constante e igual ao número irracional π (pi), sendo $\pi = 3,14159265...$

Como a medida *D* do diâmetro de uma circunferência é o dobro da medida *r* do raio, o comprimento *C* dessa circunferência pode ser determinado por:

$$\frac{C}{D} = \pi \Rightarrow \frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

Para determinar a medida, em radiano, do arco de uma volta (360°), vamos calcular quantas vezes o raio *r* cabe no comprimento da circunferência:

$$\frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$



$\alpha = 1$ rad

Então, o raio *r* cabe 2π vezes no comprimento da circunferência, ou seja, aproximadamente 6,28 vezes. Logo, como cada raio *r* corresponde a 1 rad, a medida do arco de 360° é equivalente a 2π rad.

A partir desta, podemos escrever outras relações, por exemplo:

- $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$
- π rad $= 180°$
- $\frac{3\pi}{2}$ rad $= 270°$

Utilizando a relação π rad $= 180°$, podemos determinar a quantos graus corresponde 1 rad. Acompanhe:

$$\pi \text{ rad} = 180° \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \Rightarrow 1 \text{ rad} \simeq \frac{180°}{3,14} \simeq 57,32°$$

Logo, 1 rad corresponde a aproximadamente 57,32°.

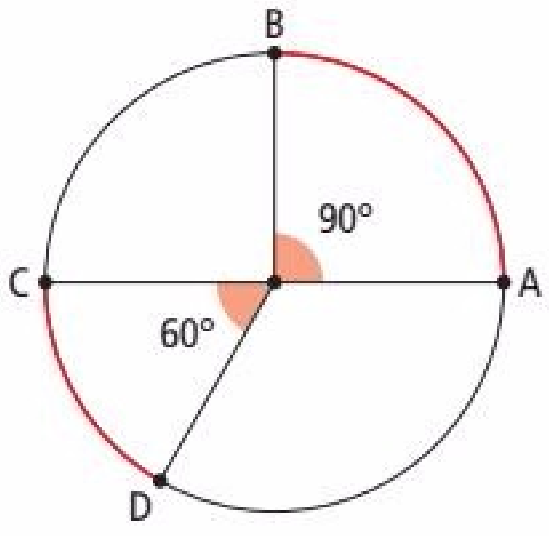
Além de determinar o valor em grau de 1 rad, a relação π rad $= 180°$ também pode ser utilizada para expressar em radiano qualquer medida de arco (ou ângulo) dada em grau e vice-versa. Por exemplo, para escrever 270° em radiano fazemos:

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{——} & 180° \\ x & \text{——} & 270° \end{array} \Rightarrow x = \frac{\pi \text{ rad} \cdot 270°}{180°} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \simeq 4,71 \text{ rad}$$

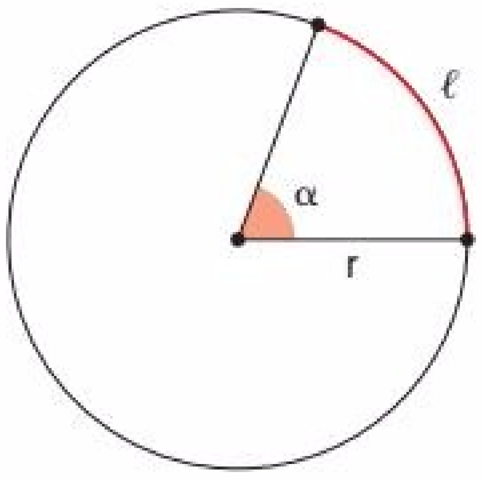
Logo, 270° equivalem a $\frac{3\pi}{2}$ radianos, que é aproximadamente igual a 4,71 radianos.

Na circunferência de raio *r* ao lado, os arcos AB e CD medem, respectivamente, 90° e 60°.

Como a circunferência tem 360°, o comprimento do arco AB é a quarta parte do comprimento da circunferência e o comprimento do arco CD é a sexta parte do comprimento da circunferência, como indicado a seguir.



	Ângulo	**Comprimento**
circunferência	360°	$2\pi r$
arco AB	90°	$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r$
arco CD	60°	$\frac{1}{6} \cdot 2\pi r$



Ilustrações: Editoria de arte

De modo geral, para calcular o comprimento ℓ de um arco de medida α em uma circunferência de raio *r*, estabelecemos as seguintes relações:

- para α em grau:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{ângulo} & & \text{comprimento} \\ 360° & \text{——} & 2\pi r \\ \alpha & \text{——} & \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r$$

- para α em radiano:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{ângulo} & & \text{comprimento} \\ 1 \text{ rad} & \text{——} & r \\ \alpha & \text{——} & \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = \alpha r$$

Exercícios resolvidos

1 Expresse 22°30' em radiano.

Resolução

Vamos transformar 22°30' em minuto:

$22°30' = 22 \cdot 60' + 30' = 1\,320' + 30' = 1\,350'$

Vamos transformar 180° em minuto:

$180° = 180 \cdot 60' = 10\,800'$

Estabelecemos, então, a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 10\,800' & \text{———} & \pi \text{ rad} \\ 1\,350' & \text{———} & x \end{array}$$

$$\frac{10\,800}{1350} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow \frac{8}{1} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 8x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

Outro modo de resolver é o seguinte:

Seja *x* a medida, em radiano, do arco correspondente a 22°30' ou (22,5°)

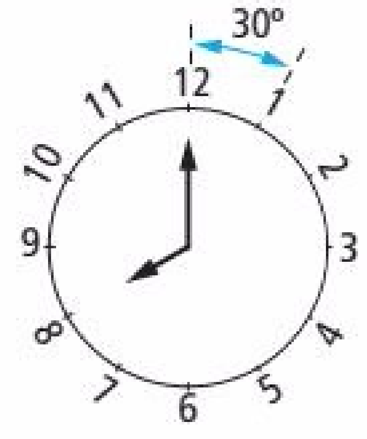
$x = 22{,}5° \Rightarrow 2x = 45° \Rightarrow 4x = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$

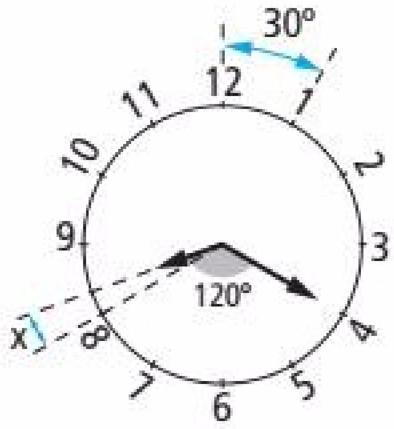
Logo, $22°30' = \frac{\pi}{8}$ rad.

2 Determine, em grau, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 8h20min.

Resolução



Sendo α a medida do ângulo pedido e *x* a medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas em 20 min, a partir das 8 h. O mostrador do relógio é dividido em 12 arcos iguais. Por isso, o arco compreendido entre dois números consecutivos mede $\frac{360°}{12}$, ou seja, 30°. Assim, $\alpha = x + 120°$.



A cada 60 minutos o ponteiro das horas percorre 30°:

tempo (min)		ângulo (grau)
60	———	30
20	———	x

$$\frac{60}{20} = \frac{30}{x} \Rightarrow 3 = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 10 \text{ (medida em grau)}$$

$\alpha = x + 120° \Rightarrow \alpha = 10° + 120° \Rightarrow \alpha = 130°$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Expresse:

a) 60° em radiano; $\frac{\pi}{3}$ rad

b) 210° em radiano; $\frac{7\pi}{6}$ rad

c) 67°30' em radiano; $\frac{3\pi}{8}$ rad

d) $\frac{10\pi}{9}$ rad em grau; 200°

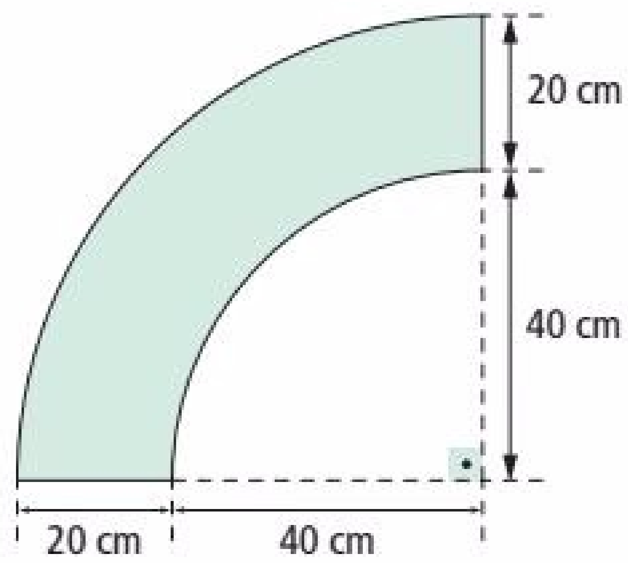
e) $\frac{\pi}{20}$ rad em grau; 9°

f) 4 rad em grau. ≃229°18'

2. Qual é, em radiano, a medida do arco descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, em um período de 25 minutos? $\frac{5\pi}{6}$ rad

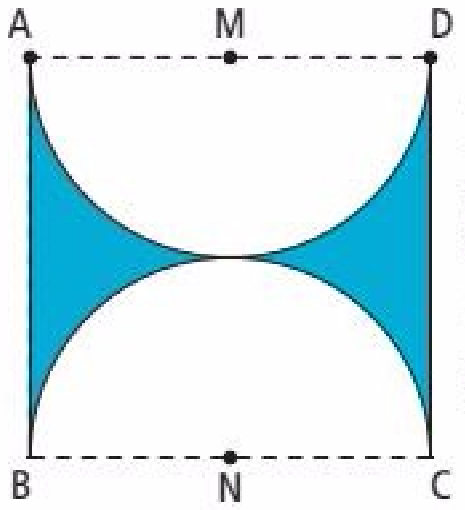
3. Em uma circunferência de 32 cm de diâmetro, marca-se um arco AB de 8 cm de comprimento. Qual é a medida desse arco em radianos? 0,5 rad

4. Determine o perímetro da figura a seguir. Use $\pi = 3{,}14$. 197 cm



5. Determine o perímetro da figura colorida de azul, indicada ao lado. 51,4 cm

Sabe-se que ABCD é um quadrado de lado 10 cm. As linhas curvas são semicircunferências com centros nos pontos médios, *M* e *N*, dos lados do quadrado. Considere $\pi = 3{,}14$.



Ilustrações: Editoria de arte

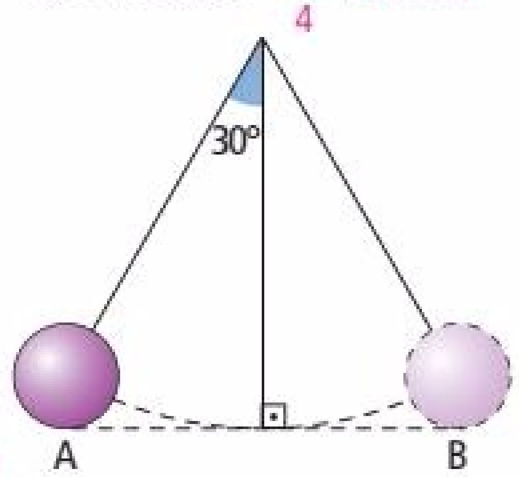
6. Um atleta desloca-se à velocidade constante de 7,85 m/s numa pista circular de raio 200 m. Determine as medidas em radiano e em grau do arco que ele percorre no tempo de:

a) 10 s $\frac{\pi}{8}$ rad; 22,5°

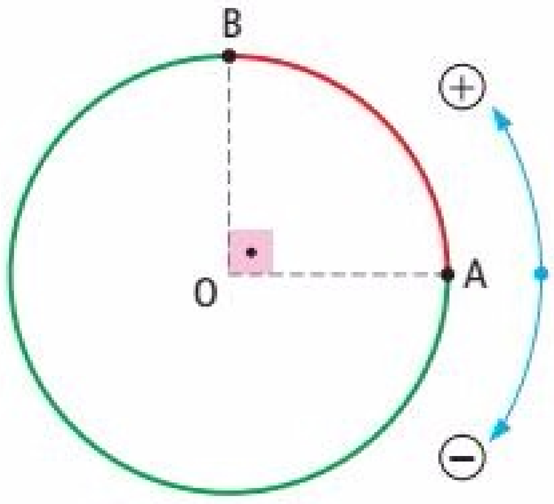
b) 1 minuto $\frac{3\pi}{4}$ rad; 135°

7. O pêndulo de um relógio tem comprimento 0,5 m e executa o movimento, de *A* para *B*, indicado na figura.

Determine o comprimento do arco AB que a extremidade do pêndulo descreve. $\frac{\pi}{6}$ m



Arco orientado



Ilustrações: Editoria de arte

A figura ao lado mostra que, sobre a circunferência, o percurso de *A* para *B* pode ser feito no sentido anti-horário, seguindo o arco vermelho AB, ou no sentido horário, seguindo o arco verde AB.

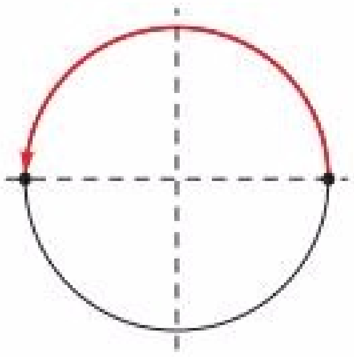
Estabelecendo como positivo o sentido anti-horário e como negativo o sentido horário, temos:

$$\text{arco vermelho: med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi}{2}\text{ rad ou med }(\overset{\frown}{AB}) = 90°$$

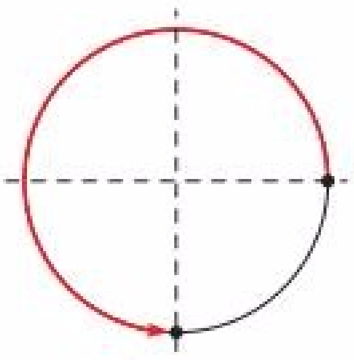
$$\text{arco verde: med}(\overset{\frown}{AB}) = -\frac{3\pi}{2}\text{ rad ou med }(\overset{\frown}{AB}) = -270°$$

Veja outros exemplos de arcos orientados:

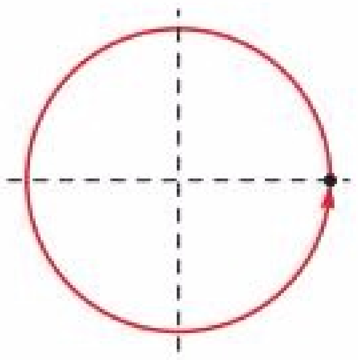
- sentido anti-horário:



arco de π rad ou 180°

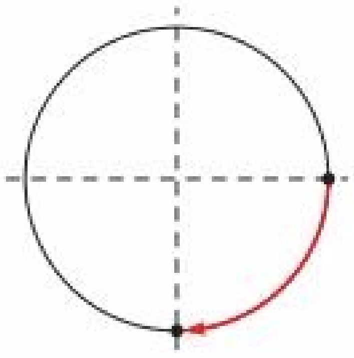


arco de $\frac{3\pi}{2}$ rad ou 270°

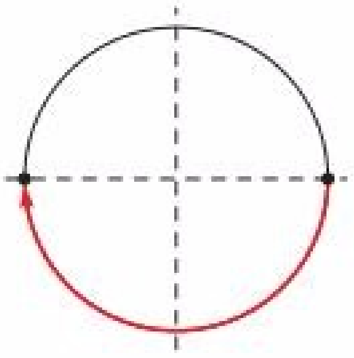


arco de 2π rad ou 360°

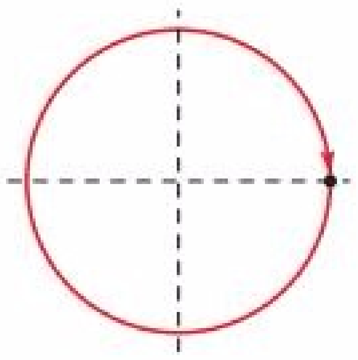
- sentido horário:



arco de $-\frac{\pi}{2}$ rad ou −90°



arco de −π rad ou −180°



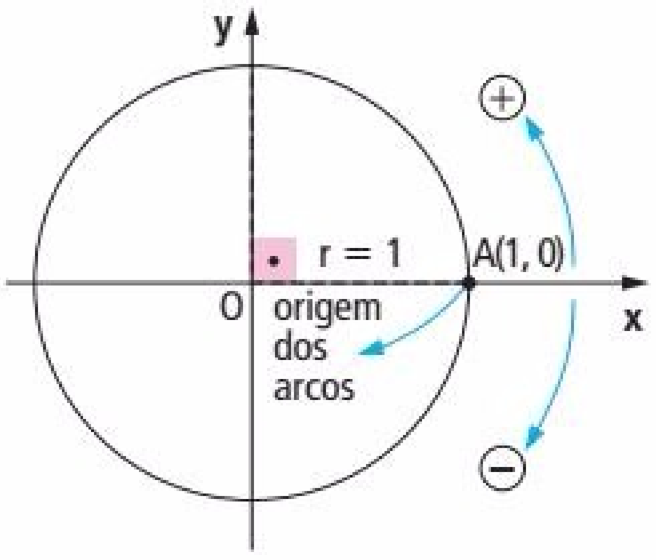
arco de −2π rad ou −360°

A medida acrescida de um sinal chama-se **medida algébrica**.

Circunferência trigonométrica

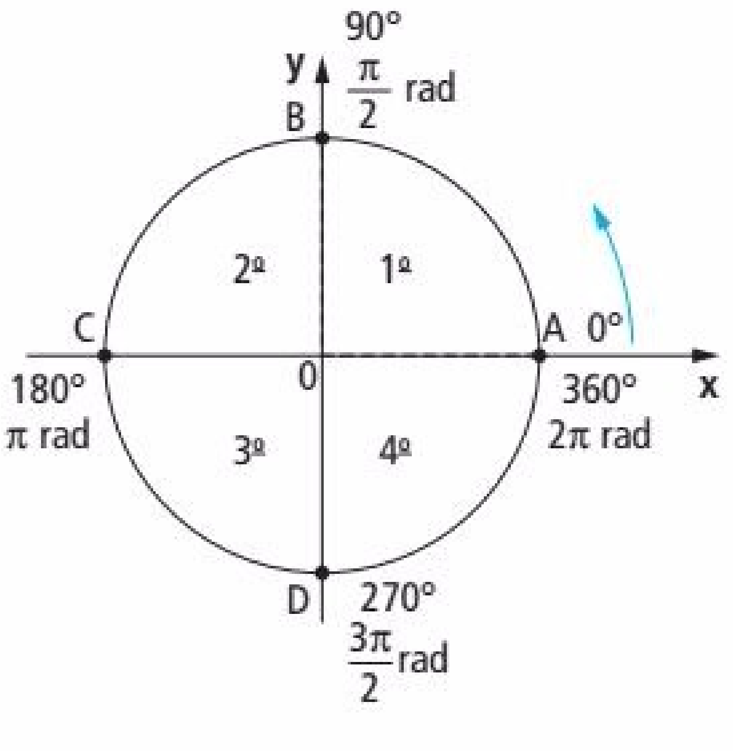
Vamos fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy no plano.

A circunferência de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio unitário (r = 1) e cujo sentido positivo é o anti-horário, é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**.



Os arcos da circunferência trigonométrica terão origem no ponto A(1, 0) e as medidas algébricas serão positivas no sentido anti-horário e negativas no sentido horário.

Os eixos *x* e *y* do sistema de coordenadas cartesianas determinam no plano quatro partes, denominadas **quadrantes**, numeradas no sentido anti-horário a partir do ponto *A*, como mostra a figura ao lado. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* estã nos eixos e não pertencem a nenhum quadrante.



Observe que, para todo ponto (x, y) pertencente à circunferência trigonométrica, temos:
$-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, a medida de qualquer arco AP, em radiano, é numericamente igual ao comprimento desse arco, ou seja:

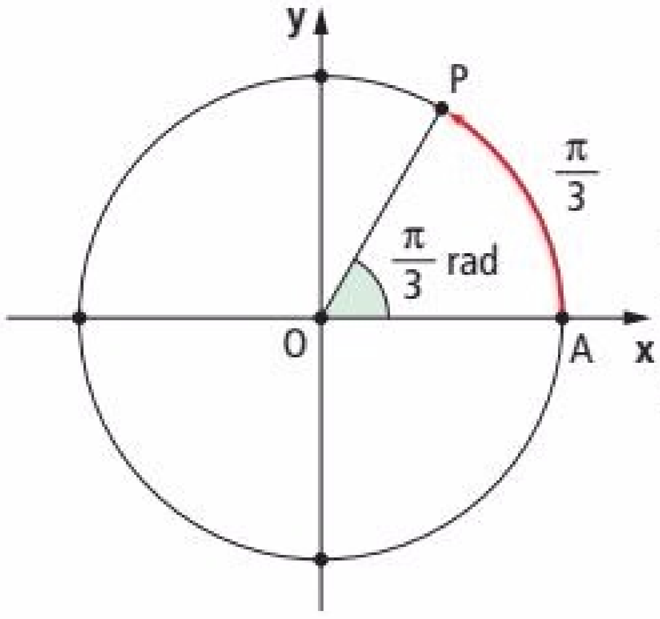
$$\text{med}(\widehat{AP}) = \alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{\ell}{1} = \ell \Rightarrow \text{med}(\widehat{AP}) = \ell$$

Logo, no lugar de $\frac{\pi}{2}$ rad, podemos escrever apenas $\frac{\pi}{2}$; em vez de $-\frac{3\pi}{2}$ rad, escrevemos $-\frac{3\pi}{2}$ etc.

Em uma circunferência trigonométrica podemos ter arcos maiores que uma volta.

Arcos côngruos

Seja *P* um ponto da circunferência trigonométrica. Podemos verificar que, com origem em *A* e extremidade em *P*, há uma infinidade de arcos. Para isso, basta fazermos o percurso em um sentido ou em outro e dar mais ou menos voltas completas na circunferência.



Editoria de arte

Vamos considerar, por exemplo, o arco AP de comprimento $\frac{\pi}{3}$. Outros arcos podem ser obtidos ao adicionar à medida de $\widehat{AP}$ múltiplos inteiros de 2π (que é o comprimento da circunferência). Veja:

- $\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi\right)$
- $\frac{7\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi\right)$
- $\frac{13\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi\right)$
- $\frac{19\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi\right)$

$\vdots$

- $\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - 0 \cdot 2\pi\right)$
- $-\frac{5\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - 1 \cdot 2\pi\right)$
- $-\frac{11\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi\right)$
- $-\frac{17\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi\right)$

$\vdots$

Os arcos que têm a mesma extremidade *P* são chamados de **arcos côngruos** ou congruentes.

De modo geral, um arco AP que mede α radianos tem como expressão geral para os arcos côngruos a ele:

$$\alpha + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad \alpha + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Caso a medida α do arco seja dada em grau e como a circunferência tem 360°, teremos:

$$\alpha + k \cdot 360°, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

O arco AP de medida α com $0° < \alpha < 360°$ é chamado **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele, pois é o único representante desses arcos côngruos que se encontra na primeira volta positiva.

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

Além da origem *A*, cada arco da circunferência trigonométrica tem como outra extremidade um único ponto na circunferência. Assim, indica-se o arco apenas por esse ponto.

A cada número real *x* é possível associar um único ponto *P* na circunferência, que é a extremidade do arco cuja medida algébrica é *x*. Se $x = 0$, o ponto *P* coincide com a origem A(1, 0) do arco.

É como se “enrolássemos” a reta real na circunferência trigonométrica, com os pontos associados aos números positivos no sentido anti-horário e com os pontos associados aos números negativos no sentido horário. A origem da reta real coincide com o ponto *A*.

Por exemplo, para localizar o ponto associado ao número $\frac{3\pi}{4}$, partimos de *A* e percorremos um arco de comprimento $\frac{3\pi}{4}$ na circunferência no sentido anti-horário. Já para localizar o ponto associado ao número $-\frac{5\pi}{6}$, percorremos um arco de comprimento $-\frac{5\pi}{6}$ no sentido horário na circunferência a partir de *A*.

Exercícios resolvidos

3 Escreva a expressão geral dos arcos côngruos aos seguintes arcos:

a) $\frac{\pi}{4}$

b) 175°

Resolução

a) Expressão geral: $\alpha + 2k\pi$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Expressão geral: $\alpha + k \cdot 360°$; $\alpha = 175°$:

$175° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

4 Um móvel percorreu um arco de 1 690° na circunferência trigonométrica, partindo do ponto *A*. Quantas voltas completas esse móvel deu, e em qual quadrante parou?

Resolução

$$\begin{array}{r|l} 1\,690 & \underline{360} \\ 250 & 4 \end{array}$$

$$1\,690° = \underbrace{250°}_{\text{o arco de 1 690° tem a mesma extremidade que o arco de 250°}} + \underbrace{4}_{\text{número de voltas completas}} \cdot 360° \quad \text{(expressão geral)}$$

O móvel deu 4 voltas completas no sentido anti-horário e, como $180° < 250° < 270°$, parou no 3º quadrante.

5 Calcule a 1ª determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de 1 940°.

Resolução

$$\begin{array}{r|l} 1\,940 & \underline{360} \\ 140 & 5 \end{array}$$

$$1\,940° = \underbrace{140°}_{\text{1ª determinação positiva}} + \underbrace{5}_{\text{número de voltas completas}} \cdot 360° \quad \text{(expressão geral)}$$

A 1ª determinação positiva é 140°, pois é o único representante desses arcos côngruos que se encontra na primeira volta positiva e a expressão geral é $140° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios propostos

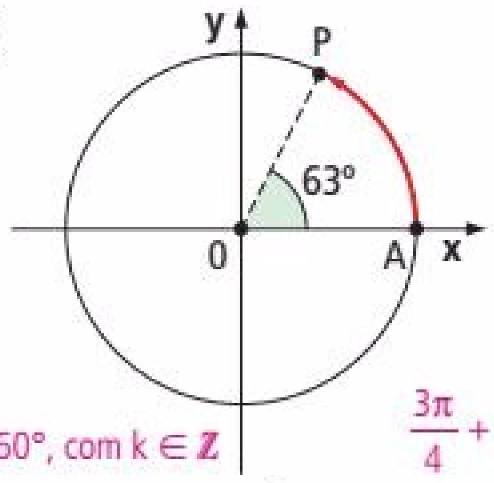
Escreva no caderno

8. Represente na circunferência trigonométrica os pontos associados aos números: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $\frac{\pi}{5}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $-\frac{2\pi}{3}$ d) $-\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

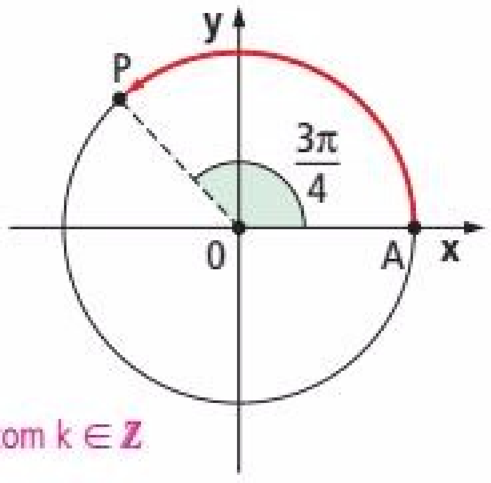
9. Escreva no caderno a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos destacados nas circunferências trigonométricas a seguir.

a)



$63° + k360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b)



$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Ilustrações: Editoria de arte

10. Escreva no caderno a expressão correspondente aos arcos côngruos ao arco: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) AB de medida $\frac{\pi}{2}$;

b) AC de medida π;

c) AD de medida $\frac{3\pi}{2}$;

d) AB de medida $-\frac{3\pi}{2}$.

11. Verifique se são côngruos os seguintes pares de arcos:

a) 1 490° e −1 030°; São côngruos.

b) $\frac{14\pi}{3}$ rad e $\frac{19\pi}{3}$ rad. Não são côngruos.

12. Verifique se os números $-\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ estão associados a pontos coincidentes na circunferência trigonométrica. Sim.

13. Determine o quadrante em que está localizada a extremidade final dos seguintes arcos:

a) −1 640° 2ºQ

b) 2 630° 2ºQ

c) $\frac{2\,487\pi}{4}$ rad 4ºQ

14. Determine quantas voltas completas um móvel dá e em que quadrante ele para se, partindo da origem dos arcos, percorre, na circunferência trigonométrica, um arco de:

a) 1 810° 5 voltas, 1ºQ

b) $\frac{25\pi}{4}$ rad 3 voltas, 1ºQ

c) −1 200° 3 voltas, 3ºQ

d) 2 350° 6 voltas, 3ºQ

e) $\frac{31\pi}{6}$ rad 2 voltas, 3ºQ

f) $\frac{17\pi}{8}$ rad 1 volta, 1ºQ

15. Calcule a 1ª determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:

a) 1 550°
$110°$; $\alpha = 110° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) −2 165°
$355°$; $\alpha = 355° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{23\pi}{4}$ rad
$\frac{7\pi}{4}$; $\alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

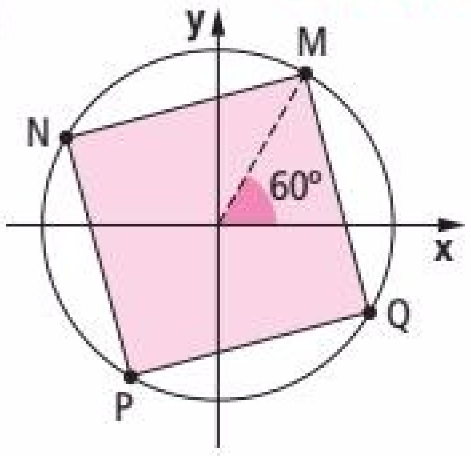
d) $\frac{17\pi}{3}$ rad
$\frac{5\pi}{3}$; $\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

16. Quantos centímetros percorre um corpo que descreve um arco de 600° em uma circunferência de raio 10 cm? Use $\pi = 3{,}14$. 104,67 cm

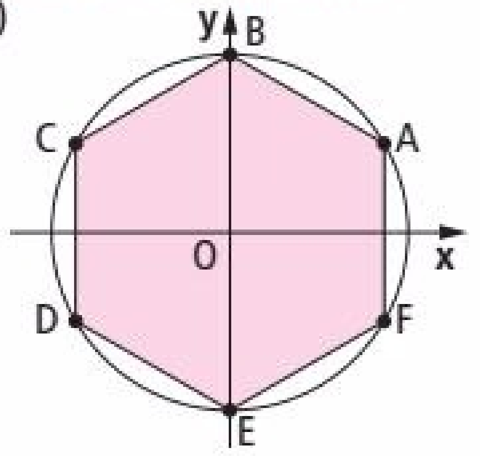
17. Os polígonos regulares das figuras estão inscritos nas circunferências trigonométricas. Determine, em graus e em radianos, as 1^as^ determinações positivas dos arcos cujas extremidades são vértices de cada polígono:

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a)



b)



$\frac{\pi}{4} + 2k\pi + k \in \mathbb{Z}$

18. Se um arco AM tem, no sentido horário, medida equivalente a 13 voltas inteiras mais $\frac{1}{8}$ de volta, qual é a expressão geral de todos os arcos AM?

19. Represente, na circunferência trigonométrica, as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas pelas expressões a seguir:

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

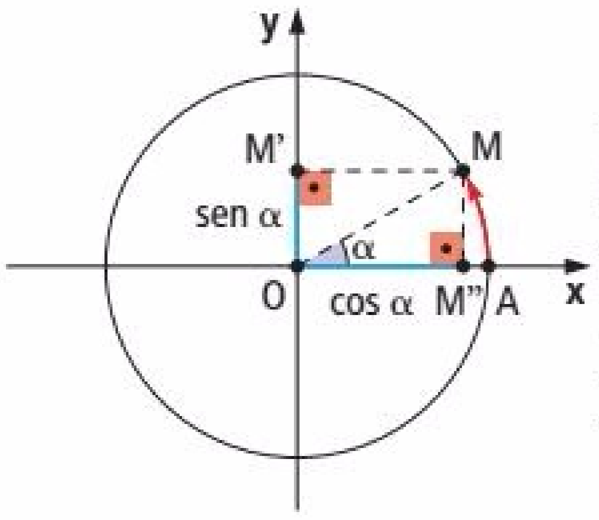
a) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha = 90° + k \cdot 90°, k \in \mathbb{Z}$

d) $\alpha = -120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

Seno e cosseno de um arco



Ilustrações: Editoria de arte

Seja *M* um ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α. Vimos que *M* é a extremidade final do arco AM de medida α radianos. Define-se:

- o seno de α é a ordenada do ponto *M*;
- o cosseno de α é a abscissa do ponto *M*.

Considere M′ e M″ as projeções ortogonais do ponto *M* sobre os eixos *x* e *y*, respectivamente, conforme mostra a figura ao lado. A ordenada do ponto *M* é igual à medida algébrica do segmento de reta OM′. Da mesma maneira, a abscissa do ponto *M* é igual à medida algébrica do segmento de reta OM″ e podemos escrever:

$$\text{sen } \alpha = OM' \text{ e } \cos \alpha = OM''$$

Assim, o eixo vertical é o **eixo dos senos** e o eixo horizontal é o **eixo dos cossenos**.

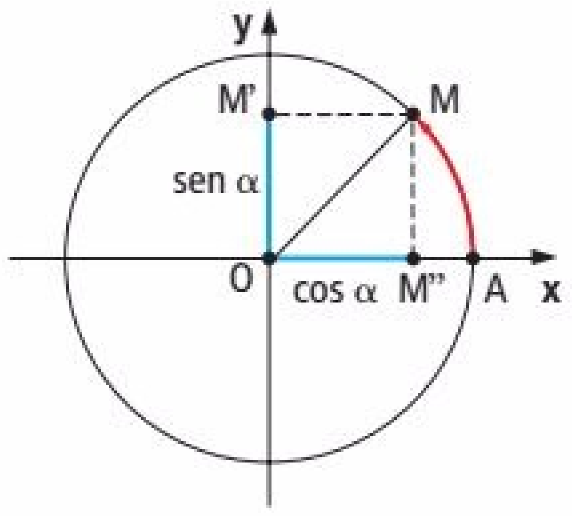
Com isso, cada número real α corresponde a um ponto da circunferência trigonométrica de coordenadas (cos α, sen α).

Quando α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ou seja, α é um ângulo agudo, essa definição geral coincide com as definições já estudadas de seno e cosseno no triângulo retângulo. Considerando o △MOM″:

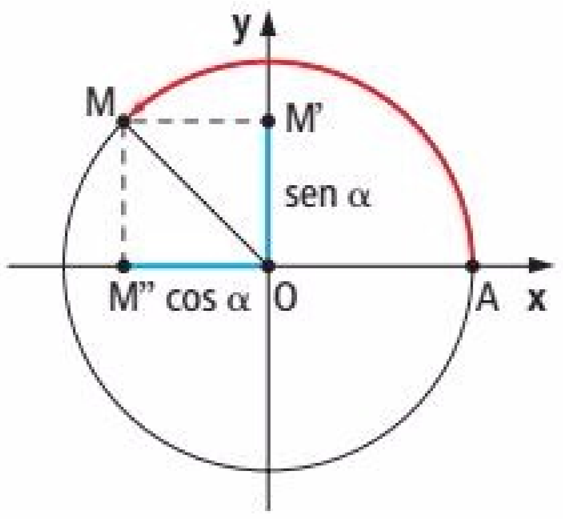
$$\text{sen } \alpha = \frac{M''M}{OM} = \frac{OM'}{1} = OM' \Rightarrow \text{sen } \alpha = OM' \qquad \cos \alpha = \frac{OM''}{OM} = \frac{OM''}{1} = OM'' \Rightarrow \cos \alpha = OM''$$

É possível estender essa ideia para os demais quadrantes e a definição vista nos triângulos retângulos continua válida para arcos de qualquer medida. Em cada quadrante, os sinais de seno e cosseno variam, conforme mostrado a seguir.

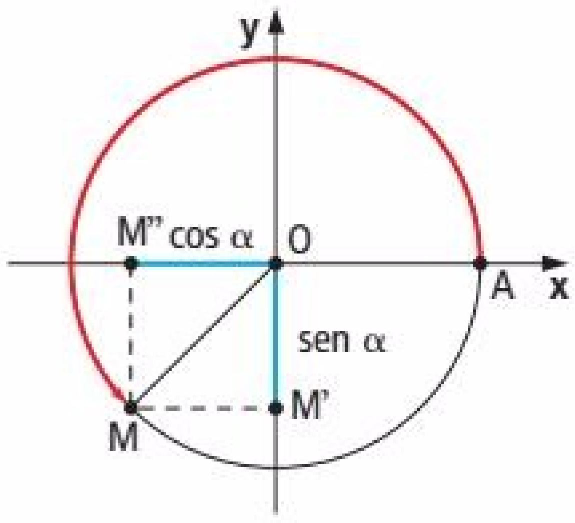
- No primeiro quadrante, o seno é positivo e o cosseno é positivo.



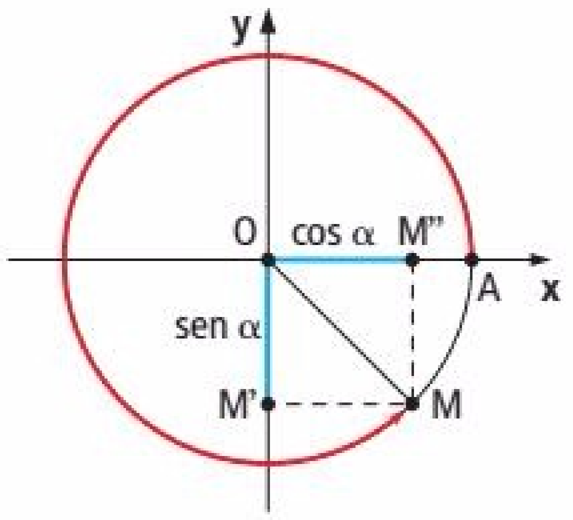
- No segundo quadrante, o seno é positivo e o cosseno é negativo.



- No terceiro quadrante, o seno é negativo e o cosseno é negativo.



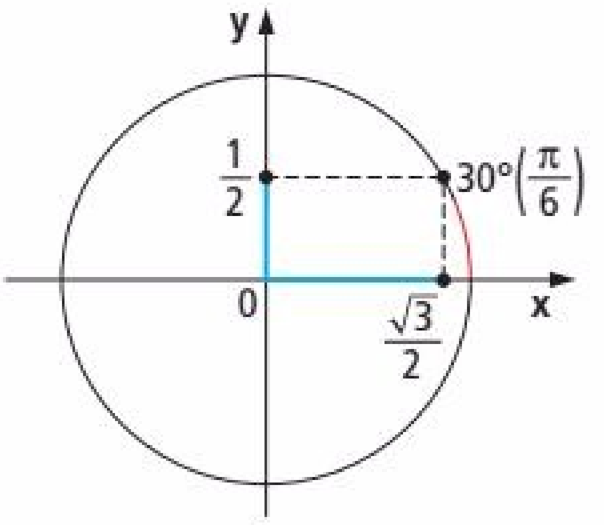
- No quarto quadrante, o seno é negativo e o cosseno é positivo.

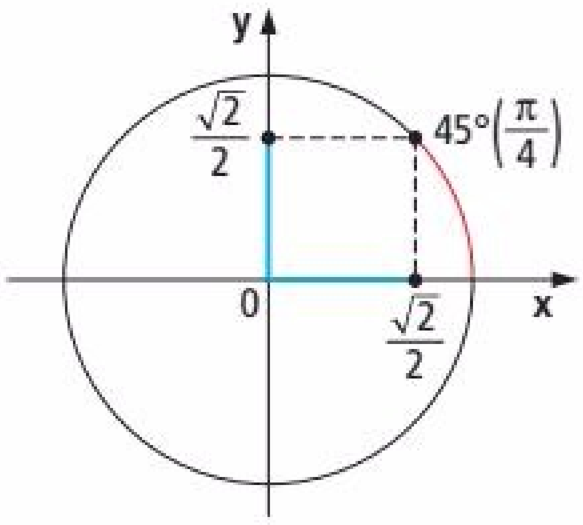


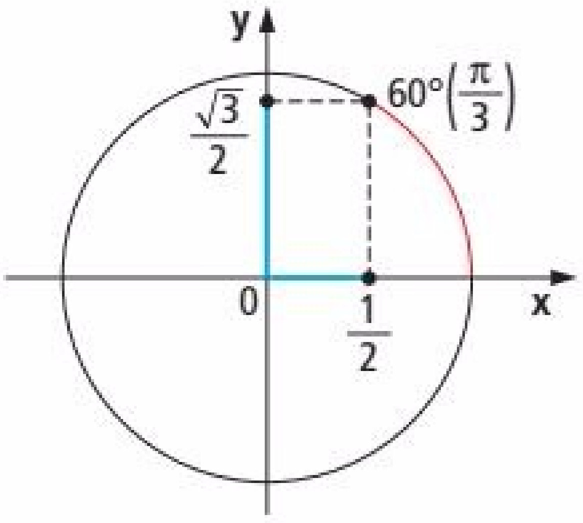
Valores notáveis do seno e do cosseno

Vamos destacar os valores do seno e do cosseno para os arcos com extremidade nos eixos dos senos e dos cossenos, e também para os arcos notáveis do 1º quadrante. Os valores do seno e cosseno desses arcos estão apresentados a seguir.

medida do arco	$0°\ (0)$	$30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°\ (\pi)$	$270° \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$360°\ (2\pi)$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1


y
$\frac{1}{2}$
$30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$
0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
x


y
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$
0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
x


y
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$
0
$\frac{1}{2}$
x

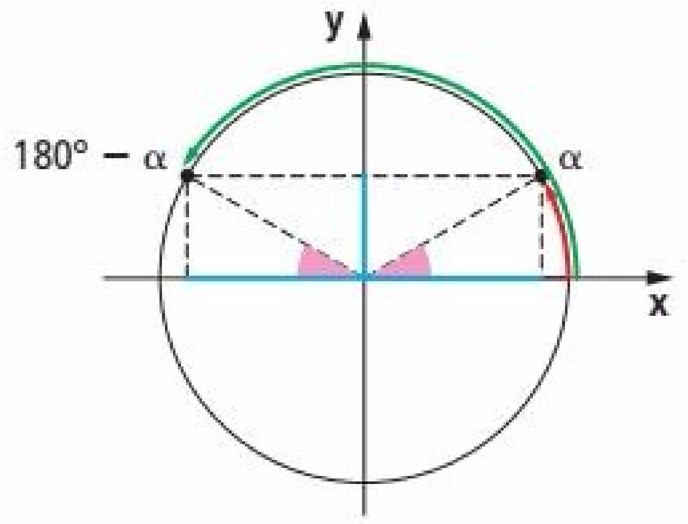
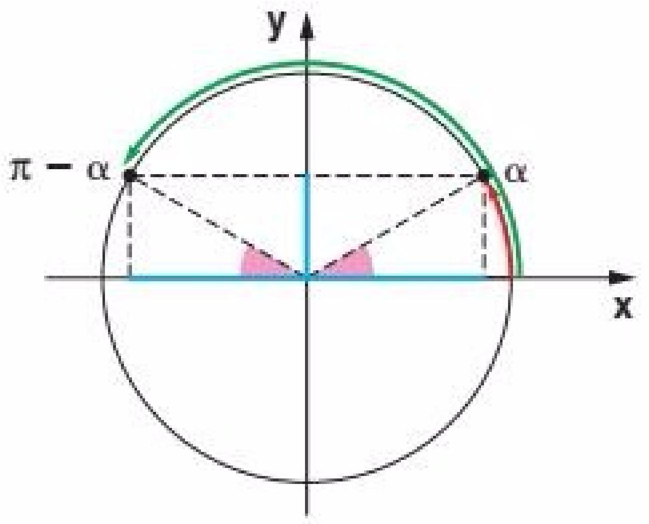
Ilustrações: Editoria de arte

Redução ao primeiro quadrante

Usando simetria, podemos relacionar o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do seno e do cosseno de um arco do primeiro quadrante. Desse modo, fazemos uma **redução ao primeiro quadrante**.

- **Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante**

Observe, em cada figura, o seno e o cosseno dos arcos destacados.

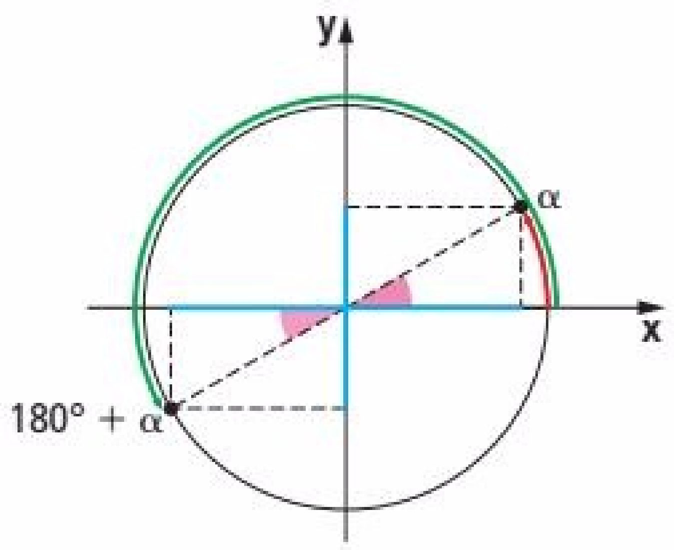
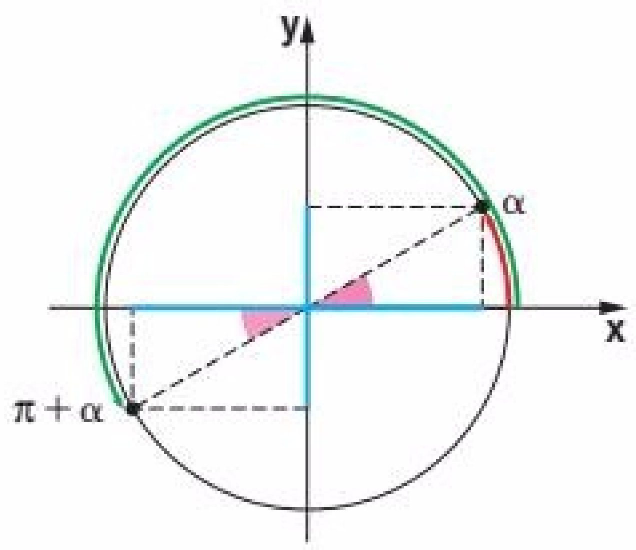
Grau	**Radiano**
 y $180° - \alpha$ α x	 y $\pi - \alpha$ α x
$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$	$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Note que os arcos de medidas α e $(180° - \alpha)$ ou α e $(\pi - \alpha)$ são arcos suplementares e que suas extremidades são pontos simétricos em relação ao eixo dos senos.

Dois arcos suplementares têm senos iguais e cossenos opostos.

- **Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante**

  Observe, em cada figura, o seno e o cosseno dos arcos destacados.

Grau	Radiano
	
$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$
$\cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

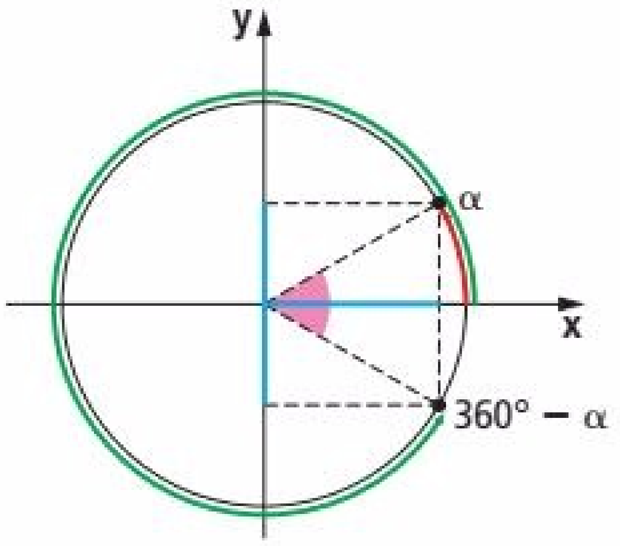
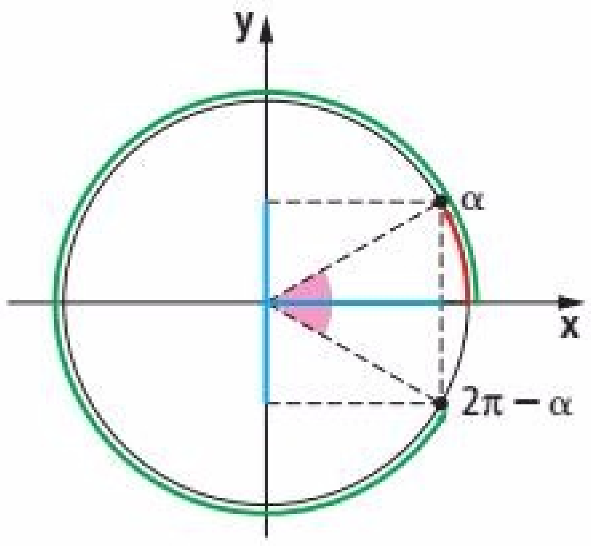
Ilustrações: Editoria de arte

Note que as extremidades desses arcos são pontos simétricos em relação à origem do sistema de eixos.

Os arcos de medidas α e $(180° + \alpha)$ ou α e $(\pi + \alpha)$ têm senos opostos e cossenos opostos.

- **Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante**

  Observe, em cada figura, o seno e o cosseno dos arcos destacados.

Grau	Radiano
	
$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$
$\cos(360° - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

Os arcos de medidas α e $(360° - \alpha)$ ou α e $(2\pi - \alpha)$ são arcos replementares e suas extremidades são pontos simétricos em relação ao eixo dos cossenos.

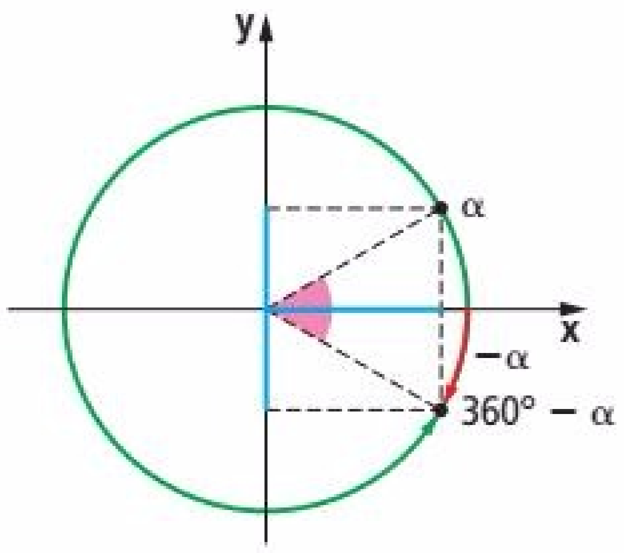
Dois arcos replementares têm senos opostos e cossenos iguais.

Vamos utilizar a redução ao quarto quadrante para extrair da circunferência trigonométrica mais algumas relações:

- $(360° - \alpha)$ e $-\alpha$ são medidas de arcos côngruos.
- $\operatorname{sen}(360° - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$
- $\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$

  Ou, em radianos, temos:

- $(2\pi - \alpha)$ e $-\alpha$ são arcos côngruos.
- $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$
- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$



Exercícios resolvidos

6 Calcule o valor de $\cos 13\pi$.

Resolução

Como o arco de medida 13π não está na primeira volta, devemos estabelecer a 1ª determinação positiva dele. Então:

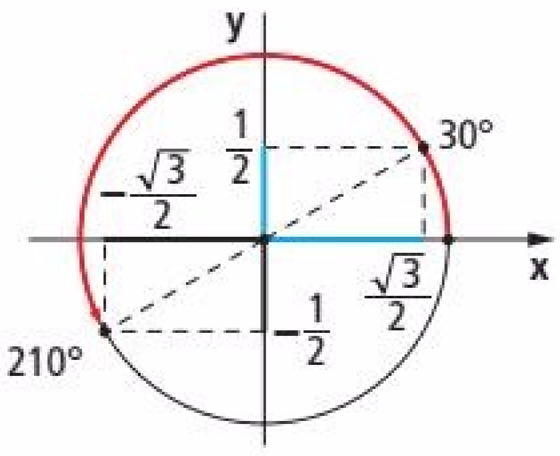
$$13\pi = \left(\frac{1}{2}+6\right) 2\pi = \pi + 6 \cdot 2\pi$$

Então: $\cos 13\pi = \cos \pi \Rightarrow \cos 13\pi = -1$

7 Calcule os valores de sen 210° e cos 210°.

Resolução

Reduzindo esse arco ao 1º quadrante, temos:



Ilustrações: Editoria de arte

$$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } 1830° + \cos 13\pi}{\text{sen } \dfrac{16\pi}{3}}$.

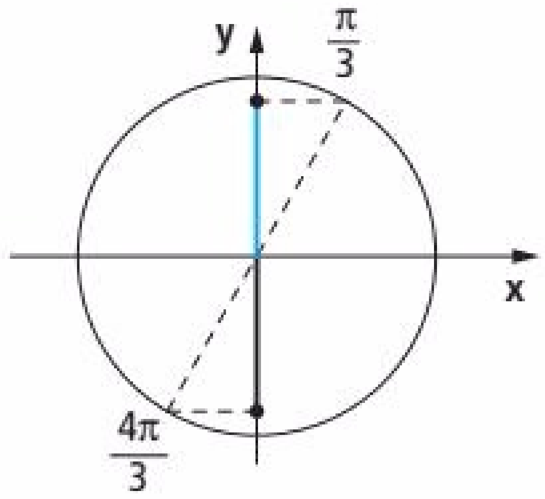
Resolução

Vamos calcular a 1ª determinação positiva de cada arco:

- $1830° = 30° + 5 \cdot 360° \Rightarrow \text{sen } 1830° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 13\pi = \cos(\pi + 6 \cdot 2\pi) = \cos \pi = -1$
- $\frac{16\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 4\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \frac{16\pi}{3} = \text{sen } \frac{4\pi}{3}$ (terceiro quadrante)

Reduzindo do terceiro para o primeiro quadrante:



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} \text{ e } \text{sen } \frac{4\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então: } E = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

9 Simplifique a expressão

$A = \text{sen}(900° - \alpha) + \cos(1980° + \alpha) + \text{sen}(1440° - \alpha)$.

Resolução

Sabemos que:

$900° = 180° + 2 \cdot 360°$

$1\,980° = 180° + 5 \cdot 360°$

$1\,440° = 0 + 4 \cdot 360°$

Logo:

$\text{sen}(900° - \alpha) = \text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen } \alpha$

$\cos(1\,980° + \alpha) = \cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{sen}(1\,440° - \alpha) = \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$

Substituindo na expressão, temos:

$A = \text{sen } \alpha - \cos \alpha - \text{sen } \alpha \Rightarrow A = -\cos \alpha$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

20. Calcule e registre no caderno:

a) sen 150° $\frac{1}{2}$

b) cos 150° $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) sen 240° $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) cos 240° $-\frac{1}{2}$

e) sen 315° + cos 315° zero

21. Calcule os valores do seno e do cosseno dos seguintes arcos: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) 135°

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) 1 590°

d) $\frac{19\pi}{4}$

e) −225°

22. Usando $\pi = 3{,}14$, verifique se:

a) $\text{sen } 8 > 0$; Verdadeiro.

b) $\cos 10 < 0$; Verdadeiro.

c) $\text{sen } 5 > 0$. Verdadeiro.

23. Qual é o número real expresso por:

a) $\text{sen } 360° + \text{sen } 540° - 4 \text{ sen } 1\,170°$ 4

b) $\cos 810° + 4 \cos 3\,780° - \frac{1}{2} \cos 1\,350°$ −4

24. Simplifique as expressões:

a) $\text{sen}(9\pi - \alpha) + \text{sen}(5\pi - \alpha)$ 2 sen α

b) $\text{sen}(\alpha - 900°) + \cos(\alpha - 540°)$ −sen α − cos α

c) $\text{sen}(4\pi - \alpha) + \cos(8\pi - \alpha) - \text{sen}(720° - \alpha)$ cos α

25. Determine o quadrante em que está o arco α sabendo que:

a) $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\,\alpha < 0$ 1º quadrante

b) $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$ 2º quadrante

26. Represente, na circunferência trigonométrica, um ângulo α tal que: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{7}{10}$

c) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{5}$ com $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

27. Escreva, em ordem crescente, os números $a = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}$, $b = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{7}$, $c = \cos\dfrac{\pi}{5}$ e $d = \cos\dfrac{\pi}{7}$.

$\text{sen}\,\dfrac{\pi}{7}; \text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}; \cos\dfrac{\pi}{5}; \cos\dfrac{\pi}{7}$

28. Calcule o valor da expressão

$\text{sen}\,8\pi + \text{sen}\,\dfrac{11\pi}{2} - \text{sen}\,\dfrac{13\pi}{6}$. $-\dfrac{3}{2}$

29. Sabendo que $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ rad, calcule:

$A = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} - 3\,\text{sen}\,2\alpha + \dfrac{\text{sen}\,3\alpha}{4}$ $A = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$

30. Calcule o valor de $\text{sen}\,3\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{9\alpha}{4}$ para $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. $\dfrac{3}{2}$

31. Calcule o valor da expressão

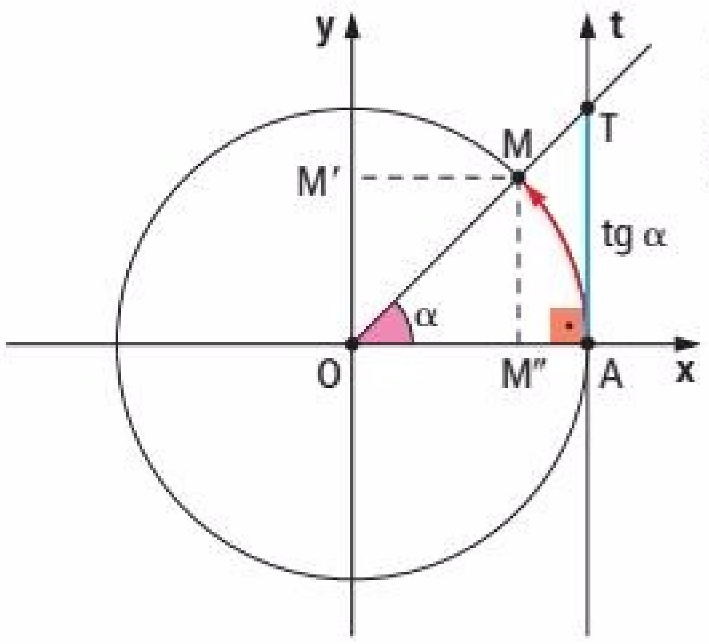
$2\,\text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}\,(\pi - \alpha) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ para $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$. 0

32. Seja a sequência definida por $a_n = n \cdot \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que a_n expressa ângulos em radianos. Calcule o valor de $\cos a_6$. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

33. Determine z, sabendo que

$z = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{9} + \ldots + \dfrac{\pi}{3^n} + \ldots\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$. $z = 1$

Tangente de um arco



Editoria de arte

Seja *M* um ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α. Sabemos que *M* é a extremidade final do arco AM de medida α radianos.

Tomemos o eixo *t*, paralelo ao eixo dos senos, orientado no mesmo sentido deste, com origem no ponto *A* e tangente à circunferência no ponto *A*. O eixo *t* é chamado **eixo das tangentes**.

Seja *T* o ponto de intersecção da reta OM com o eixo *t* das tangentes.

Define-se como tangente de α a ordenada do ponto *T*.

Como o eixo das tangentes é paralelo ao eixo dos senos, considerando AT como a medida algébrica do segmento de reta AT, podemos escrever:

$$\text{tg}\,\alpha = AT$$

Observações:

- Essa definição coincide com a que estudamos para o triângulo retângulo. No triângulo retângulo OAT, vem:

$$\text{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT \Rightarrow \text{tg}\alpha = AT$$

- Essa definição preserva a relação entre tangente, seno e cosseno. Nos triângulos OM″M e OAT, temos:

$$\triangle OM''M \sim \triangle OAT \Rightarrow \frac{OM''}{OA} = \frac{M''M}{AT} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{tg}\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = 1 \cdot \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Portanto, $\boxed{\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \text{ com } \cos\alpha \neq 0.}$

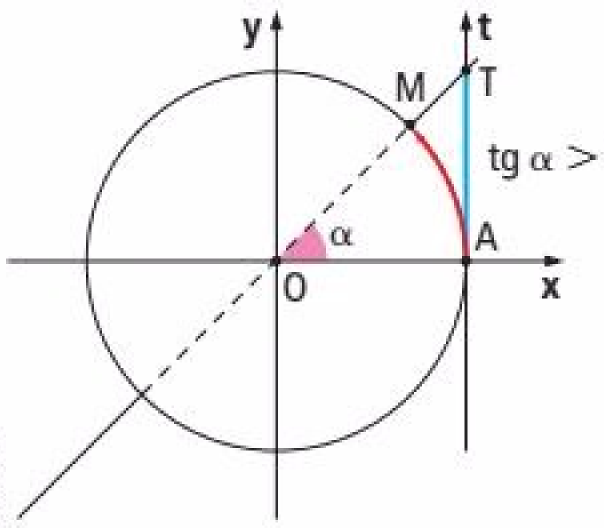
- Quando a reta OT coincide com o eixo dos cossenos, temos $\text{tg}\,\alpha = 0$. Por exemplo:

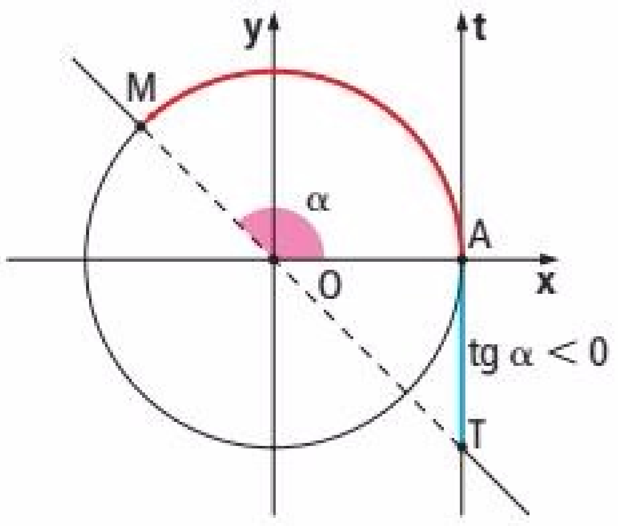
$\text{tg}\,0° = 0$ e $\text{tg}\,\pi = 0$, pois $\text{sen}\,0° = 0$ e $\text{sen}\,\pi = 0$.

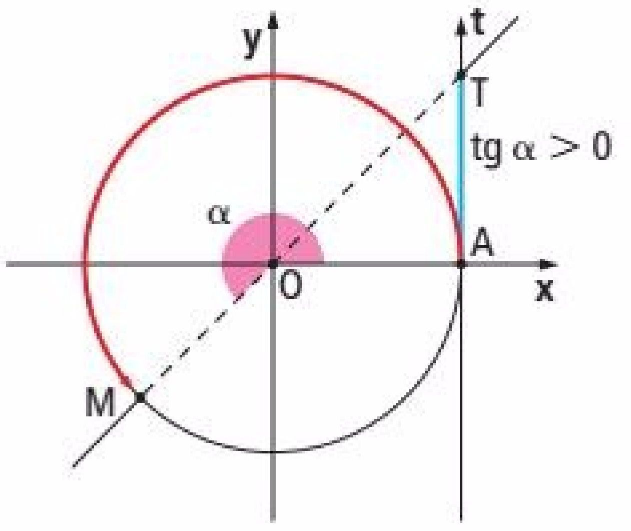
- Quando a reta OT coincide com o eixo dos senos, não existe $\text{tg}\,\alpha$. Por exemplo:

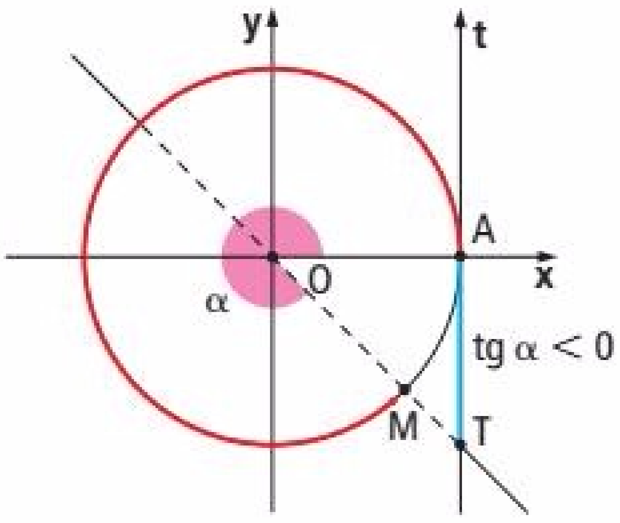
$\text{tg}\,\dfrac{\pi}{2}$ e $\text{tg}\,270°$, pois $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ e $\cos 270° = 0$.

Como o eixo das tangentes é orientado para cima, a tangente é positiva quando α é do primeiro ou do terceiro quadrante, e negativa quando α é do segundo ou do quarto quadrante, como indicado nas imagens a seguir.





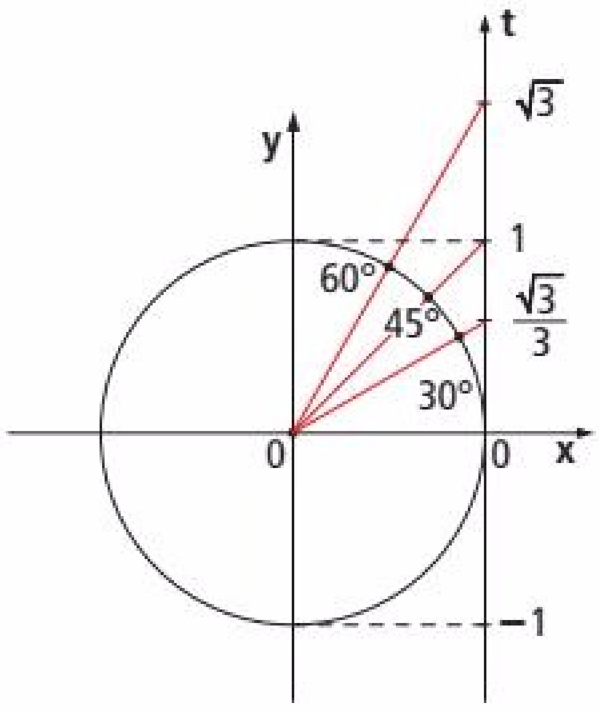




Ilustrações: Editoria de arte

Valores notáveis da tangente

Observe alguns valores da tangente de arcos notáveis na circunferência trigonométrica. Podemos obtê-los aplicando a relação $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$. Assim:



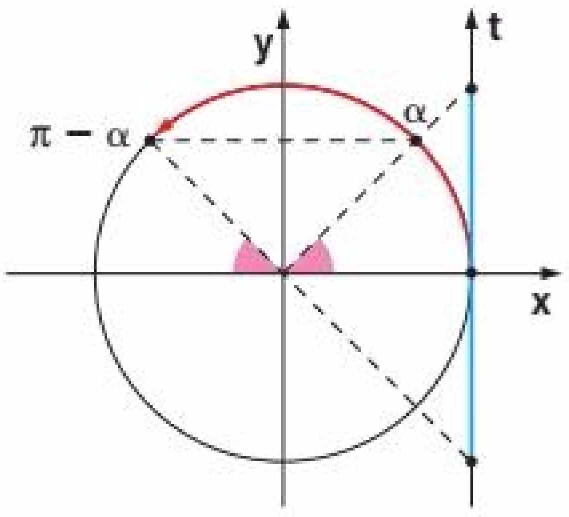
- $\text{tg}\ 30° = \dfrac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg}\ 45° = \dfrac{\text{sen}\ 45°}{\cos\ 45°} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$
- $\text{tg}\ 60° = \dfrac{\text{sen}\ 60°}{\cos\ 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Redução ao primeiro quadrante

Usando simetria, podemos relacionar a tangente de um arco de qualquer quadrante com os valores da tangente de um arco do primeiro quadrante. Assim, efetuamos, aqui também, uma redução ao primeiro quadrante.

Para α real e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos:

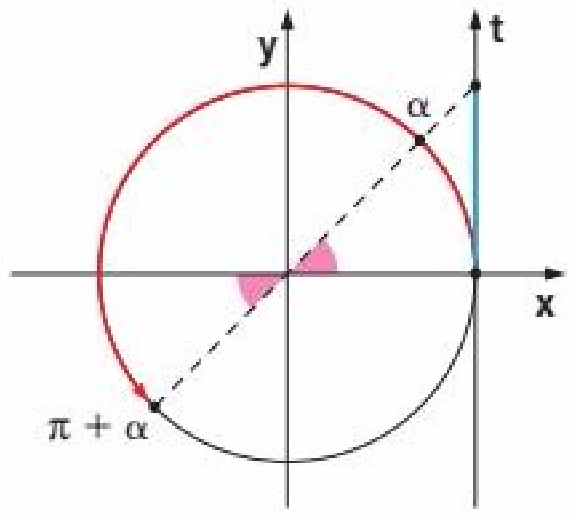
- **Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante**



Grau	Radiano
$\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

- **Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante**

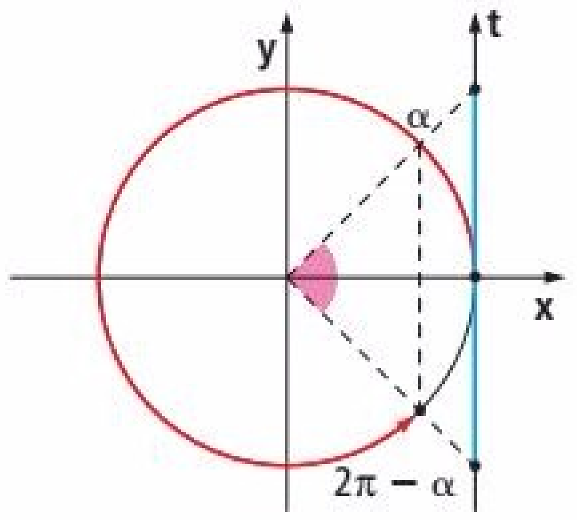
Grau	Radiano
tg $(180° + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$	tg $(\pi + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$



Ilustrações: Editoria de arte

- **Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante**

Grau	Radiano
tg $(360° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$	tg $(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$



Exercícios resolvidos

10 Determine o valor de tg 1 845°.

Resolução

$1\,845° = 45° + 5 \cdot 360°$

Então: tg 1 845° = tg 45° = 1.

11 Determine o valor de tg $\frac{25\pi}{3}$.

Resolução

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$$

Então: tg $\frac{25\pi}{3}$ = tg $\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

34. Calcule e registre no caderno:

a) tg 150° $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) tg 240° $\sqrt{3}$

c) tg 300° $-\sqrt{3}$

d) tg 225° 1

e) tg (−930°) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) tg $\frac{16\pi}{3}$ $\sqrt{3}$

35. (Fuvest-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira:

a) sen 210° < cos 210° < tg 210°

X b) cos 210° < sen 210° < tg 210°

c) tg 210° < sen 210° < cos 210°

d) tg 210° < cos 210° < sen 210°

e) sen 210° < tg 210° < cos 210°

36. Simplifique:

a) tg $(3\pi - \alpha)$ + tg $(-5\pi - \alpha)$ $-2\ \text{tg}\ \alpha$

b) tg $(\alpha + 540°)$ − tg $(7\pi + \alpha)$ Zero.

37. Calcular $A = \text{sen}\ 3\alpha + \cos 4\alpha - \text{tg}\ 2\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zero.

38. Qual é o valor da expressão $\dfrac{\text{sen}\ \frac{8\pi}{3} - \cos 5\pi}{\text{tg}\ \frac{13\pi}{6}}$? $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

39. Calcular o valor de cos 510° + tg $\frac{3\pi}{4}$. $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$

40. Que número é maior: tg 1 ou tg 7? tg 1

41. Simplifique a expressão $\left(\text{sen}\ \frac{8\pi}{6} + \cos \frac{17\pi}{6}\right) : \left(\text{tg}\ \frac{\pi}{3}\right)$. -1

42. Calcule o valor de:

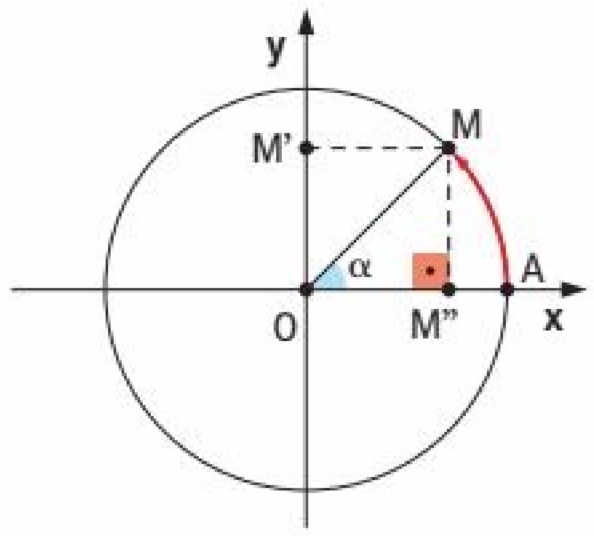
a) $\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ 3\alpha + \text{tg}\ 5\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad. 1

b) $\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ 2\alpha + \text{tg}\ 4\alpha$ para $\alpha = -60°$. $-\sqrt{3}$

43. Determine *m* para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação $\text{tg}^2\ \alpha - m \cos^2 \alpha + \text{sen}^2\ \alpha = 0$. $m = 15$

44. Determine *a*, de modo que $\text{tg}\ \alpha = a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}$ e $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. $\left\{a \in \mathbb{R} \mid a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3\right\}$

Relações entre seno e cosseno



Ilustrações: Editoria de arte

OM = 1
OM" = cos α
OM' = MM" = sen α

Considere na circunferência trigonométrica da figura o arco AM de medida α.

No triângulo retângulo OM"M, pelo teorema de Pitágoras, temos:

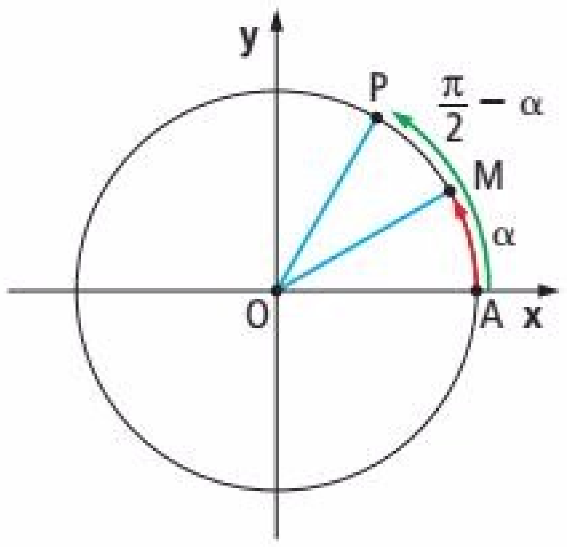
$$(MM'')^2 + (OM'')^2 = (OM)^2$$
$$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2$$

ou, ainda:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Essa relação, denominada **relação trigonométrica fundamental**, é válida para todos os valores de α, inclusive para aqueles em que o ponto *M* pertence a um dos eixos.

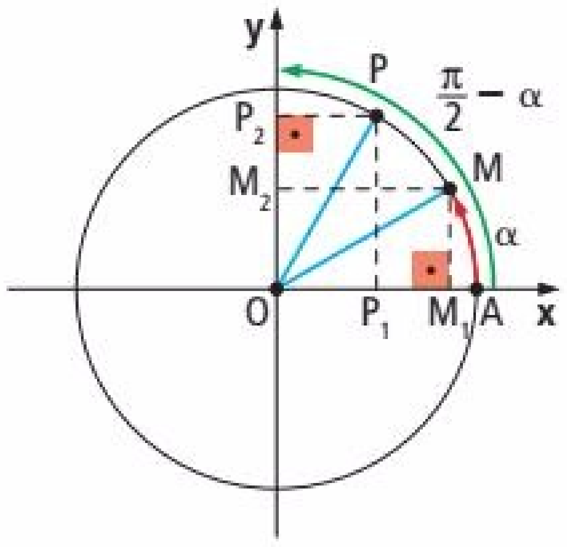
Essa relação vale mesmo quando o triângulo OM"M não existe, ou seja, quando $\alpha = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Agora, considere na circunferência trigonométrica ao lado os arcos AM e AP cujas medidas algébricas são α e $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, respectivamente.

Verificamos que:

- esses arcos são **complementares**, pois $\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$;
- $\cos\alpha = OM_1$, $\text{sen}\,\alpha = OM_2$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OP_1$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OP_2$.



Considerando os triângulos OM_1M e OP_2P, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OM} \cong \overline{OP}\ (r = 1) \\ M_1\hat{O}M \cong P_2\hat{O}P\ \ (\alpha) \\ O\widehat{M_1}M \cong O\widehat{P_2}P\ (\text{reto}) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OM_1M \cong \triangle OP_2P$$

Temos, ainda: $\overline{PP_2} \cong \overline{OP_1}$ e $\overline{MM_1} \cong \overline{OM_2}$

Podemos, então, concluir que:

- o seno do complementar de um arco é igual ao cosseno desse arco.

$$\overline{OP_2} \cong \overline{OM_1} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha}$$

- o cosseno do complementar de um arco é igual ao seno desse arco.

$$\overline{OP_1} \cong \overline{OM_2} \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha}$$

Convém lembrar que arcos situados em outros quadrantes podem ser complementares e com isso as relações também são válidas. Por exemplo, $-\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$ são medidas algébricas de arcos complementares, pois:

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Exercícios resolvidos

12 Dado $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{4}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcular $\cos\alpha$.

Resolução

Usando a relação $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($\alpha \in$ primeiro quadrante, em que $\cos > 0$), temos: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

13 Sabendo que $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, calcule $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Resolução

Sabemos que

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Mas:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{12}{13}$$

Como $\frac{\pi}{2} - \alpha$ pertence ao primeiro quadrante, devemos ter $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\,\alpha > 0$. Daí:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{5}{12}$$

14 Para que valores de *a* temos, simultaneamente, $\text{sen}\,\alpha = a + 1$ e $\cos\alpha = a$?

Resolução

Usando a relação $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e substituindo, temos:

$$(a + 1)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + a^2 - 1 = 0$$

$$2a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(2a + 2) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = -1$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

45. Já estudamos que arcos suplementares $(180° - \alpha)$ e α, ou $(\pi - \alpha)$ e α têm senos iguais e cossenos opostos. Dados $\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule:

a) $\text{sen}\,120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\text{sen}\,150°$ $\frac{1}{2}$
c) $\cos 120°$ $-\frac{1}{2}$
d) $\cos 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $-\frac{1}{2}$
f) $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $-\frac{1}{2}$
g) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
h) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

46. Sabendo que $\cos 15° = 0{,}97$, determine o valor de:

a) $\text{sen}\,75°$ 0,97
b) $\text{sen}\,15°$ 0,26
c) $\cos 75°$ 0,26
d) $\text{tg}\,15°$ 0,27
e) $\text{tg}\,75°$ 3,73

47. Sendo $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule:

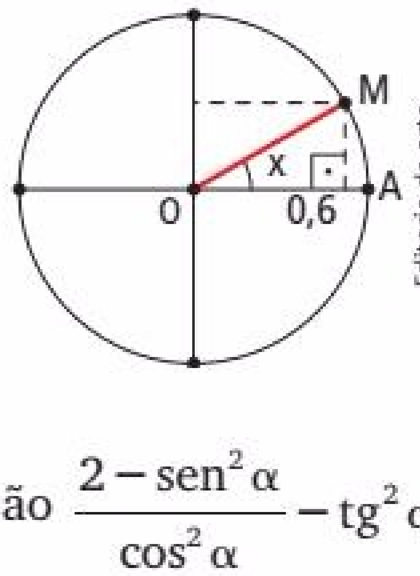
a) $\cos\alpha$ $-\frac{4}{5}$
b) $\text{tg}\,\alpha$ $\frac{3}{4}$

48. Dado $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule os valores de $\text{sen}\,\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{15}$

49. Seja $p = \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$, exprima $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ e $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ em função de *p*. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \pm\sqrt{1-p^2}$ e $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pm\sqrt{1-p^2}}{p}$

50. (UMC-SP) Baseando-se no círculo trigonométrico apresentado na figura a seguir, pode-se afirmar que o valor da expressão $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\,x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ é:

a) 1
x b) 2
c) $\text{sen}\,x$
d) $\cos x$
e) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



Editoria de arte

51. Simplifique a expressão $\frac{2 - \text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \text{tg}^2\,\alpha$. 2

52. Sendo $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{a - 2}$ e $\cos\alpha = a - 1$, determine *a*. $a = 2$

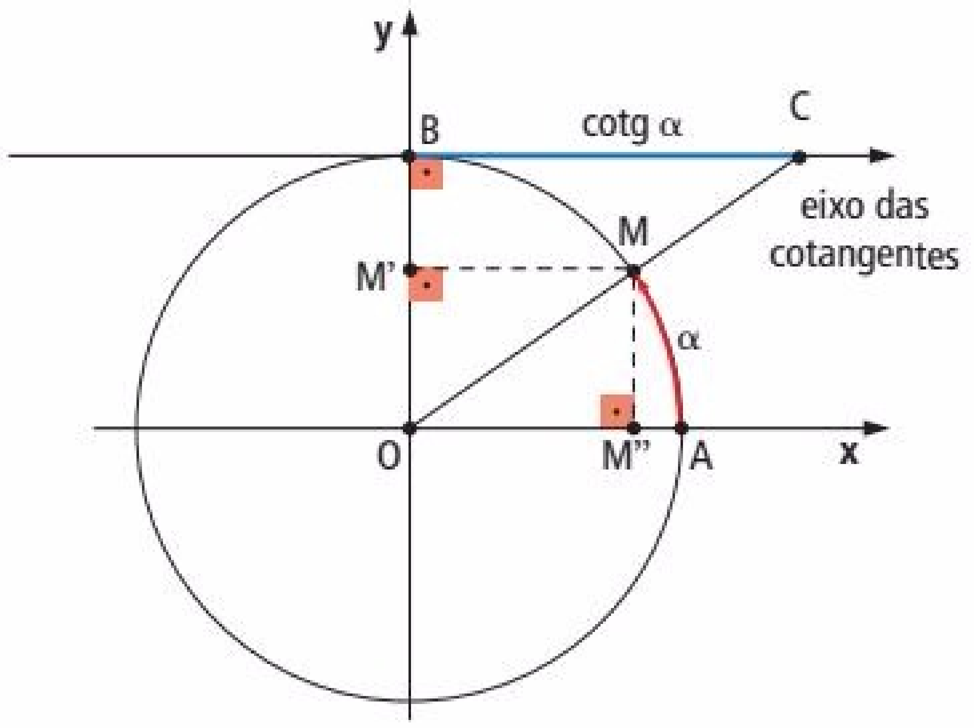
53. (PUC-SP) Sendo $\cos x = \frac{1}{m}$ e $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$, determine *m*. 2 ou −1

54. (Fuvest-SP) Se $\text{tg}\,x = \frac{3}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de $y = \cos x - \text{sen}\,x$. $-\frac{1}{5}$

Cotangente de um arco

Considere na circunferência trigonométrica abaixo o arco AM de medida algébrica α.

Tomemos o eixo tangente a essa circunferência no ponto *B* e paralelo ao eixo dos cossenos. Esse eixo é chamado **eixo das cotangentes**.



Ilustrações: Editoria de arte

Seja *C* o ponto de intersecção da reta OM com o eixo das cotangentes.

Define-se como cotangente de α a abscissa do ponto *C*. Indica-se: cotg α.

Como o eixo das cotangentes é paralelo ao eixo dos cossenos, considerando BC como a medida algébrica do segmento de reta BC, podemos escrever:

$$\text{cotg}\,\alpha = \text{BC}$$

Na figura anterior, os triângulos retângulos OM″M e CBO são semelhantes. Daí: $\dfrac{\text{OM}''}{\text{CB}} = \dfrac{\text{MM}''}{\text{BO}}$.

Como OM′ = M″M, escrevemos: $\dfrac{\text{OM}''}{\text{CB}} = \dfrac{\text{MM}''}{\text{BO}} \Rightarrow \dfrac{\cos\alpha}{\text{CB}} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{1} \Rightarrow \text{CB} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

Logo: $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$, com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$.

Podemos escrever também: $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow$ $\boxed{\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}\text{, com tg}\,\alpha \neq 0}$

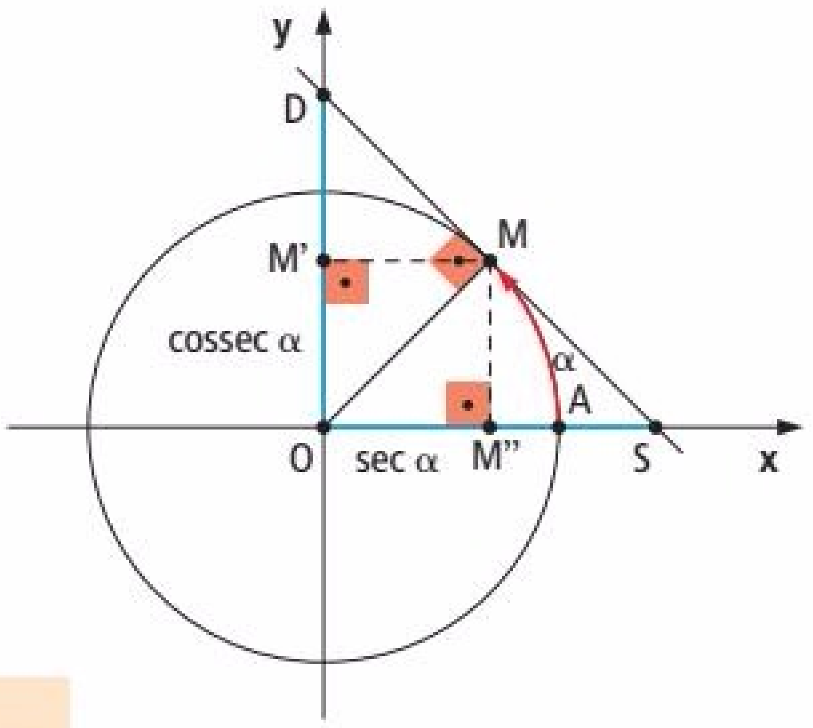
Secante e cossecante de um arco

Considere na circunferência trigonométrica ao lado o arco AM de medida algébrica α.

Traça-se uma reta tangente à circunferência pelo ponto *M*, cuja intersecção com o eixo dos cossenos é o ponto *S* e com o eixo dos senos é o ponto *D*.

Define-se:

- cossecante de α é a ordenada do ponto *D*. Indica-se: cossec α.
- secante de α é a abscissa do ponto *S*. Indica-se: sec α.



Observe duas relações trigonométricas importantes deduzidas com base na semelhança dos triângulos retângulos:

- OMS e OM″M: $\dfrac{\text{OS}}{\text{OM}} = \dfrac{\text{OM}}{\text{OM}''} \Rightarrow \text{OS} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow$ $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}\text{, com }\cos\alpha \neq 0}$
- OMD e OM′M: $\dfrac{\text{OD}}{\text{OM}} = \dfrac{\text{OM}}{\text{OM}'} \Rightarrow \text{OD} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow$ $\boxed{\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}\text{, com sen}\,\alpha \neq 0}$

As propriedades dos arcos complementares continuam válidas. Observe os exemplos:

- $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cossec}\,\alpha$
- $\text{cossec}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

Exercícios resolvidos

15 Calcule o valor do cossec $(-1\,035°)$.

Resolução

$1035° = 315° + 2 \cdot 360° \Rightarrow -1035° = -315° + 2 \cdot (-360°)$

Como $-315° = 45° - 360°$, temos:

$\text{cossec}\,(-1\,035°) = \text{cossec}\,45° =$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,45°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Logo, $\text{cossec}\,(-1035°) = \sqrt{2}$.

16 Simplifique a expressão $\dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}{\sec\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha}$.

Resolução

$$\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}{\sec\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha} = \frac{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}} = \frac{\frac{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha}{\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}}{\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}}{\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}} = \frac{1}{\cancel{\text{sen}\,\alpha} \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

A expressão dada é equivalente a $\sec\alpha$.

17 Calcule m, de modo que $\sec\alpha = m - 2$ e $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Resolução

Como α pertence ao quarto quadrante, devemos ter $\sec\alpha \geqslant 1$. Logo:

$m - 2 \geqslant 1 \Rightarrow m \geqslant 3$

Portanto, $S = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geqslant 3\}$.

18 Se $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, calcule o valor de A, sabendo que:

$$A = \frac{\text{cossec}\;\alpha - \sec\;\alpha}{\text{cotg}\;\alpha - 1}$$

Resolução

$$A = \frac{\text{cossec}\,\alpha - \sec\alpha}{\text{cotg}\;\alpha - 1} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} - 1} =$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}} = \frac{\cancel{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}}{\cancel{\text{sen}\,\alpha} \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}{\cancel{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Substituindo $\cos\alpha$ por $\dfrac{1}{4}$, temos: $A = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

55. Em que quadrante está o número α sabendo que:

a) $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\text{cotg}\,\alpha > 0$ 3º Q

b) $\sec\alpha < 0$ e $\text{tg}\,\alpha > 0$ 3º Q

c) $\text{cossec}\,\alpha > 0$ e $\text{cotg}\,\alpha < 0$ 2º Q

56. Determine o valor de:

a) cotg 990° 0

b) cotg 1 440° Não existe.

c) cotg (−1 410°) $\sqrt{3}$

d) cotg 12π Não existe.

e) cotg 7π Não existe.

f) $\text{cotg}\,\dfrac{17\pi}{4}$ 1

57. Mostre que:

a) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cotg}\;\alpha$ Demonstração.

b) $\text{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$ Demonstração.

58. Escreva no caderno o valor de:

a) sec 60° 2

b) cossec 30° 2

c) cossec 315° $-\sqrt{2}$

d) sec 540° −1

e) sec (−1 410°) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

f) cossec 13π Não existe.

g) $\text{cossec}\,\dfrac{9\pi}{4}$ $\sqrt{2}$

h) $\text{cossec}\,\dfrac{11\pi}{2}$ −1

59. Considerando $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ e $\sec\alpha = -\sqrt{5}$, calcule $\text{cotg}\,\alpha$. $\dfrac{1}{2}$

60. Calcule os valores de m, de modo que a expressão $\dfrac{2+4m}{3}$ represente a cotangente de um ângulo do terceiro quadrante. $\left\{m \in \mathbb{R} \,\middle|\, m \geqslant -\dfrac{1}{2}\right\}$

61. Ache k, de modo que $\text{cotg}\,\alpha = k^2 - 7k + 10$ e $\alpha \in\,]270°, 360°[$. $\{k \in \mathbb{R} \mid 2 < k < 5\}$

62. Calcule m, de modo que:

a) $\sec\alpha = \dfrac{2m-1}{m}$ e $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ $\left\{m \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < m \leqslant \dfrac{1}{3}\right\}$

b) $\text{cossec}\,\alpha = m^2 + 4m + 1$ e $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\{m \in \mathbb{R} \mid m \leqslant -4 \text{ ou } m \geqslant 0\}$

63. Simplifique as expressões abaixo:

a) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}{\text{cossec}\,\alpha}$ $\sec\alpha$

b) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha}{\sec^2\alpha - 1}$ $\text{cotg}^2\,\alpha$

64. Calcule o valor de z sabendo que $\sec y = z$ e $\text{tg}\,y = z - 1$. 1

65. Expresse o valor de y por meio de uma cossecante

$$y = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$y = \text{cossec}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

66. Comportamentos da natureza podem ser modelados matematicamente. O som apresenta esta característica e suas ondas se propagam com determinada repetitividade, que pode ser interpretada por funções trigonométricas. Música e Matemática estão intrinsecamente relacionadas, como já correlacionavam os estudiosos da Antiguidade. Pitágoras é um dos precursores, sendo atribuída a ele a invenção do monocórdio, instrumento de uma corda, com o qual ele estabeleceu as relações entre frações e o som emitido pelo seu rudimentar instrumento. Leia o texto a seguir a respeito das ondas sonoras e faça o que se pede.

Editoria de arte

Ondas sonoras

Quando o som propaga-se no ar, as ondas sonoras consistem simplesmente numa série de variações de pressão. O diafragma de um microfone pode captar estas variações, movendo-se em resposta às mudanças de pressão. O movimento do diafragma é então convertido num sinal elétrico. Usando um microfone e uma interface – o equalizador – é possível "visualizar" as ondas sonoras.

As três características do som – intensidade, altura e timbre – podem ser vistas, observando o aspecto físico do comportamento da onda: amplitude da onda, que corresponde à intensidade do som; frequência da onda, que corresponde à altura do som; e espectro de frequência da onda, que corresponde ao timbre.

Amplitude

A amplitude da onda corresponde à intensidade do som: a pressão do ar oscila acima e abaixo de um valor médio, que é a pressão do ar na sala onde nos encontramos. O módulo da variação máxima, em relação a esse valor médio, chama-se amplitude da onda de pressão; o seu valor está relacionado com o volume ou intensidade sonora. [...] Para quantizar a intensidade do som, utilizamos uma medida chamada decibel (dB), que é o logaritmo da pressão exercida pela vibração do ar. [...]

Frequência

A frequência da onda corresponde à altura do som: é o número de vezes que a partícula completa seu movimento vibratório e volta a seu estado inicial em uma determinada unidade de tempo. A unidade de frequência mais utilizada é Hertz (Hz), ou número de ciclos por segundo. [...]

Espectro da frequência

O espectro de frequências da onda corresponde ao timbre: raramente um som é composto de uma única frequência, geralmente ele é uma combinação de vibrações em várias frequências diferentes simultaneamente. O espectro de frequências determina quais as frequências que compõem o som, e quais suas intensidades. Interpretamos essa característica como o *timbre do som*, e isso é o que diferencia as fontes sonoras. [...]

Fonte: LINCK, Fábio Gomes. **Música e Matemática**: experiências didáticas em dois diferentes contextos. 2010. Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31592/000782668.pdf?...1>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Veja a seção *Resoluções* do Manual do Professor.

a) A partir da leitura do texto, explique como as ondas sonoras podem ser interpretadas.

b) Qual é a característica do som que nos permite distinguir as diferentes fontes sonoras que ouvimos?

c) A variação de pressão (medida em Pascal – Pa) de uma onda sonora em um determinado instante, em relação à pressão normal do ambiente (sem vibração), pode ser aproximada pela expressão $A \cdot \text{sen}\,(2\pi \cdot t)$, em que *A* corresponde à amplitude máxima da onda e *t*, ao tempo, em segundos.

   i) Se $A = 70$ dB, qual é a variação de pressão após $\frac{1}{4}$ de segundo?

   ii) Qual é a variação de pressão após 1 segundo, mantendo a mesma amplitude?

   iii) Qual é o menor valor que *A* pode assumir?

d) Um dos problemas presentes nas grandes cidades é a poluição sonora. Discuta com os colegas sobre os problemas que essa poluição sonora pode causar.

História da Matemática

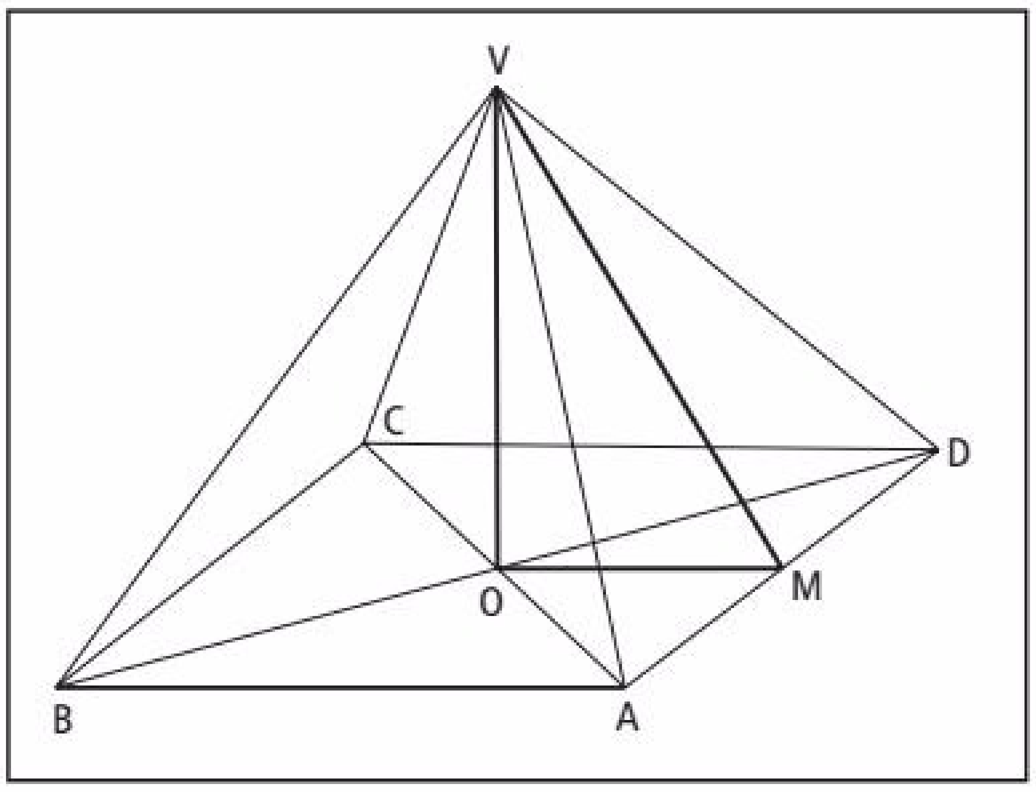
As raízes da Trigonometria

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes.

No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes**, conhecido como Papiro **Rhind**, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.

Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV**.

Exemplo: Seja OV = 40 e OM = 80, então o seqt = $\frac{80}{40}$, isto é: seqt = 2.



Editoria de arte

Figura 1 – O Seqt Egípcio.

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). [...]

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

COSTA, Nielce M. Lobo da. **A História da Trigonometria**.
Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf>.
Acesso em: 29 jan. 2016.

Atividades

Escreva no caderno

1. De acordo com o texto, qual é o documento que traz os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria que surgiram no Egito? O papiro Ahmes, também conhecido como papiro Rhind.

2. Ainda com base no texto, qual era o nome dado pelos egípcios à razão entre afastamento horizontal e elevação vertical da inclinação das faces de uma pirâmide? Qual sua possível equivalência atual?
O nome utilizado era *seqt*. Atualmente, pelo contexto do pergaminho, pensa-se que o *seqt* seja equivalente à cotangente do ângulo OMV (da ilustração do texto).

3. No exemplo apresentado no texto, se o triângulo OMV fosse isósceles, de catetos 100 m, qual seria a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical das faces de uma pirâmide? seqt = $\frac{100}{100}$ = 1.

Explorando a tecnologia

Construção de uma calculadora trigonométrica

A planilha eletrônica é uma ferramenta muito útil em situações matemáticas e cotidianas. Com ela, cálculos recorrentes podem ser feitos rapidamente com a criação de uma fórmula adequada.

Vamos utilizar a planilha eletrônica do Libre Office que pode ser baixada no endereço <https://pt-br.libreoffice.org/> (acesso em: 30 mar. 2016).

No capítulo 12 do volume 1 desta coleção, estudamos as razões trigonométricas no triângulo retângulo e a tabela de razões trigonométricas dos ângulos agudos foi apresentada. Outra maneira de obter esses valores é realizar os cálculos em uma calculadora científica. Agora, vamos utilizar a planilha eletrônica para criar a nossa própria calculadora trigonométrica, ou seja, uma planilha que calcula automaticamente os valores das razões trigonométricas para qualquer medida de ângulo.

A vantagem de obter uma calculadora trigonométrica é que ela não fica restrita aos ângulos agudos nem às razões seno, cosseno e tangente. Nela poderemos determinar, também, os valores para as razões secante, cossecante e cotangente em toda a circunferência trigonométrica.

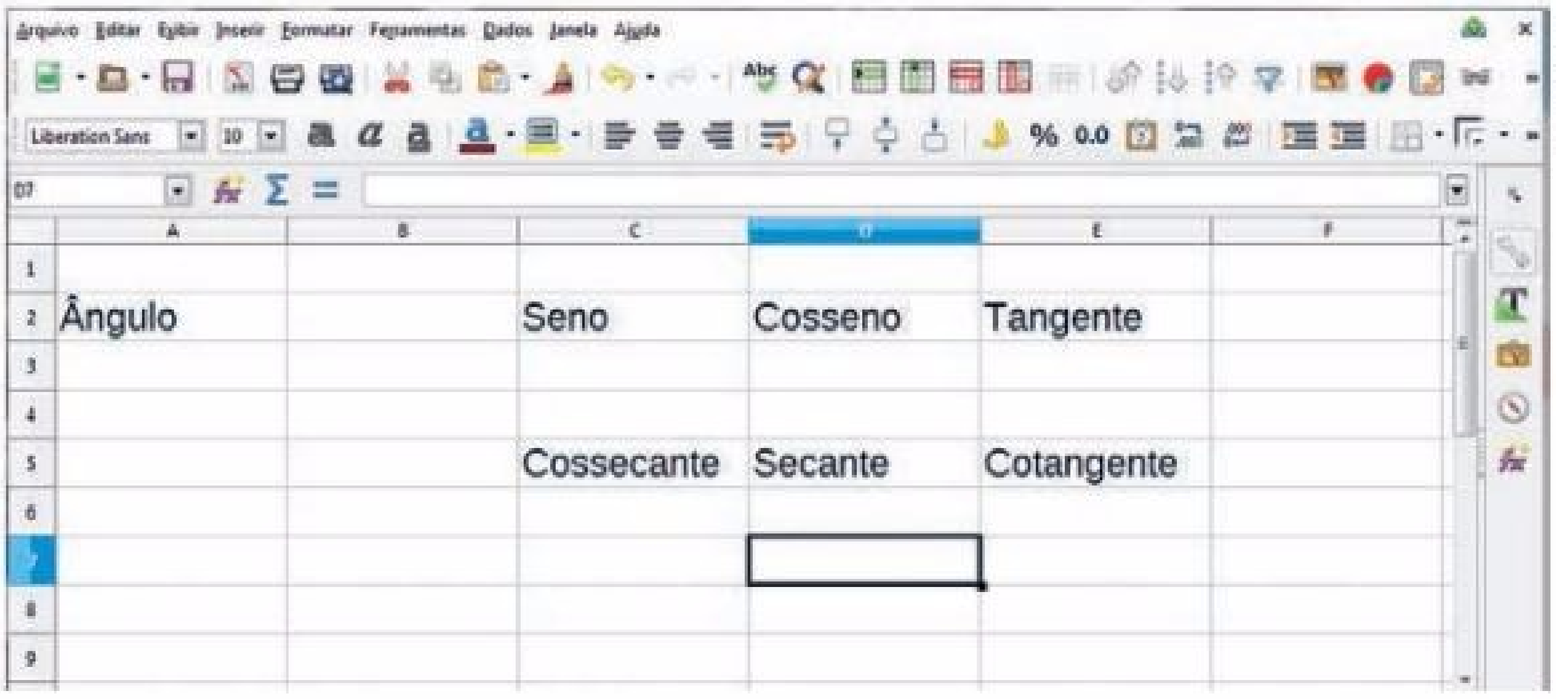
Para isso, siga a sequência de passos abaixo.

1. Abra uma planilha no Libre Office e salve-a como "CALCTRIGONOMETRICA".

2. Na planilha, para identificar cada uma das razões trigonométricas, digite cada palavra em uma célula, conforme indicado a seguir.

- Na célula A2: Ângulo;
- Na célula C2: Seno;
- Na célula D2: Cosseno;
- Na célula E2: Tangente;
- Na célula C5: Cossecante;
- Na célula D5: Secante;
- Na célula E5: Cotangente.

Ao final, sua planilha estará semelhante à imagem abaixo:


Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda
Liberation Sans
10
D7

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Ângulo		Seno	Cosseno	Tangente	
3						
4						
5			Cossecante	Secante	Cotangente	
6						
7						
8						
9						

Libre Office

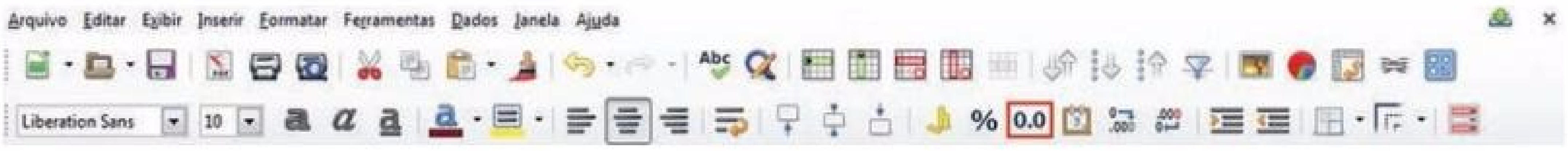
3. A célula A3 será reservada para a digitação do valor do ângulo a ser calculado e as células C3, D3, E3, C6, D6 e E6 serão reservadas para apresentar os resultados do seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente, respectivamente.

Em uma planilha eletrônica, o cálculo das razões trigonométricas é feito com ângulos cuja unidade é o radiano. Porém, para facilitar nosso trabalho, vamos digitar o ângulo em grau e utilizaremos uma função para que o programa realize a transformação de unidade.

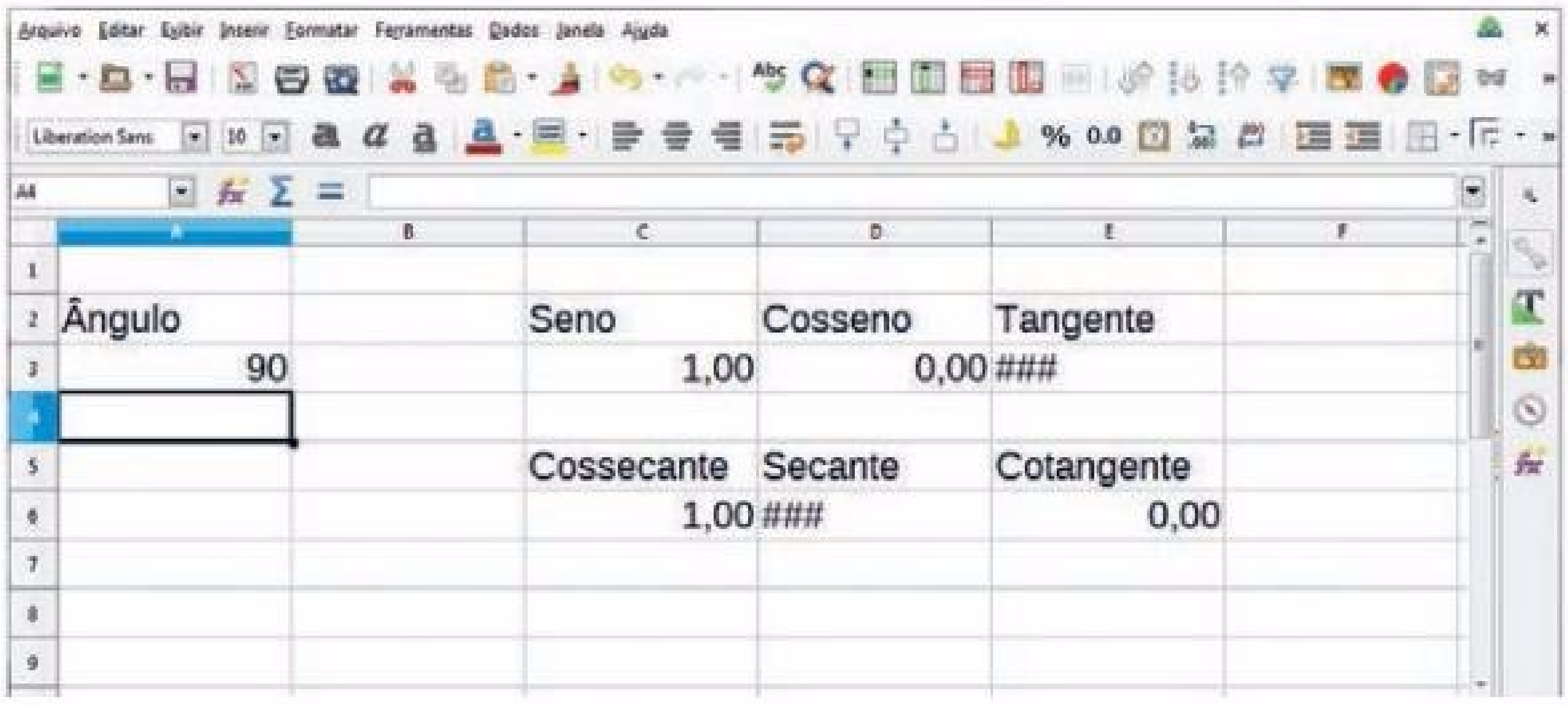
A função que vai realizar esse trabalho é **Radianos()** e, como digitaremos o valor do ângulo na célula A3, devemos utilizar em nossa fórmula a expressão **Radianos(A3)** que nos fornecerá o valor do ângulo digitado na célula A3 em radiano.

4. Na célula C3, que apresentará o valor do seno, devemos digitar a fórmula '**=SEN(Radianos(A3))**', na célula D3, que apresentará o valor do cosseno, devemos digitar '**=COS(Radianos(A3))**' e assim por diante. Lembrando que a função tangente é indicada por **TAN()** na planilha eletrônica, a cossecante por **COSEC()**, a secante por **SEC()** e a cotangente por **COT()**.

5. Para facilitar nossa leitura, vamos trabalhar com duas casas decimais. Para isso, devemos formatar as células C3, D3, E3, C6, D6 e E6 utilizando o recurso "Formatar como número" destacado na imagem abaixo. Também é possível ativar o recurso utilizando o atalho 'Ctrl+Shift+1'.


Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda
Liberation Sans
10
%
0.0

6. Agora, basta inserir o valor do ângulo desejado na célula A3 para obter os valores das razões trigonométricas. A imagem abaixo mostra o exemplo para o ângulo de 90°.


Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda
Liberation Sans
10
A4

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Ângulo		Seno	Cosseno	Tangente	
3	90		1,00	0,00	###	
4						
5			Cossecante	Secante	Cotangente	
6			1,00	###	0,00	
7						
8						
9						

Crédito das imagens: Libre Office

Atividades

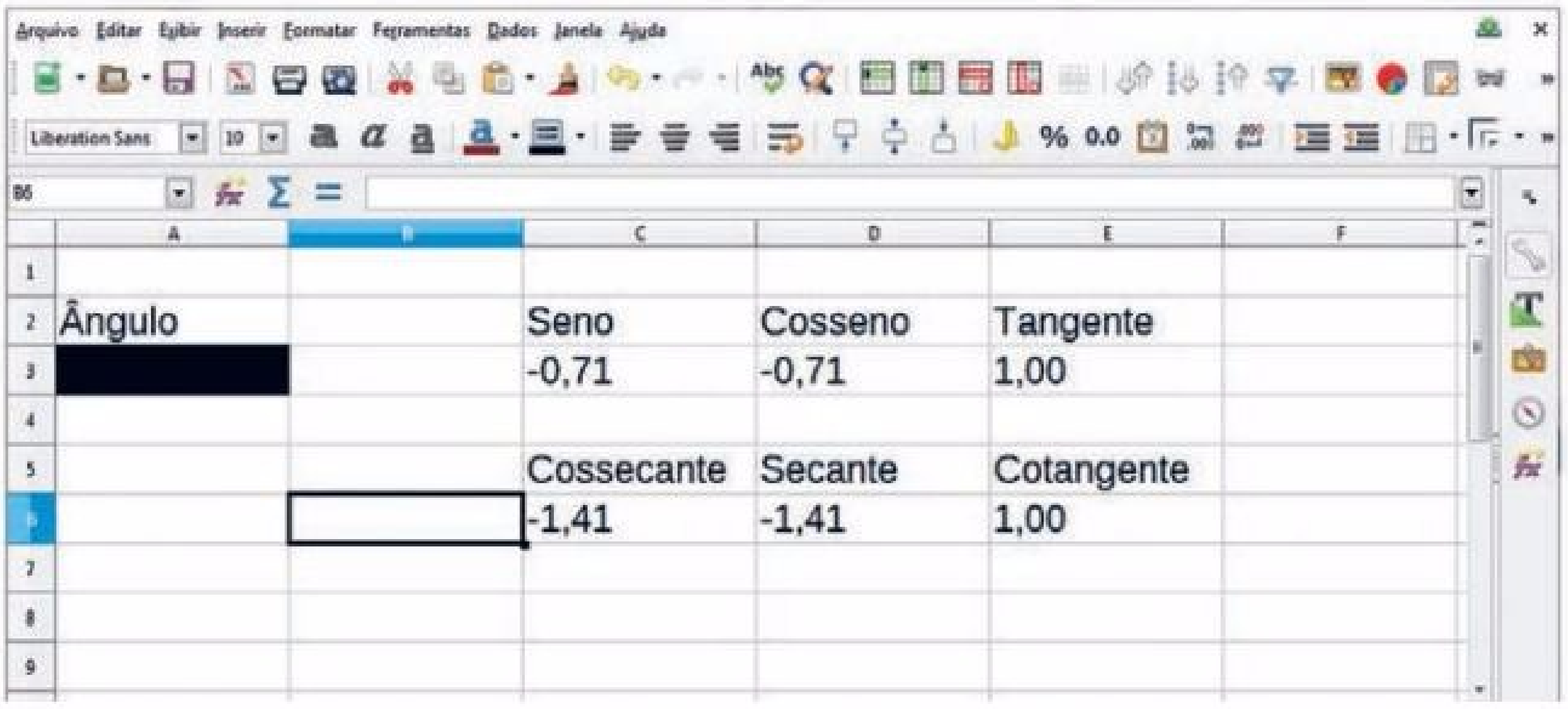
Escreva no caderno

1. Para o ângulo de 90°, a tangente e a secante não estão definidas, pois o cosseno desse ângulo é nulo e ambas as razões são calculadas com o valor do cosseno no denominador. O mesmo ocorre para o ângulo de 270°.

1. No exemplo apresentado, a calculadora não mostrou os valores para tangente e para secante de 90°. Explique por que isso ocorre. A partir disso, o que podemos afirmar a respeito dos valores dessas razões para o ângulo de 270°?

2. Podemos observar que o valor do seno e cosseno são negativos, portanto o ângulo pertence ao 3º quadrante.

2. Observando os valores obtidos para as razões trigonométricas na imagem abaixo, determine em qual quadrante se encontra o ângulo utilizado na calculadora.


Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda
Liberation Sans
10
B6

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Ângulo		Seno	Cosseno	Tangente	
3	[redacted]		-0,71	-0,71	1,00	
4						
5			Cossecante	Secante	Cotangente	
6			-1,41	-1,41	1,00	
7						
8						
9						

Não é possível. Uma vez que a cossecante é o inverso do seno, para a cossecante assumir o valor 0,5 significa que o valor do seno deveria ser 2 (inverso de meio) que é um absurdo, pois o seno assume valores entre −1 e 1.

3. É possível que a cossecante de determinado ângulo seja igual a 0,5? Justifique sua resposta.

CAPÍTULO 2

Funções trigonométricas

prudkov/Shutterstock.com

O pêndulo do relógio realiza um movimento periódico.

Um pêndulo, como o do relógio da figura ao lado, realiza um movimento de vai e vem, sempre em uma mesma direção, alternando os sentidos regularmente. Esse movimento é denominado **movimento oscilatório**. Os fenômenos que se repetem sempre em um mesmo intervalo de tempo, como é o caso do pêndulo, são chamados de **fenômenos periódicos** e podem ser modelados por **funções periódicas**.

Matematicamente, uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existe um número real positivo *p*, tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo *x* do domínio de *f*. Ou seja, a função se repete a cada intervalo determinado.

Um dos principais tipos de funções periódicas são as **funções trigonométricas**, que estudaremos neste capítulo.

Função seno

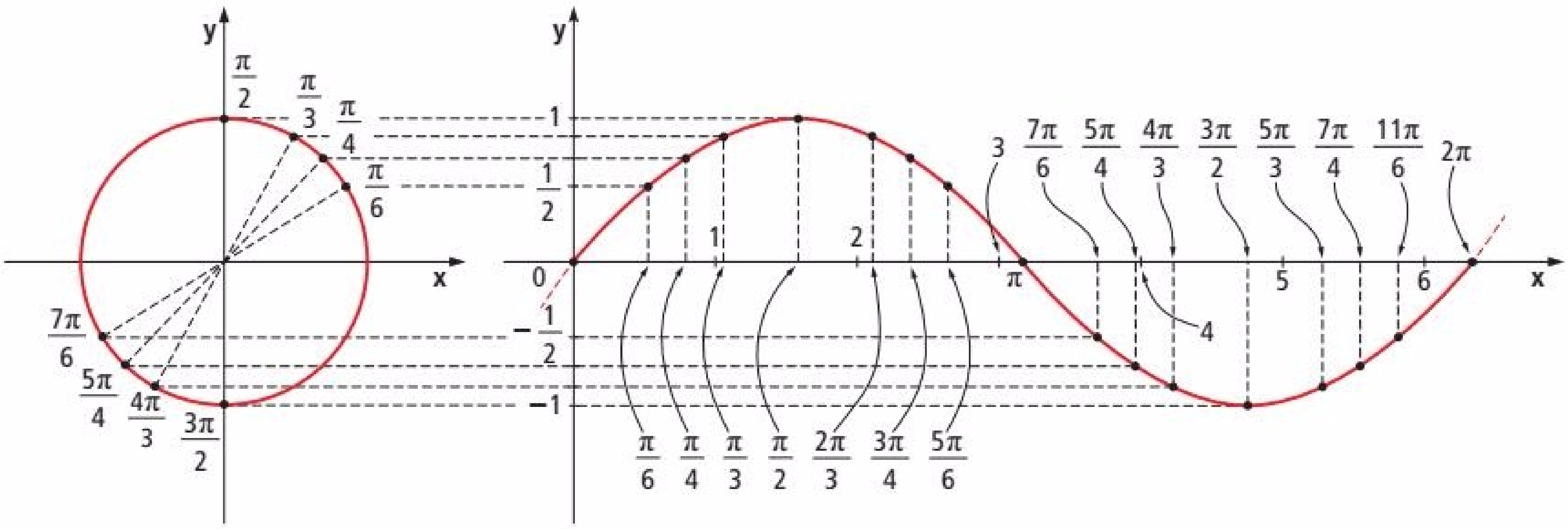
Denomina-se **função seno** a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real *x* o número real sen x, ou seja, y = sen x ou f(x) = sen x.

O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico da função seno

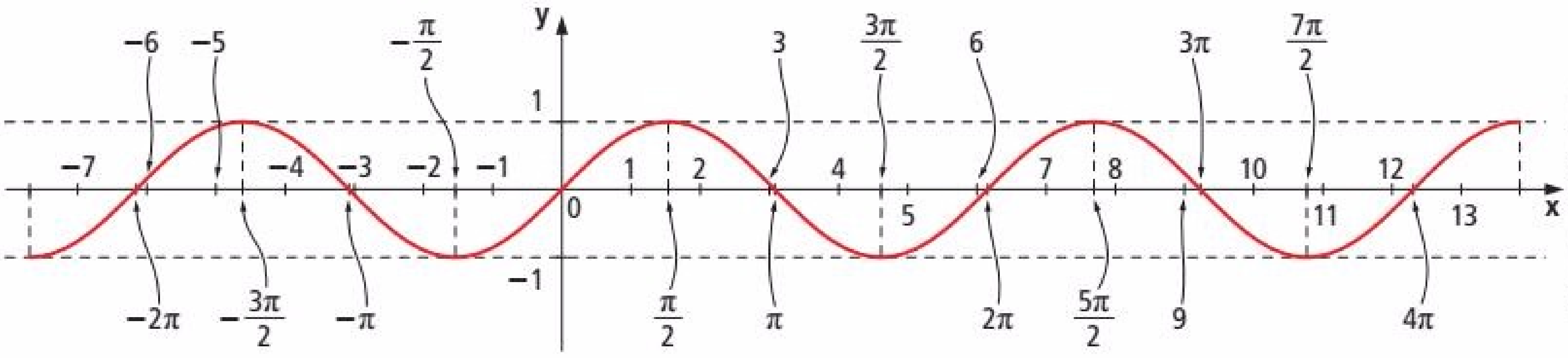
Para estudar a função seno, vamos tomar alguns valores de *x* no intervalo $[0, 2\pi]$ e obter alguns pontos (x, y) no plano para construir seu gráfico.

No capítulo anterior, estudamos os valores de sen x para qualquer valor real de *x* na circunferência trigonométrica. Assim, para obter alguns pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função dada por f(x) = sen x, vamos utilizar esses valores já calculados na circunferência trigonométrica para $x \in [0, 2\pi]$. Assim:



Editoria de arte

Como o domínio da função seno é o conjunto dos números reais, a curva pode ser estendida para valores de *x* menores que zero e maiores que 2π. Assim, obtemos a curva a seguir, que é o gráfico de $y = \text{sen } x$.



Ilustrações: Editoria de arte

Chamamos de **senoide** a curva descrita pela função seno.

Observe o que ocorre com a função $y = \text{sen } x$ no intervalo $[0, 2\pi]$:

- de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função cresce, variando de 0 a 1;
- de $\frac{\pi}{2}$ a π, decresce de 1 a 0;
- de π a $\frac{3\pi}{2}$, decresce de 0 a -1;
- de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, cresce de -1 a 0.

O conjunto imagem da função $y = \text{sen } x$ é o intervalo $[-1, 1]$, isto é: $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.

Ao observar o gráfico da função seno, percebemos que ela se repete periodicamente, como é característico das funções periódicas. Nesse caso, a função se repete a cada intervalo de 2π, ou seja, nos intervalos $[-4\pi, -2\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$ etc. Além disso, observamos que:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \ldots = \text{sen } (x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

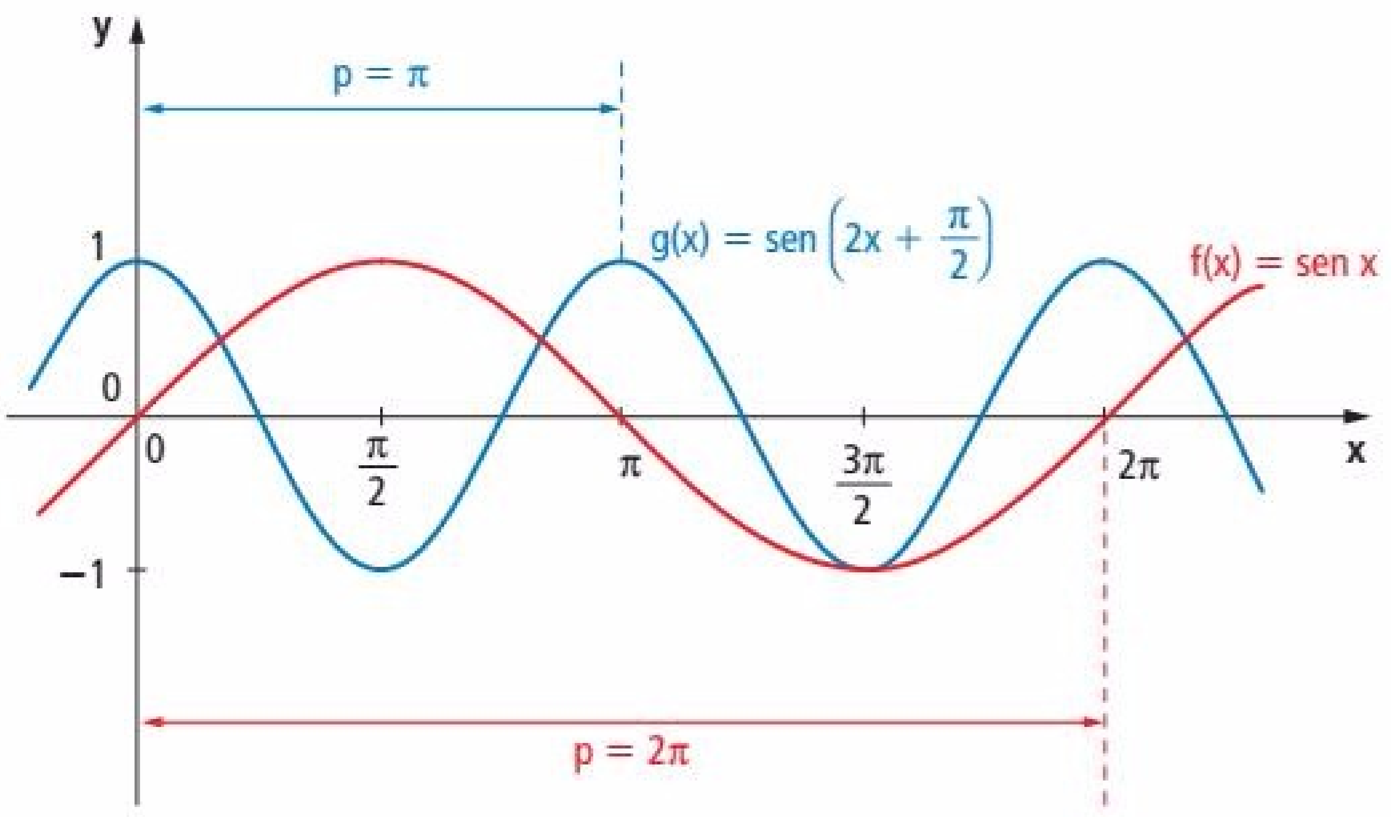
Ou seja, $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$. O menor número *p* é denominado **período** da função *f*. Para a função $f(x) = \text{sen } x$, o período é $p = 2\pi$.

Agora, vamos determinar o período da função $g(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. O período dessa função é o tamanho do intervalo ao qual pertence *x* quando $\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ assume valores em um intervalo de tamanho 2π, pois o período da função $f(x) = \text{sen } x$ é 2π. Assim, vamos determinar x_1 e x_2 tais que: $\left(2x_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\left(2x_2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. De $2x_1 + \frac{\pi}{2} = 0$, obtemos $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ e de $2x_2 + \frac{\pi}{2} = 2\pi$, obtemos $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Assim, temos:

$$p = |x_2 - x_1| = \left|\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{4\pi}{4}\right| = \pi$$

Portanto, o período da função $g(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ é $p = \pi$.

De fato, ao compararmos os gráficos de *f* e *g*, identificamos os respectivos períodos. Veja:



De modo geral, o período p de uma função dada por $y = \text{sen}(cx + d)$, com c e d reais, é $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$. Seguindo o raciocínio análogo ao do exemplo, temos que determinar x_1 e x_2 tais que: $(cx_1 + d) = 0$ e $(cx_2 + d) = 2\pi$. Assim, temos:

$$cx_1 + d = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{d}{c}$$

$$cx_2 + d = 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi - d}{c}$$

$$p = |x_2 - x_1| = \left|\frac{2\pi - d}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right)\right| = \left|\frac{2\pi}{c}\right| \Rightarrow \boxed{p = \frac{2\pi}{|c|}}$$

Exercícios resolvidos

1 Construa o gráfico das funções dadas por $f(x) = \text{sen}\,2x$ e $g(x) = \text{sen}\,\dfrac{x}{2}$, comparando-os com o gráfico da função dada por $h(x) = \text{sen}\,x$.

Resolução

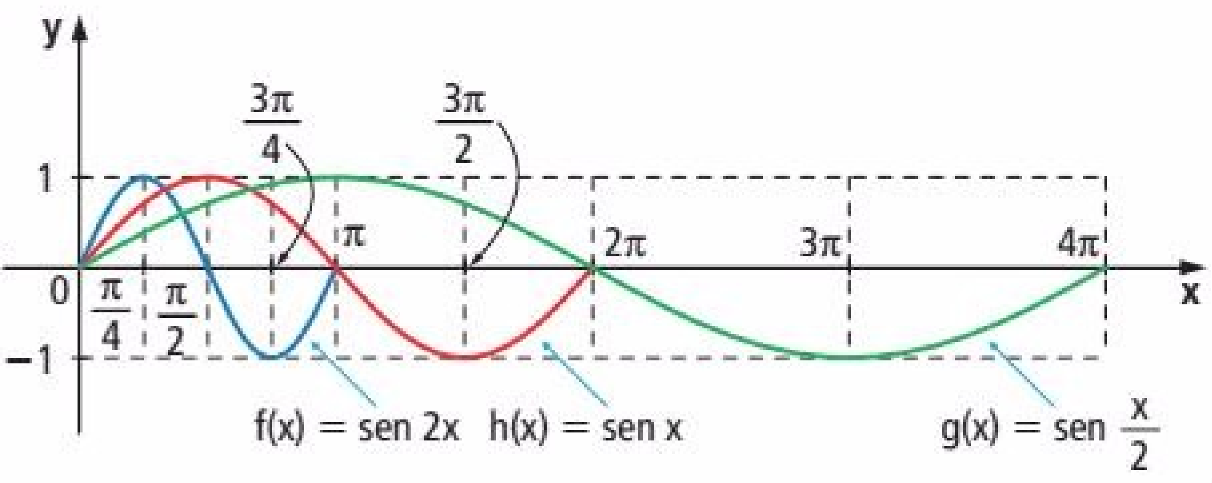
Como conhecemos o gráfico de $y = \text{sen}\,x$, podemos construir as tabelas e esboçar os três gráficos em um só sistema de eixos coordenados para compará-los.

$y = \text{sen}\,2x$		
$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

$y = \text{sen}\,x$	
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

$y = \text{sen}\,\frac{x}{2}$		
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-1
2π	4π	0

Para facilitar a comparação, os gráficos foram construídos com apenas um período completo de cada uma das funções.



Ilustrações: Editoria de arte

Observando os gráficos, verificamos que as funções $f(x) = \text{sen}\,2x$ e $g(x) = \text{sen}\,\dfrac{x}{2}$ têm o mesmo conjunto imagem: $[-1, 1]$; e o período de f é π, e o de g é 4π.

2 Determine k para que exista x tal que $\text{sen}\,x = 2k - 5$.

Resolução

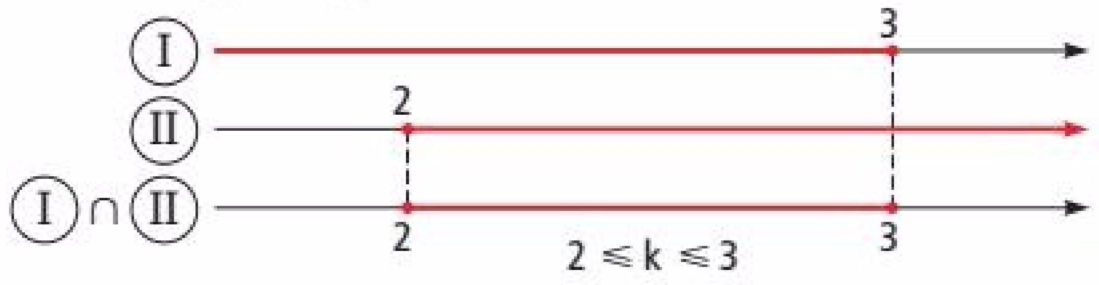
Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1$. Substituindo $\text{sen}\,x$ por $2k - 5$, temos:

$$\overbrace{-1 \leqslant \rlap{$\underbrace{}_{\text{(I)}}$}2k - 5}^{\text{(II)}} \leqslant 1$$

(I) $2k - 5 \leqslant 1$
$2k \leqslant 6$
$k \leqslant 3$

(II) $2k - 5 \geqslant -1$
$2k \geqslant 4$
$k \geqslant 2$

Fazendo (I) $\cap$ (II):



Logo, $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant k \leqslant 3\}$.

3 Quais são os valores máximo e mínimo que a função $y = 3 + \text{sen}\,5x$ pode assumir?

Resolução

A função seno tem valor máximo 1 e valor mínimo −1. Então, os valores máximo e mínimo da função $y = 3 + \text{sen}\,5x$ são:

- valor máximo: $y = 3 + 1 = 4$;
- valor mínimo: $y = 3 - 1 = 2$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Esboce o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período das seguintes funções: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $y = 3\,\text{sen}\,x$

b) $y = 2 - \text{sen}\,x$

c) $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$

2. Determine e escreva no caderno o período das funções:

a) $y = \text{sen}\,8x$ $p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 5 \cdot \text{sen}\,10x$ $p = \frac{\pi}{5}$

3. Qual é a imagem da função dada por $f(x) = 7 \cdot \text{sen}\,(3x)$? $\text{Im} = [-7, 7]$

4. Determine o período das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = -4\text{sen}\left(6x - \frac{\pi}{8}\right)$ $p = \frac{\pi}{3}$

b) $f(x) = 1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ $p = 8$

5. Escreva no caderno os valores máximo e mínimo que cada uma das expressões a seguir pode assumir.

a) $4 \cdot \text{sen}\,\alpha$ Valor máximo: 4; valor mínimo: -4

b) $5 - 2 \cdot \text{sen}\,x$ Valor máximo: 7; valor mínimo: 3

c) $\frac{1}{3 + \text{sen}\,y}$ Valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$

6. Calcule os valores reais de *m*, de modo que $\text{sen}\,x = 2m - 1$. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq m \leq 1\}$

7. (Cefet-PR) Sejam as funções $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\,(x)$ e $g(x) = \text{sen}\,(2x)$. A respeito delas, pode-se afirmar que:

[✓ a) O período de f(x) é o dobro do período de g(x).]

b) As funções f(x) e g(x) possuem os mesmos zeros.

c) O máximo de f(x) é igual ao máximo de g(x).

d) O máximo de g(x) é o dobro do máximo de f(x).

e) O período de g(x) é o dobro do período de f(x).

8. (UFPR) O período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$

[✓ b) π]

c) $\frac{\pi}{4}$

d) 2π

e) $\frac{\pi}{8}$

9. Determine o valor de *k* para que exista o arco que satisfaz a igualdade $\text{sen}\,x = \frac{5k - 2}{k - 3}$. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6}\right\}$

10. (UFV-MG) Para a existência da expressão $\text{sen}\,\theta = \frac{2x - 1}{3}$, os valores de *x* estão compreendidos no intervalo:

a) $-1 \leq x < 1$

b) $-1 < x \leq 0$

c) $-1 \leq x < \frac{1}{3}$

[✓ d) $-1 \leq x \leq 2$]

11. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800 \cdot \text{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$, em que f(x) é o número de clientes e *x*, a hora da observação (*x* é um inteiro, tal que $0 \leq x \leq 24$).

Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:

a) 600

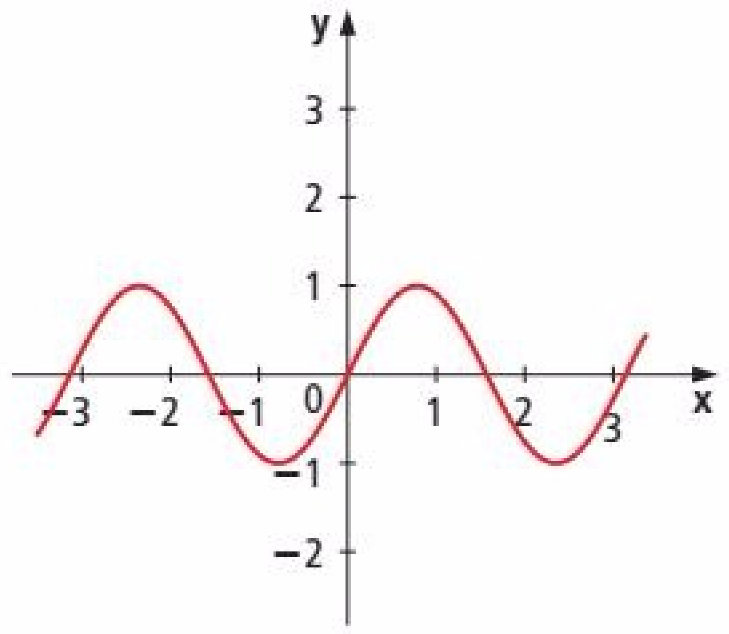
b) 800

c) 900

d) 1 500

[✓ e) 1 600]

12. (Unimep-SP) Qual função se ajusta à curva abaixo?



Editoria de arte

a) $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $y = 2\text{sen}\,(x)$

[✓ c) $y = \text{sen}\,(2x)$]

d) $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

e) $y = 2 + \text{sen}\,(x)$

13. (UFES) Considere que V(t), volume de ar nos pulmões de um ser humano adulto, em litro, varia de no mínimo 2 litros a no máximo 4 litros, sendo *t* a variável tempo, em segundo. Dentre as funções abaixo, a que melhor descreve V(t) é:

a) $2 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

b) $4 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

c) $5 + 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

d) $1 + 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

[✓ e) $3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$]

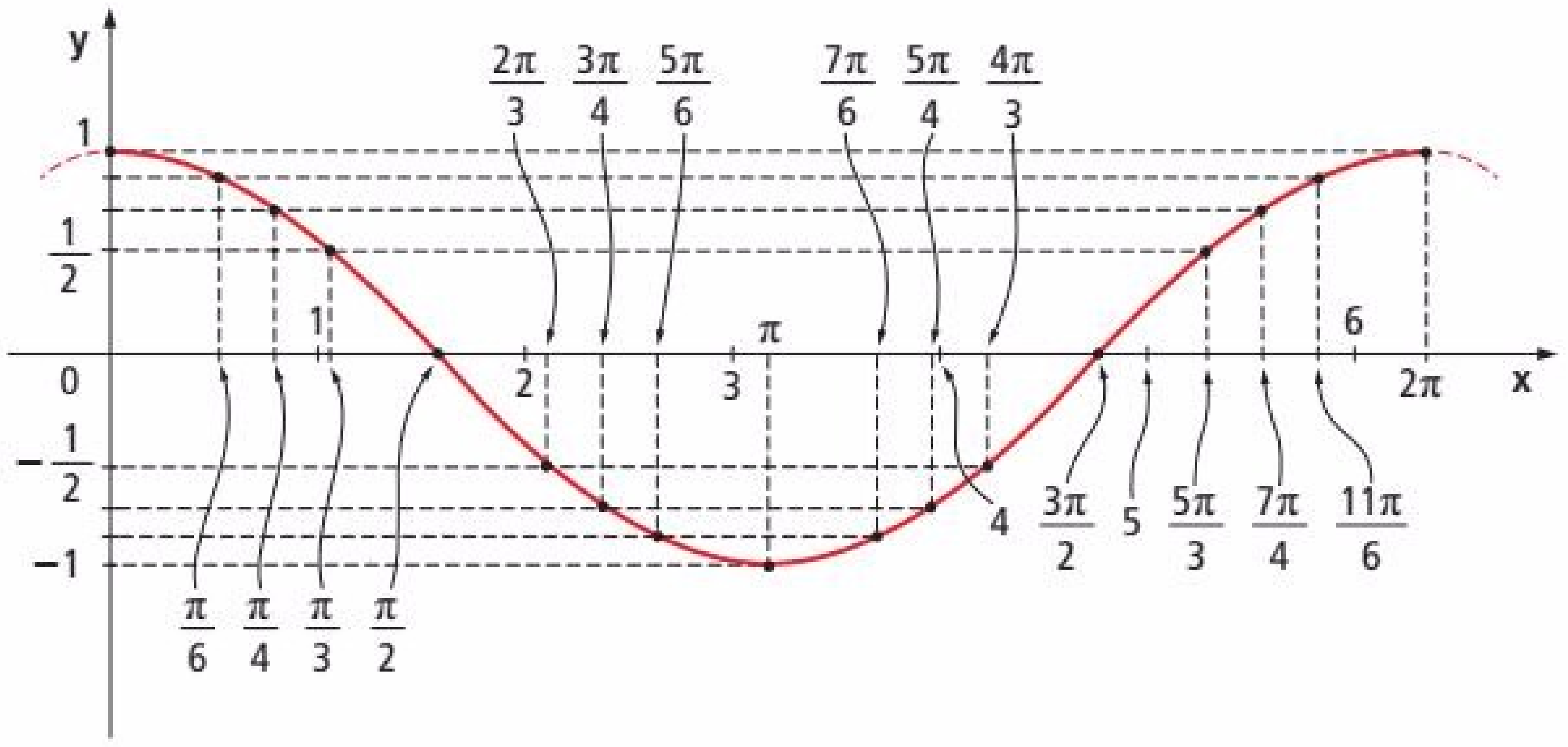
Função cosseno

Denomina-se **função cosseno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real *x* o número real cos x, ou seja, f(x) = y = cos x.

O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, D(f) = $\mathbb{R}$ e CD(f) = $\mathbb{R}$.

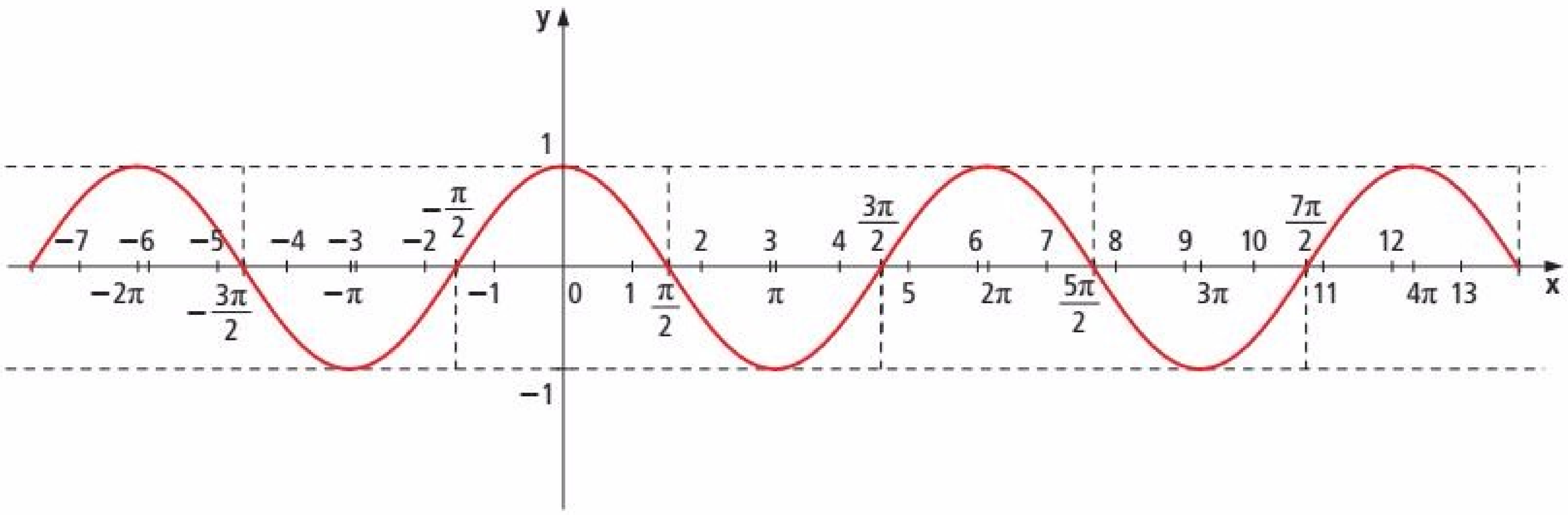
Gráfico da função cosseno

Assim como fizemos para traçar o gráfico da função seno, vamos utilizar os valores de cos x para $x \in [0, 2\pi]$, já conhecidos da circunferência trigonométrica, para obter alguns pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função dada por f(x) = cos x. Assim:



Ilustrações: Editoria de arte

Como o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, a curva pode ser estendida para valores de *x* menores que zero e maiores que 2π. Assim, obtemos a curva a seguir, que é o gráfico de y = cos x.



Observe o que ocorre com a função y = cos x no intervalo [0, 2π]:

- de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função decresce, variando de 1 a 0;
- de $\frac{\pi}{2}$ a π, decresce de 0 a −1;
- de π a $\frac{3\pi}{2}$, cresce de −1 a 0;
- de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, cresce de 0 a 1.

O conjunto imagem da função y = cos x é o intervalo [−1, 1], isto é: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Assim como no caso da função seno, a função cosseno também é periódica e se repete a cada intervalo de 2π, como por exemplo nos intervalos [−2π, 0], [0, 2π] e [2π, 4π]. Além disso, observando o gráfico, percebemos que:

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots = \cos(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, utilizando raciocínio análogo ao utilizado para determinar o período da função seno, podemos concluir que o período *p* de uma função dada por y = cos (cx + d), com *c* e *d* reais, é $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

Por exemplo, para a função $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$, o período é $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$.

No capítulo anterior, vimos que o seno do complementar de um arco é igual ao cosseno desse arco, ou seja: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Essa relação continua válida para as funções trigonométricas, ou seja, o cosseno de um número real *x* é igual ao seno de $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Vimos que $\text{sen } z = \text{sen }(z + 2k\pi)$, para $k \in \mathbb{Z}$, pois o período da função seno é 2π. Fazendo $z = \frac{\pi}{2} - x$ e $k = -1$, temos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi\right) = \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left[-\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right]$$

No capítulo anterior, vimos que $\text{sen }(-z) = -\text{sen } z$. Então:

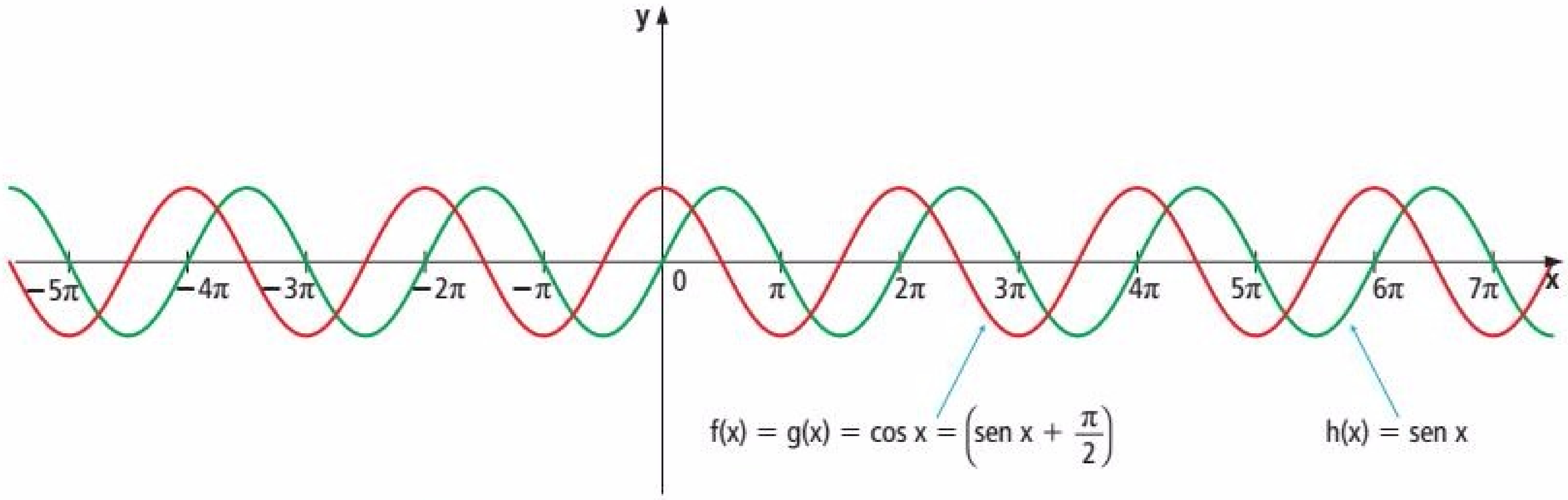
$$\text{sen}\left[-\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right] = -\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\text{sen}\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]$$

Mas $\text{sen }(\pi + z) = -\text{sen } z$. Então:

$$-\text{sen}\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Logo, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Mas como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, então $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Isso significa que os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ são coincidentes, ou seja, o gráfico de f(x) é congruente ao gráfico de $h(x) = \text{sen } x$, apenas transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades, como mostra a imagem abaixo.



Editoria de arte

Exercício resolvido

4 Em certas espécies em perfeito equilíbrio ecológico, a variação no tamanho de sua população é periódica. Esse período depende de condições ambientais, como a quantidade de predadores e a quantidade de alimento disponível, entre outros fatores. Em uma ilha, a população *P* de certa espécie animal é dada pela função:

$$P(t) = 500 + 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

em que *t* corresponde aos meses do ano (t = 1 correspondendo a janeiro).

a) Esboce o gráfico da função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, determinando o período dessa função.

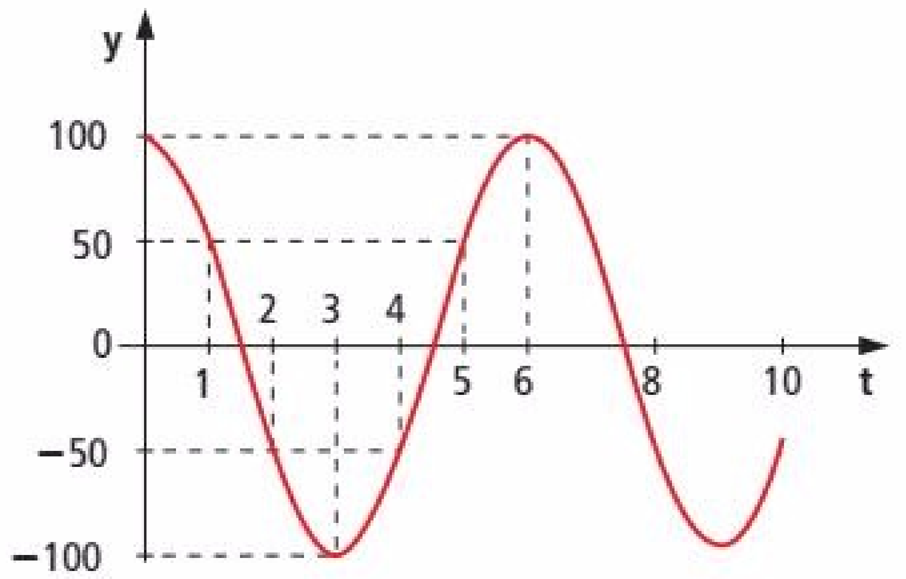
b) Esboce o gráfico de *P* em função de *t* para a população dessa espécie animal, determinando o intervalo de variação dessa população no ano.

Resolução

a) Construindo uma tabela para alguns valores de *t* na função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, temos:

t	$\frac{\pi t}{3}$	$\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
0	0	1	100
1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	50
2	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−50
3	π	−1	−100
4	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−50
5	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	50
6	2π	1	100

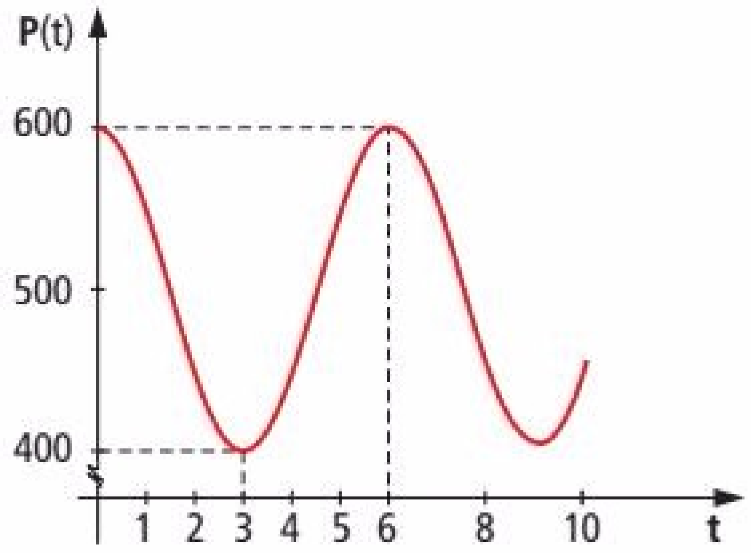
Esboçando o gráfico:



$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$$

O período dessa função é $p = 6$.

b) A função $P(t) = 500 + 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ tem o gráfico parecido com o gráfico de $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, mas deslocando cada ponto 500 unidades para cima no eixo vertical.



Ilustrações: Editoria de arte

Para $t = 3$, temos: $y = -100$ e $P(t) = 400$

Para $t = 6$, temos: $y = 100$ e $P(t) = 600$

A variação da população corresponde ao conjunto imagem da função *P*, ou seja:

$Im = [400, 600]$

A população dessa espécie varia entre 400 e 600 animais.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

14. Esboce, em um período, o gráfico das seguintes funções:

a) $y = -\cos x$

b) $y = 3 \cos \frac{x}{2}$ Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

c) $y = 5 + \cos x$

d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

15. Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + |\cos x|$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

16. Determine o período das funções a seguir:

a) $y = \cos 8x$ $p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 5 \cos 10x$ $p = \frac{\pi}{5}$

c) $y = \cos \frac{4x}{7}$ $p = \frac{7\pi}{2}$

d) $y = 6 \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$ $p = 8\pi$

17. Calcule o valor de *m* para que o período da função $f(x) = 1 + \cos(4mx)$ seja igual a $\frac{\pi}{8}$. $m = 4$

18. Quais são os valores máximo e mínimo que cada uma das expressões a seguir pode assumir?

a) $4 \cos \alpha$ Valor máximo: 4; valor mínimo: −4

b) $5 - 2 \cos x$ Valor máximo: 7; valor mínimo: 3

c) $\frac{1}{3 + \cos y}$ Valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$

19. Qual é o maior valor que a expressão $\frac{10}{3 + \cos x}$ pode assumir? 5

20. Determine os valores do parâmetro real *m*, de modo que a igualdade seguinte seja possível:

$\cos x = m^2 - 1$ e *x* no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant m \leqslant \sqrt{2}\}$

21. Calcule o valor real de *m*, de modo que $\cos x = m^2 + 2m + 1$. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant m \leqslant 0\}$

22. Determine o período das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = \cos\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right)$ $p = 5\pi$

b) $f(x) = -1 + 6\cos\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$ $p = \pi$

23. Considere a função $f(x) = A \cdot \cos(Bx)$, em que *A* e *B* são constantes, $0 < B < \frac{\pi}{2}$ e $A \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(0) = 20$ e $f(1) = 10$, calcule o valor de $f(3)$. $f(3) = -20$

24. Sejam as funções *f* e *g* dadas por $f(x) = 2^{\cos x}$ e $g(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$.

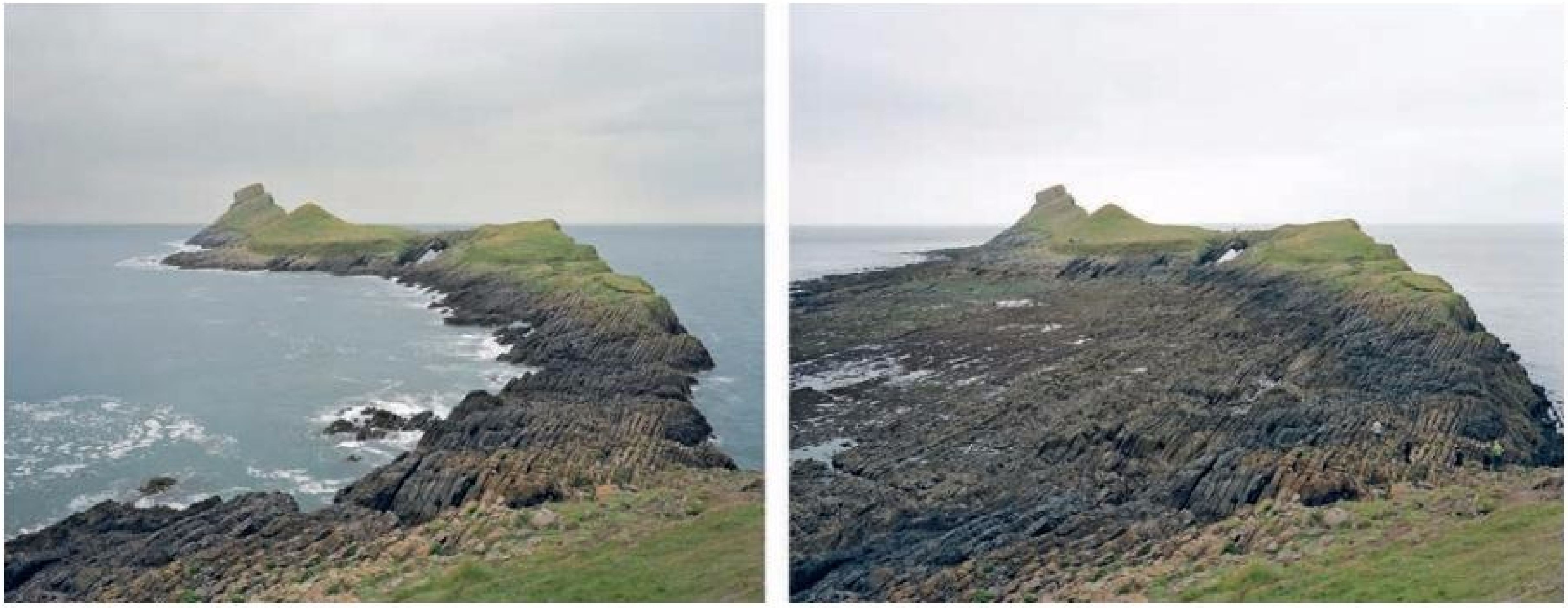
a) Calcule $f(\pi) \cdot g(\pi)$. $\frac{1}{2}$

b) Compare os valores $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Movimento das marés

25. O movimento dos mares e sua relação com os ciclos lunares sempre despertou a curiosidade das pessoas. O movimento cíclico das marés se relaciona ao comportamento de funções trigonométricas. Leia o texto a seguir sobre esse assunto e faça o que se pede.

Marés


http://www.michaelmarten.com

Fotografias de Worm's Head na maré alta e na maré baixa, na Península Gower, localizada no vilarejo de Rhossili, no País de Gales (2005).

Há milhares de anos os homens sabem que a Lua tem alguma relação com as marés. Antes do ano 100 a.C., o naturalista romano Plínio escreveu sobre a influência da Lua nas marés. Mas as leis físicas desse fenômeno não foram estudadas até que o cientista inglês Isaac Newton descobriu a lei da gravitação no século XVII.

As marés são movimentos de fluxo e refluxo das águas dos mares provocados pela atração que a Lua e secundariamente o Sol exercem sobre os oceanos. Qualquer massa de água, grande ou pequena, está sujeita às forças causadoras de maré provindas do Sol e da Lua. Porém é somente no ponto em que se encontram os oceanos e os continentes que as marés têm grandeza suficiente para serem percebidas. As águas dos rios e lagos apresentam subida e descida tão insignificante que a diferença é inteiramente disfarçada por mudanças de nível devidas ao vento e ao estado do tempo.

As marés também ocorrem em terra e na atmosfera, mas são muito mais difíceis de observar que as marés oceânicas. As marés terrestres e atmosféricas podem ser detectadas unicamente por instrumentos científicos altamente sensíveis.

Uma maré é bem semelhante a outra. Do seu nível mais baixo, a água sobe gradualmente por cerca de 6 horas até atingir a maré alta ou preamar. Daí então principia a baixar, continuando por cerca de 6 horas até alcançar a maré baixa ou baixa-mar. O ciclo então começa novamente. A diferença entre a maré alta e a baixa é chamada amplitude da maré. Enquanto a água sobe e desce, move-se em direção da costa e se afasta dela, alternadamente. Esse movimento da água é chamado fluxo da maré. Quando a água se move em direção à costa, é o fluxo enchente. Quando se desloca para alto-mar, é o fluxo vazante.

A amplitude da maré difere dia após dia conforme a posição do Sol e da Lua. Quando ambos se colocam numa mesma linha em relação à Terra, como acontece na Lua Cheia e Nova, a maré fica mais alta do que o normal e é chamada de maré de Sizígia, ou maré de águas-vivas. Quando o Sol e a Lua formam com a Terra um ângulo reto, como quando a Lua está em quarto-crescente ou quarto-minguante, a maré é mais baixa que o normal, sendo chamada maré de Quadratura, ou maré de Águas-Mortas.

A própria formação da costa marítima produz também uma grande diferença na amplitude da maré. Nos estuários e baías com o formato de funil, a amplitude pode ser muito alta. A forma, tamanho e profundidade dos mares e oceanos provocam diferenças no modo de agir da maré.

DANDOLINI, Marlene. **Marés**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.
Disponível em: <http://planetario.ufsc.br/mares/>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Os movimentos das marés possuem relação com quais astros celestes?

b) Nos portos, há um serviço de auxílio aos capitães de embarcações, realizado pelo prático. Esse profissional possui habilidades de condução marítima e conhecimento profundo das condições marítimas da região.
Explique como o conhecimento do movimento das marés auxilia esse profissional a atracar navios no cais do porto.

c) Os ciclos de maré, conforme descrito no texto, poderiam ser representados por quais funções trigonométricas?

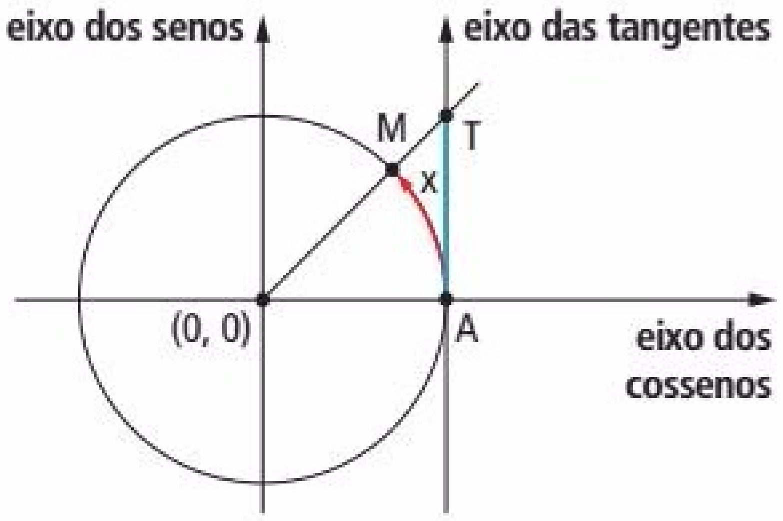
d) Suponha que em certa região a maré baixa corresponda a apenas 1 m e a maré baixa chegue a 3 m. Para efeito de comparação, considere π radianos como sendo o período de 12 horas, em que o valor 0 do domínio corresponde às 6 h da manhã, sendo esse um momento de maré alta. Represente graficamente o comportamento da maré, segundo os dados informados, e escreva a lei da função representada por esse gráfico.

Função tangente

Denomina-se **função tangente** a função f: D $\to \mathbb{R}$ que associa a cada número real $x \in D$ o número real tg x, ou seja, f(x) = tg x ou y = tg x em que $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

O domínio da função tangente é o conjunto *D* e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

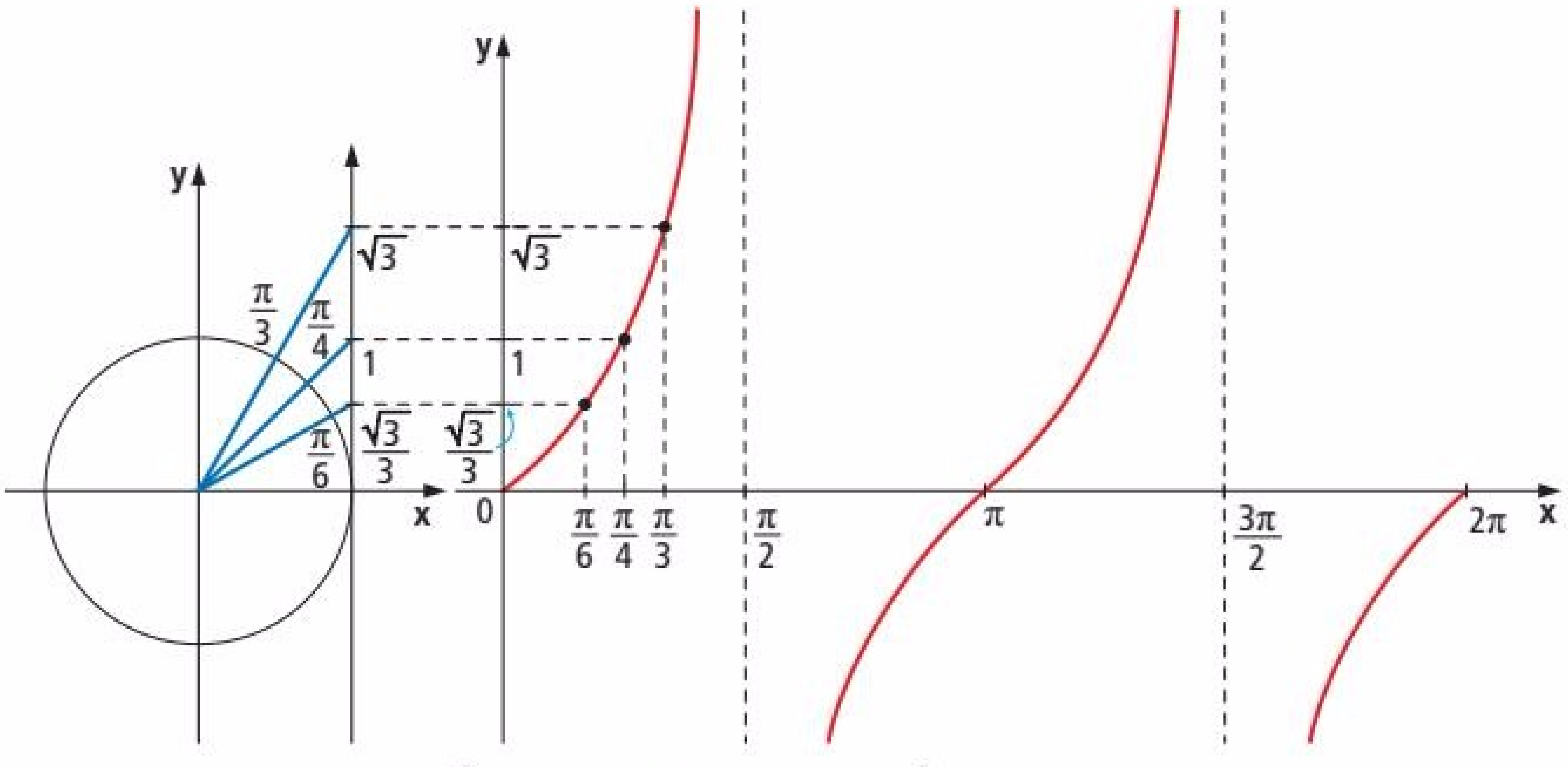
Gráfico da função tangente



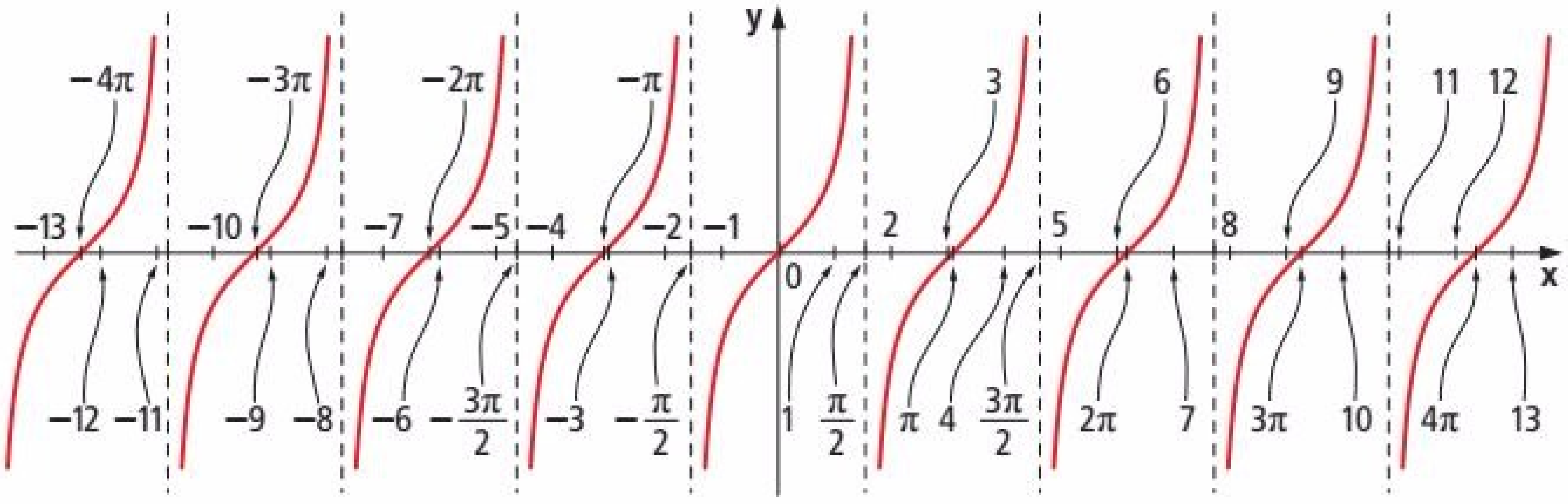
Usando as informações que já tínhamos sobre a tangente na circunferência trigonométrica e lembrando que no ponto *A* a tangente vale zero, temos:

- Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da tangente de *x* cresce à medida que *M* se desloca no sentido anti-horário sobre a circunferência trigonométrica. Esse valor fica ainda maior quanto mais *x* se aproxima de $\frac{\pi}{2}$. Dizemos, nesse caso, que o valor da tangente de *x* tende a mais infinito ($+\infty$), ou seja, aumenta indefinidamente.
- Quando $x=\frac{\pi}{2}$, a tangente não existe, pois a reta que passa pelos pontos (0, 0) e $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ é paralela ao eixo das tangentes.
- Para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, a tangente de *x* é negativa. Seguindo o sentido anti-horário, o valor da tangente de *x*, inicialmente, tende a menos infinito ($-\infty$) e cresce à medida que o valor de *x* se aproxima de π, quando tg $\pi = 0$.
- Para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e para $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, os valores da função tangente se comportam como nos dois intervalos anteriores, respectivamente.

Assim, o conjunto imagem da função tangente é $]-\infty, +\infty[$, ou seja, é $\mathbb{R}$. O gráfico de y = tg x pode ser esboçado no intervalo $[0, 2\pi]$ e fica completo com valores intermediários vistos anteriormente.



Como o domínio dessa função é $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, a curva que representa y = tg x pode ser estendida para valores menores que zero e maiores que 2π, como mostra a figura abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

O gráfico nunca toca as retas tracejadas que passam pelos pontos em que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Essas retas são chamadas de **assíntotas**.

Assim como nos casos das funções seno e cosseno, a função tangente também é periódica. No entanto, a função tangente se repete a cada intervalo de π, como por exemplo nos intervalos $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$. Além disso, observando o gráfico, percebemos que:

$$\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi) = \text{tg } (x + 2\pi) = \dots = \text{tg } (x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Utilizando raciocínio análogo ao utilizado para determinar o período das funções seno e cosseno, podemos concluir que o período *p* de uma função dada por $y = \text{tg } (cx + d)$, com *c* e *d* reais, é $p = \frac{\pi}{|c|}$.

Exercícios resolvidos

5 Que valores de *x* podem pertencer ao domínio da função dada pela lei $y = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ e qual é seu período?

Resolução

Condição de existência, para $k \in \mathbb{Z}$: $2x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Daí: $2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 2x \neq \pi + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$

Sabemos que a função tangente é periódica de período $p = \pi$. Devemos verificar o que ocorre com o valor de *x* quando $\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ varia de 0 a π.

$$2x - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$2x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow 2x = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Logo: $p = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $p = \frac{\pi}{2}$.

6 Determine o domínio da função $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Resolução

Condição de existência, para $k \in \mathbb{Z}$: $x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Daí: $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$

Assim, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi\right\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

26. Determine o período e construa no caderno o gráfico da função $y = 5 \cdot \text{tg } 4x$, para $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

27. Construa no caderno os gráficos das funções a seguir.

a) $y = 1 + \text{tg } x$ b) $y = -2 + \text{tg } x$ c) $f(x) = 2\text{tg } x$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

28. Observando os gráficos da questão anterior, considere as funções $f(x) = k + \text{tg } x$, $g(x) = k \cdot \text{tg } x$ e $h(x) = \text{tg } (x + k)$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$. Qual é o papel da constante *k* no gráfico dessas funções quando comparado ao gráfico da função $y = \text{tg } x$?
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

29. Determine o domínio das funções:

a) $y = \text{tg } (x + 60°)$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 30° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $y = \text{tg } (5x - 45°)$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 27° + k \cdot 36°, k \in \mathbb{Z}\}$

30. Qual o período da função *f* definida por $f(x) = 4\text{ tg }\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$? 3π

31. Determine o domínio das funções:

a) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

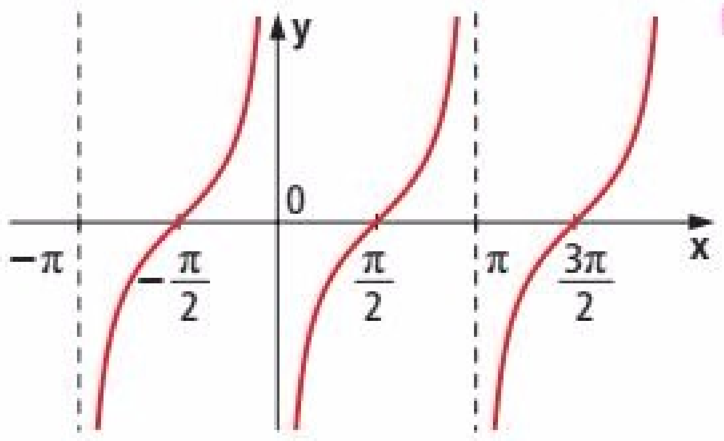
b) $y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

31. b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. Determine $m \in \mathbb{R}$ que torna possível a condição $\text{tg } x = 10 - m^2$, com $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leq m \leq 3\}$

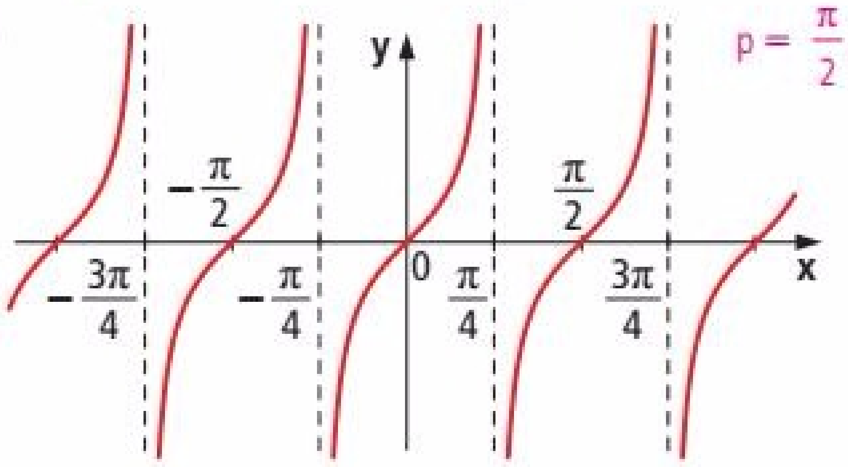
33. Tendo como referência o gráfico de $y = \text{tg } x$ apresentado no texto, determine o período e a lei da função para os gráficos a seguir.

a)



$p = \pi$; $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b)



$p = \frac{\pi}{2}$; $y = \text{tg } 2\pi$

Ilustrações: Editoria de arte

34. Determine *a*, de modo que $\text{tg } \alpha = a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}$ e $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. $\left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3\right\}$

Explorando a tecnologia

Análise dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente

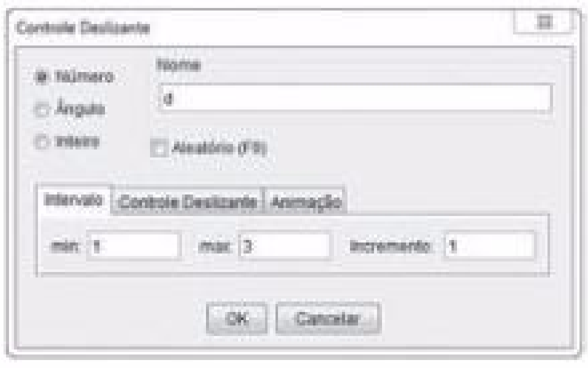
Estudamos nesse capítulo que o gráfico das funções trigonométricas tem o domínio, a imagem e o período muito bem definidos, porém esses intervalos podem ser alterados, modificando os valores de seus parâmetros.

Assim, a fim de tornar esse estudo mais dinâmico, vamos utilizar o GeoGebra para analisar os gráficos dessas funções, variando seus parâmetros.

Como são três funções distintas, vamos utilizar um novo recurso, um chaveamento, para poder analisar cada função em um único arquivo.

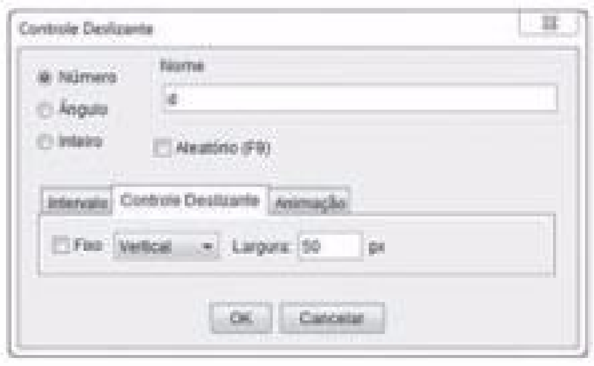
Para isso, siga a sequência de passos a seguir.

1. Utilizando a função **Controle Deslizante**, , crie 3 controles: *a*, *b* e *c*.
2. Ainda utilizando a mesma função, crie outro controle, *d*, com algumas configurações diferentes: o intervalo deve ser de 1 a 3 com incremento 1 e, clicando na aba "Controle Deslizante", na mesma tela, desmarque a caixa "fixo", selecione a posição "vertical" e preencha a caixa "largura" com o valor '50 px'. As imagens abaixo representam as configurações descritas.


Controle Deslizante
● Número
○ Ângulo
○ Inteiro
☐ Aleatório (F9)
Intervalo
Controle Deslizante
Animação
OK
Cancelar

Nome: d

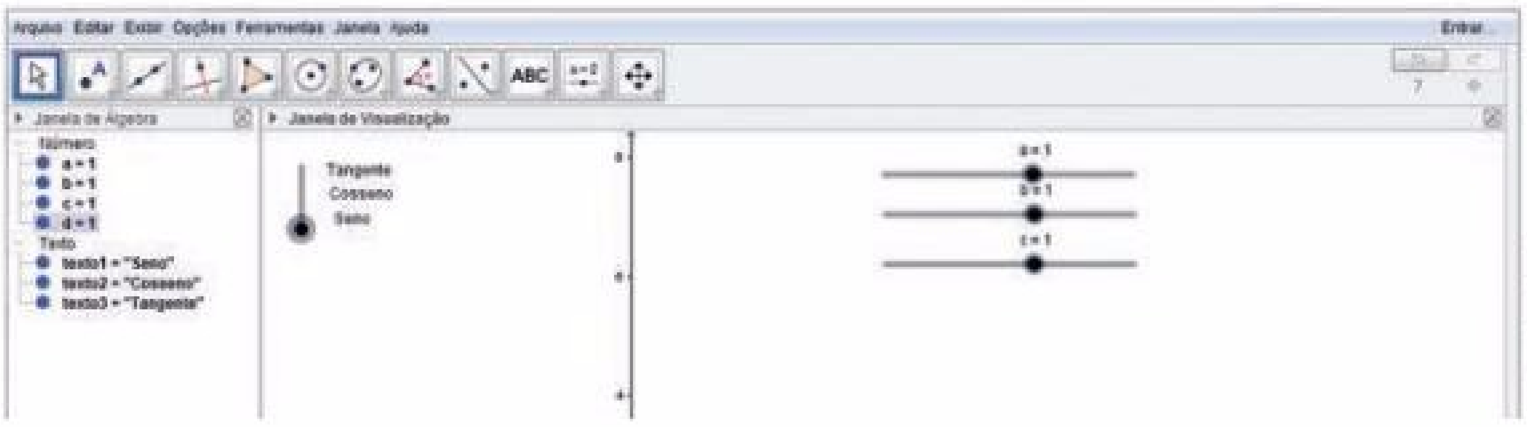
min: 1 max: 3 Incremento: 1


Controle Deslizante
● Número
○ Ângulo
○ Inteiro
☐ Aleatório (F9)
Intervalo
Controle Deslizante
Animação
OK
Cancelar

Nome: d

☐ Fixo Vertical Largura: 50 px

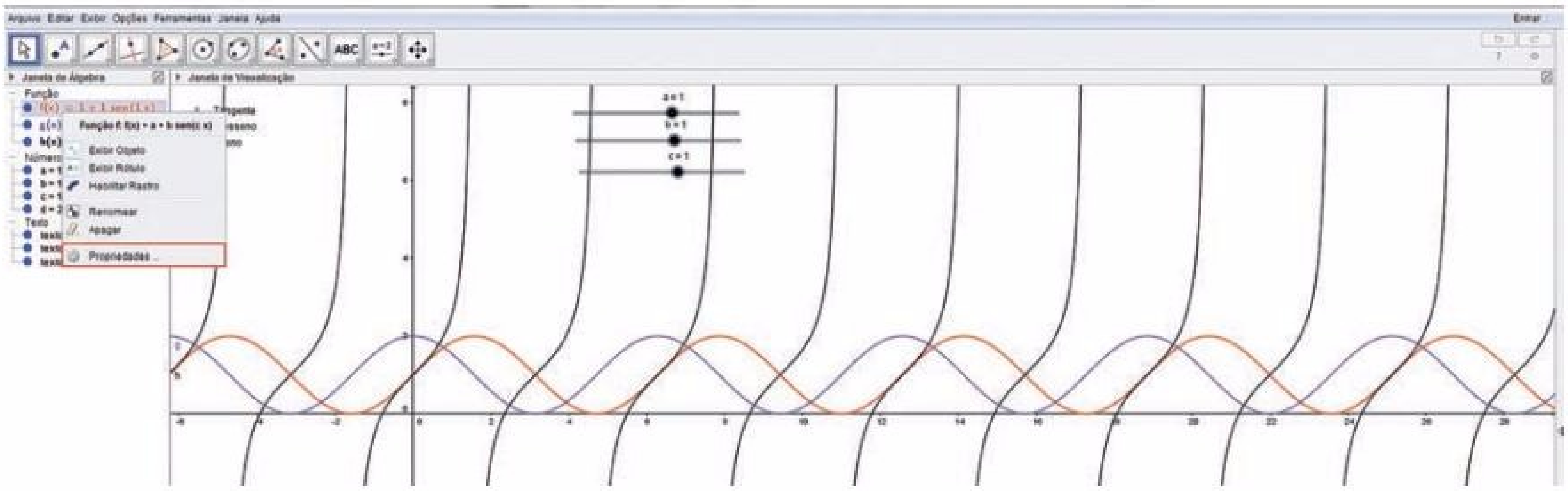
3. Repare que o controle *d* ficou na vertical e de tamanho menor. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o controle *d* e desmarque a opção "Exibir Rótulo". Em seguida, digite no **Campo de Entrada** os seguintes textos: "Seno", "Cosseno" e "Tangente" (incluindo as aspas!). Na **Janela de Visualização** aparecerão 3 textos: Seno, Cosseno e Tangente e, com o *mouse*, posicione-os ao lado do controle *d* conforme imagem abaixo.


Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Janela de Álgebra
Janela de Visualização
Número
Texto
Tangente
Cosseno
Seno
a = 1
b = 1
c = 1

a = 1
b = 1
c = 1
d = 1
texto1 = "Seno"
texto2 = "Cosseno"
texto3 = "Tangente"

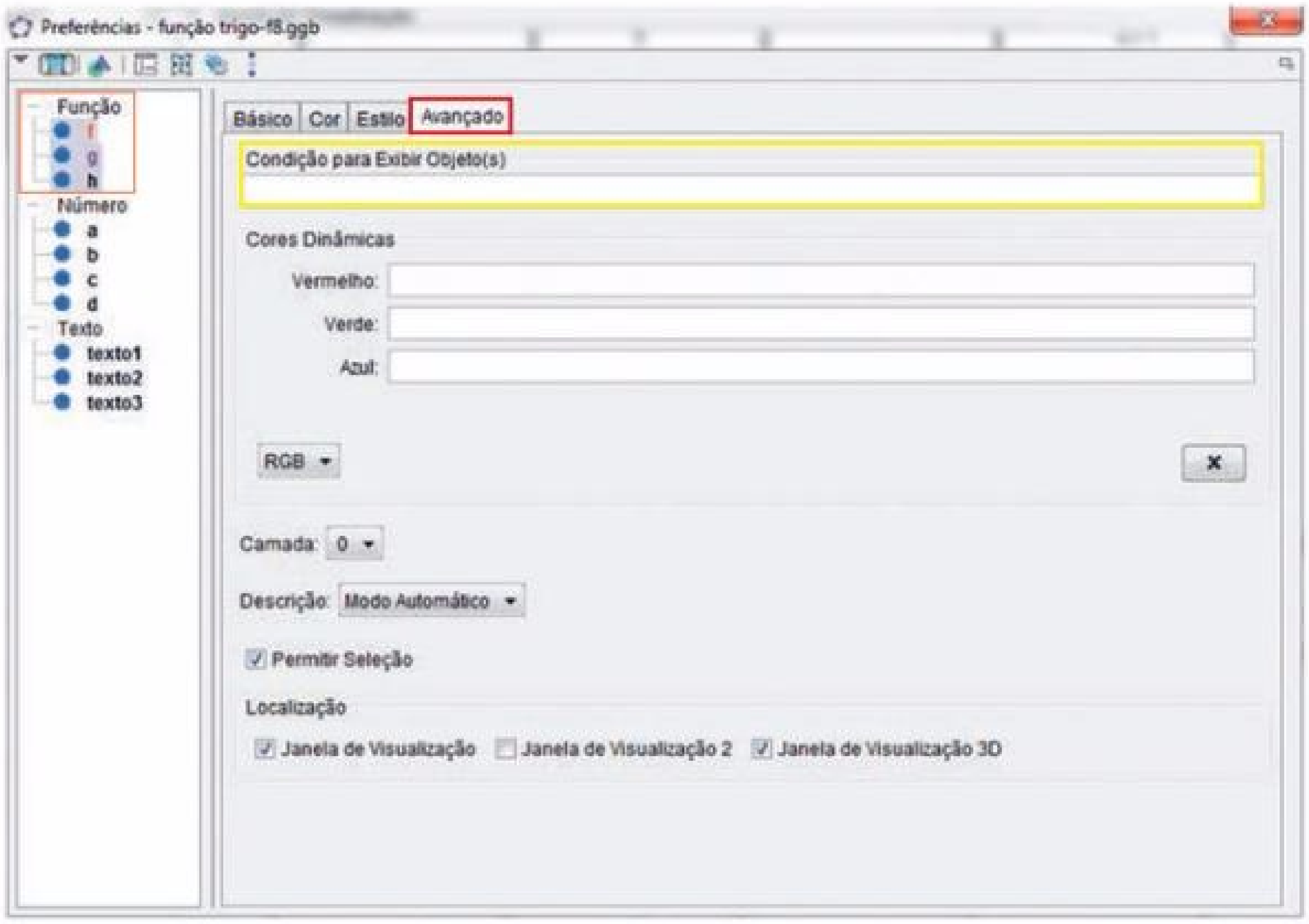
Crédito das imagens: Geogebra

4. Ainda no **Campo de Entrada**, para criar as funções trigonométricas, digite 'f(x) = a + b * sen (c * x)', 'g(x) = a + b * cos (c * x)' e 'h(x) = a + b * tg (c * x)'. Na **Janela de Visualização**, aparecerão o gráficos das três funções *f*, *g* e *h*.
5. Agora vamos configurar nossa chave (controle *d*) para que apareça apenas uma função por vez. Clicando com o botão direito do *mouse* sobre a função f(x) que está na **Janela de Álgebra**, aparecerá um menu, e você deverá escolher a opção "Propriedades", destacada em vermelho na imagem abaixo.


Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar
ABC
a=2
Janela de Álgebra
Janela de Visualização
Função
Número
Texto
Função f: f(x) = a + b sen(c x)
Exibir Objeto
Exibir Rótulo
Habilitar Rastro
Renomear
Apagar
Propriedades ...
Tangente
Cosseno
Seno
a = 1
b = 1
c = 1
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
6
4
2

f(x) = 1 + 1 sen(1 x)

6. Na caixa de diálogo aberta, escolha a aba "Avançado" (destaque em vermelho na Figura 1). Na primeira linha, "Condições para Exibir Objeto(s)" (destaque em amarelo na Figura 1), digite 'd = 1' e, em seguida, pressione *enter*. Isso significa que a função f(x) aparecerá quando d = 1, ou seja, se d = 2 ou d = 3, ela ficará oculta. A Figura 1 abaixo indica os campos que devem ser alterados.



Preferências - função trigo-f8.ggb
Função
f
g
h
Número
a
b
c
d
Texto
texto1
texto2
texto3
Básico
Cor
Estilo
Avançado
Condição para Exibir Objeto(s)
Cores Dinâmicas
Vermelho:
Verde:
Azul:
RGB
×

Camada: 0

Descrição: Modo Automático

☑ Permitir Seleção

Localização

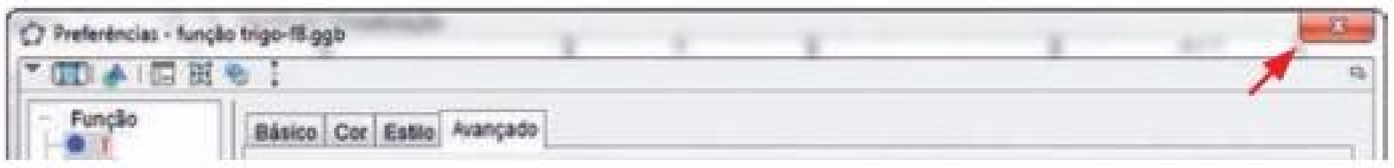
☑ Janela de Visualização ☐ Janela de Visualização 2 ☑ Janela de Visualização 3D

Crédito das imagens: Geogebra

Figura 1

7. Sem fechar o painel de "Preferências", em "Função" (destaque em laranja na Figura 1), clique na função *g* e escreva a condição como 'd = 2'. Assim, quando *d* assumir o valor 2 a função *g* aparecerá, mas as outras, não.

8. Repita o item anterior, clicando na função *h* e digitando como condição 'd = 3'. Em seguida, feche a janela clicando no local indicado na figura a seguir.



Preferências - função trigo-f8.ggb
Função
f
Básico
Cor
Estilo
Avançado

Repare que apenas uma função será apresentada por vez na **Janela de Visualização**, e a função que aparecerá vai depender da posição do controle *d*. Entretanto, os controles *a*, *b* e *c* criados servirão para todas as outras funções.

Mova o seletor *d* e veja o que acontece.

Agora, utilize os controles *a*, *b*, *c* e *d* para alterar os gráficos das funções e responder às questões abaixo.

Atividades

Escreva no caderno

Veja o Manual do Professor.

1. Descreva o que você observa na função seno dada por f(x) = a + sen(x), ou seja, para b = 1 e c = 1 , quando o controle *a* desliza de seu valor mínimo até o máximo.

2. Descreva o que você observa na função cosseno dada por g(x) = b · cos (x), ou seja, para a = 0 e c = 1 , quando o controle *b* desliza de seu valor mínimo até o máximo. O que acontece se b = 0? Explique.

3. Descreva o que você observa na função tangente dada por h(x) = tg (c · x), ou seja, para a = 0 e b = 1 , quando o controle *c* desliza de seu valor mínimo até o máximo. O que acontece se c = 0? Explique.

4. Para a função h(x), se c = 0 ou b = 0, o gráfico terá a mesma aparência. Isso significa que as condições matemáticas são iguais para ambos os casos?

5. O mesmo acontece quando *b* e *c* são números opostos na função h(x). Nesse caso, as condições matemáticas são iguais?

Transformações trigonométricas

Fórmulas da adição e da subtração de arcos

Conhecendo os valores do seno, do cosseno e da tangente de dois arcos, é possível determinar o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença desses arcos.

Assim, podemos utilizar fórmulas para expressar sen (a + b), cos (a + b), sen (a − b) e cos (a − b), em função de sen a, sen b, cos a e cos b. É possível também expressar tg (a + b) e tg (a − b) em função de tg a e de tg b.

sen (a + b)

Dados sen a, cos a, sen b e cos b, a expressão do seno da soma dos arcos *a* e *b* pode ser escrita como:

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$$

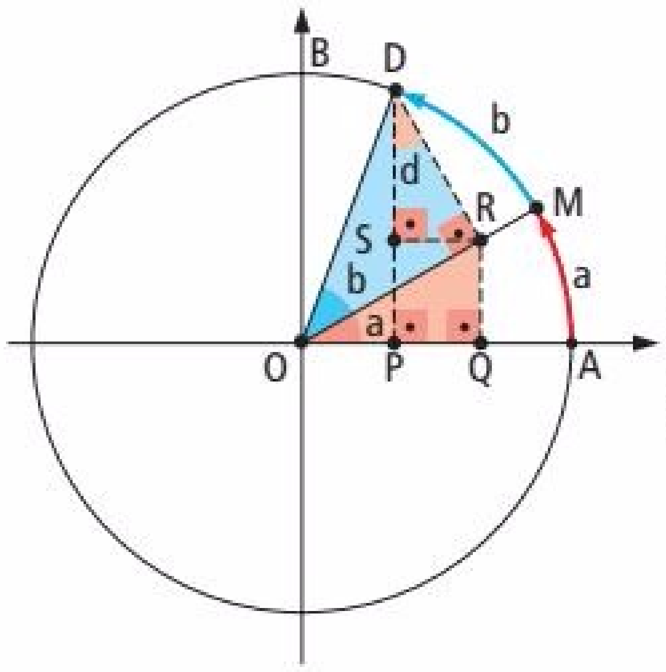
cos (a + b)

Dados sen a, cos a, sen b e cos b, a expressão do cosseno da soma dos arcos *a* e *b* pode ser escrita como:

$$\cos\,(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

Demonstração

Sejam dois arcos AM e MD do primeiro quadrante da circunferência trigonométrica de medidas *a* e *b*, respectivamente, como mostra a figura a seguir.



Editoria de arte

Da figura, temos:

- $a = d$ (ORS = a e DRS = 90 − a)
- PS = QR e SR = PQ (lados opostos de um retângulo)

No $\triangle OPD$: $\text{sen}\,(a+b) = PD = PS + SD \Rightarrow \text{sen}\,(a+b) = QR + SD$ (I)

No $\triangle OQR$: $\text{sen}\,a = \dfrac{QR}{OR} \Rightarrow QR = OR \cdot \text{sen}\,a$ (II)

No $\triangle DRS$: $\cos d = \dfrac{DS}{DR} \Rightarrow SD = DR \cdot \cos d \Rightarrow SD = DR \cdot \cos a$ (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$\text{sen}\,(a+b) = OR \cdot \text{sen}\,a + DR \cdot \cos a$ (IV)

No $\triangle ORD$: $OR = \cos b$ e $DR = \text{sen}\,b$

Substituindo OR e DR em (IV), temos:

$\text{sen}\,(a+b) = \cos b \cdot \text{sen}\,a + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

Usando procedimento análogo, é possível demonstrar a fórmula para o cosseno da soma de dois arcos *a* e *b*.

A demonstração foi feita para arcos de medida *a* e *b* no 1º quadrante cuja soma (a + b) também pertence ao 1º quadrante. No entanto, as fórmulas são válidas para quaisquer valores reais de *a* e *b*.

sen (a − b)

Da fórmula da soma, temos:

$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,[a + (-b)] = \text{sen}\,a \cdot \cos\,(-b) + \text{sen}\,(-b) \cdot \cos\,a$

Mas $\cos\,(-b) = \cos\,b$ e $\text{sen}\,(-b) = -\text{sen}\,b$.

Então: $\boxed{\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos\,b - \text{sen}\,b \cdot \cos\,a}$

cos (a − b)

Da fórmula da soma, temos:

$\cos\,(a - b) = \cos\,[a + (-b)] = \cos\,a \cdot \cos\,(-b) - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,(-b)$

Então: $\boxed{\cos\,(a - b) = \cos\,a \cdot \cos\,b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}$

tg (a + b) e tg (a − b)

As relações a seguir são válidas para os valores de *a*, *b*, a + b e a − b que pertencem ao domínio $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com}\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ da função tangente.

As duas fórmulas a seguir permitem determinar, respectivamente, a tangente da soma e da diferença de dois arcos, *a* e *b*, quando são conhecidos os valores das tangentes desses arcos.

tg (a + b)

Sabemos que: $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)}$

Vamos, então, desenvolver o segundo membro:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{sen}\,a \cdot \cos\,b + \text{sen}\,b \cdot \cos\,a}{\cos\,a \cdot \cos\,b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}$$

Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro por cos a · cos b, com cos a · cos b ≠ 0, temos:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cos\,b}{\cos\,a \cdot \cos\,b} + \dfrac{\text{sen}\,b \cdot \cos\,a}{\cos\,a \cdot \cos\,b}}{\dfrac{\cos\,a \cdot \cos\,b}{\cos\,a \cdot \cos\,b} - \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\cos\,a \cdot \cos\,b}} \Rightarrow \frac{\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos\,a} + \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos\,b}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,a}{\cos\,a} \cdot \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos\,b}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}}$$

tg (a − b)

Da fórmula da soma, temos:

$$\text{tg}\,(a-b) = \text{tg}\,[a + (-b)] = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,(-b)}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,(-b)}$$

Mas $\text{tg}\,(-b) = \dfrac{\text{sen}\,(-b)}{\cos\,(-b)} = \dfrac{-\text{sen}\,b}{\cos\,b} = -\dfrac{\text{sen}\,b}{\cos\,b} = -\text{tg}\,b$.

Então: $\boxed{\text{tg}\,(a-b) = \dfrac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}}$

Exercícios resolvidos

7 Calcule cos 135°.

Resolução

Transformando em uma soma de arcos, temos:

$\cos 135° = \cos (90° + 45°)$

Aplicando a fórmula do cosseno de uma soma, temos:

$\cos (90° + 45°) = \cos 90° \cdot \cos 45° - \operatorname{sen} 90° \cdot \operatorname{sen} 45°$

$\cos (90° + 45°) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos (90° + 45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8 Sendo $a, b \in \,]0°, 90°[$, $\operatorname{sen} a = \frac{1}{3}$ e $\cos b = \frac{1}{2}$, determine:

a) $\operatorname{sen} (a + b)$

b) $\cos (a + b)$

Resolução

a) Usando a relação fundamental, temos:

$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 a = 1$

$\cos^2 a = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $a \in \,]0°, 90°[$, $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 b + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$\operatorname{sen}^2 b + \frac{1}{4} = 1$

$\operatorname{sen}^2 b = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $b \in \,]0°, 90°[$, $\operatorname{sen} b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Usando a fórmula do seno de uma soma, temos:

$\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\operatorname{sen} (a + b) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\operatorname{sen} (a + b) = \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} (a + b) = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$

b) $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\cos (a + b) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos (a + b) = \frac{2\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \cos (a + b) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

9 Sabendo que $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$ e $\operatorname{tg} b = \frac{1}{10}$, calcule $\operatorname{tg} (a - b)$.

Resolução

Usando a fórmula da tangente da diferença de dois arcos, temos:

$$\operatorname{tg} (a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \Rightarrow \operatorname{tg} (a - b) = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}{1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{\frac{2-1}{10}}{1 + \frac{1}{50}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{51}{50}} = \frac{5}{51}$$

Portanto, $\operatorname{tg} (a - b) = \frac{5}{51}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

35. Calcule sen 105° e cos 15°. $\operatorname{sen} 105° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$; $\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

36. Calcule cos 75° e sen 15°. $\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

37. Usando as fórmulas da adição, mostre que:

a) $\operatorname{sen} (\pi + x) = -\operatorname{sen} x$ Demonstração.

b) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen} x$ Demonstração.

38. Calcule $\cos (a - b)$, sendo $\cos (3\pi - a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a \in 3^{\underline{o}}$ quadrante, e $\cos \left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \frac{3}{5}$, $b \in 4^{\underline{o}}$ quadrante. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

39. Usando a fórmula do seno e a do cosseno da diferença de dois arcos, mostre que:

a) $\cos (\pi - x) = -\cos x$ Demonstração.

b) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ Demonstração.

40. (UFRN) Sabendo-se que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e *x* está no 1º quadrante, qual o valor de $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$? $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$

41. Calcule:

a) tg 15° $2 - \sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ $-2 - \sqrt{3}$

42. Se tg 13° = 0,23 e tg 25° = 0,47, calcule:

a) tg 38° 0,78

b) tg 12° 0,21

43. Se α é um ângulo, tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = a$, calcule $\operatorname{tg} (\pi - \alpha)$. $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$

Fórmulas do arco duplo e do arco metade

Conhecendo o seno e o cosseno de um arco de medida *a* e aplicando a fórmula da adição de arcos, podemos obter o seno, o cosseno e a tangente do arco de medida 2a, ou seja, do arco duplo.

sen 2a

Sabemos que: $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$
Fazendo $b = a$, temos:

$$\text{sen}(a + a) = \text{sen}\, a \cdot \cos a + \text{sen}\, a \cdot \cos a \Rightarrow \boxed{\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a}$$

cos 2a

Sabemos que: $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$
Fazendo $b = a$, temos:

$$\cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, a \Rightarrow \boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

Como $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, também podemos escrever:

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a \Rightarrow \boxed{\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1}$$

$$\cos 2a = 1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a \Rightarrow \boxed{\cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a}$$

tg 2a

Sabemos que: $\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

Fazendo $b = a$, temos:

$$\text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, a} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\, 2a = \frac{2\, \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a}}$$

Essas fórmulas são chamadas de **fórmulas do arco duplo**.

$\cos\left(\frac{a}{2}\right)$, $\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)$ e $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$

Também é possível obter as fórmulas do arco metade $\left(\frac{a}{2}\right)$, a partir das funções trigonométricas de *a*.

Sabemos que $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$ e que $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x$.

Fazendo $2x = a$, obtemos $x = \frac{a}{2}$. Logo:

$$\cos a = 2 \cdot \cos^2 \frac{a}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2} \Rightarrow \boxed{\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}}$$

$$\cos a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\, \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}$$

Como $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, temos que:

$$\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}} = \pm\frac{\sqrt{1 - \cos a}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos a}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{1 - \cos a}}{\sqrt{1 + \cos a}}}$$

Exercícios resolvidos

10 Conhecendo-se $\text{sen}\, a = \frac{4}{5}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule:

a) sen 2a b) cos 2a c) tg 2a

Resolução

a) $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5} \left(\text{pois } 0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$

$\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a \Rightarrow \text{sen}\, 2a = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\, 2a = \frac{24}{25}$

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \Rightarrow \cos 2a = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2a = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos 2a = -\frac{7}{25}$

c) $\text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

$\text{tg}\, 2a = \frac{2 \cdot \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a} \Rightarrow \text{tg}\, 2a = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}} \Rightarrow \text{tg}\, 2a = -\frac{24}{7}$

11 Se $\text{sen}\, x + \cos x = \frac{1}{3}$, calcule sen 2x.

Resolução

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$(\text{sen}\, x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = \frac{1}{9}$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = \text{sen}\, 2x$, resulta:

$1 + \text{sen}\, 2x = \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}\, 2x = \frac{1}{9} - 1 \Rightarrow \text{sen}\, 2x = -\frac{8}{9}$

12 Dado $\cos a = \frac{3}{5}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos \frac{a}{2}$.

Resolução

$\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \Rightarrow \cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$

Como $0 < a < \frac{\pi}{2}$, então $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Fórmulas de transformação em produto

Podemos utilizar fórmulas para expressar somas e diferenças de senos e cossenos como produtos que contenham senos e cossenos.

Vamos estudar a seguir como obter essas fórmulas.

Estudamos as fórmulas de adição e de subtração de arcos. Dados dois arcos *p* e *q*, podemos escrever:

$\text{sen}\,(p + q) = \text{sen}\, p \cdot \cos q + \text{sen}\, q \cdot \cos p$ (I) e $\text{sen}\,(p - q) = \text{sen}\, p \cdot \cos q - \text{sen}\, q \cdot \cos p$ (II)

Fazendo (I) + (II) e (I) − (II) membro a membro, temos, respectivamente:

(I) + (II) $\rightarrow \text{sen}\,(p + q) + \text{sen}\,(p - q) = \text{sen}\, p \cdot \cos q + \text{sen}\, q \cdot \cos p + \text{sen}\, p \cdot \cos q - \text{sen}\, q \cdot \cos p$

$\text{sen}\,(p + q) + \text{sen}\,(p - q) = 2 \cdot \text{sen}\, p \cdot \cos q$ (III)

(I) − (II) $\rightarrow \text{sen}\,(p + q) - \text{sen}\,(p - q) = \text{sen}\, p \cdot \cos q + \text{sen}\, q \cdot \cos p - (\text{sen}\, p \cdot \cos q - \text{sen}\, q \cdot \cos p)$

$\text{sen}\,(p + q) - \text{sen}\,(p - q) = 2 \cdot \text{sen}\, q \cdot \cos p$ (IV)

Fazendo $a = p + q$, $b = p - q$ e somando e subtraindo as duas igualdades membro a membro, obtemos $p = \frac{a + b}{2}$ e $q = \frac{a - b}{2}$. Substituindo *p* e *q* em (III) e (IV) pelas expressões em função de *a* e *b*, chegamos às fórmulas de transformação da soma e da diferença de senos em um produto de senos. Assim:

$$\text{sen}\, a + \text{sen}\, b = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{sen}\, a - \text{sen}\, b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Analogamente ao que foi feito para os senos, vamos determinar as fórmulas para transformação da soma e da diferença de cossenos em um produto de cossenos. Assim, dados dois arcos *p* e *q*, podemos escrever:

$\cos(p + q) = \cos p \cdot \cos q - \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q$ (I) e $\cos(p - q) = \cos p \cdot \cos q + \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q$ (II)

Fazendo (I) + (II) e (I) − (II) membro a membro, temos, respectivamente:

$$\text{(I)} + \text{(II)} \rightarrow \cos(p+q) + \cos(p-q) = \cos p \cdot \cos q - \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q + \cos p \cdot \cos q + \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q$$

$$\cos(p+q) + \cos(p-q) = 2 \cdot \cos p \cdot \cos q \quad \text{(III)}$$

$$\text{(I)} - \text{(II)} \rightarrow \cos(p+q) - \cos(p-q) = \cos p \cdot \cos q - \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q - (\cos p \cdot \cos q + \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q)$$

$$\cos(p+q) - \cos(p-q) = -2 \cdot \text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q \quad \text{(IV)}$$

Fazendo $a = p + q$, $b = p - q$ e somando e subtraindo as duas igualdades membro a membro, obtemos $p = \frac{a+b}{2}$ e $q = \frac{a-b}{2}$. Substituindo *p* e *q* em (III) e (IV) pelas expressões em função de *a* e *b*, chegamos às fórmulas de transformação da soma e da diferença de cossenos em um produto de cossenos. Assim:

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercícios resolvidos

13 Fatore a expressão $A = \cos 6x + \cos 2x$.

Resolução

$$\cos 6x + \cos 2x = 2 \cdot \cos\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right) \Rightarrow \cos 6x + \cos 2x = 2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x$$

14 Simplifique a expressão $y = \dfrac{\cos 40° + \cos 50°}{\cos 40° - \cos 50°}$.

Resolução

$$\cos 40° + \cos 50° = 2 \cdot \cos\left(\frac{40° + 50°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{40° - 50°}{2}\right) = 2 \cdot \cos 45° \cdot \cos(-5°) = 2 \cdot \cos 45° \cdot \cos 5°$$

$$\cos 40° - \cos 50° = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{40° + 50°}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{40° - 50°}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot \underbrace{\text{sen}(-5°)}_{-\text{sen}\, 5°} = 2 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot \text{sen}\, 5°$$

Substituindo, temos:

$$y = \frac{2 \cdot \cos 45° \cdot \cos 5°}{2 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot \text{sen}\, 5°} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 5°}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sen}\, 5°} = \frac{\cos 5°}{\text{sen}\, 5°} = \text{cotg}\, 5°$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

44. Sendo sen 18° = 0,31, calcule:

a) sen 36° 0,59 b) cos 36° 0,81 c) tg 36° 0,73

45. (Faap-SP) Calcule sen 2x, se $\text{sen}\, x = \frac{3}{4}$ e *x* é um arco do 2º quadrante. $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$

46. Transforme em produto as expressões:

a) sen 4x + sen 2x $2 \cdot \text{sen}\, 3x \cdot \cos x$

b) sen 5x − sen x $2\, \text{sen}\, 2x \cdot \cos 3x$

c) sen 55° + sen 35° $\sqrt{2} \cdot \cos 10°$

47. Simplifique:

a) $\text{sen}\, \frac{\pi}{4} + \text{sen}\, \frac{\pi}{12}$ $\cos \frac{\pi}{12}$ b) sen 105° − sen 15° $\frac{\sqrt{2}}{2}$

48. Transforme em produto:

a) sen (x + m) + sen x $2 \cdot \text{sen}\, \frac{2x+m}{2} \cdot \cos \frac{m}{2}$

b) sen (x + m) − sen x $2 \cdot \text{sen}\, \frac{m}{2} \cdot \cos \frac{2x+m}{2}$

49. Fatore as expressões:

a) 1 + sen 20° $2 \cdot \text{sen}\, 55° \cdot \cos 35°$

b) 1 − cos 80° $-2 \cdot \text{sen}\, 220° \cdot \text{sen}\, 140°$

50. Simplifique $y = \dfrac{\text{sen}\, 30° - \text{sen}\, 80°}{\text{sen}\, 10° + \text{sen}\, 40°}$. $-\frac{\cos 55°}{\cos 15°}$

51. Calcule:

a) sen 165° − sen 75° $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) cos 165° + cos 75° $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Equações trigonométricas

É denominada **equação trigonométrica** toda equação em que a incógnita ou as expressões contendo a incógnita aparecem como se fossem variáveis de funções trigonométricas. Por exemplo:

a) $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\text{tg}^2\, x + \text{tg}\, x = 0$

Os valores da incógnita que satisfazem à equação dada, caso existam, constituem as soluções da equação trigonométrica.

Acompanhe como resolver esse tipo de equação nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

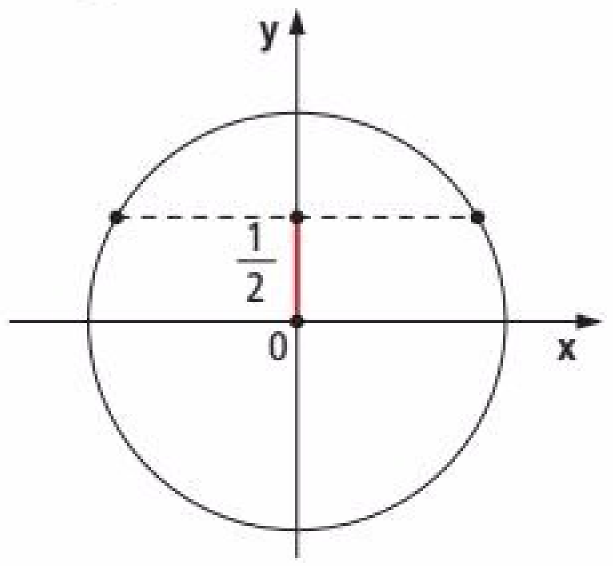
15 Resolva a equação $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ em cada caso.

a) No intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

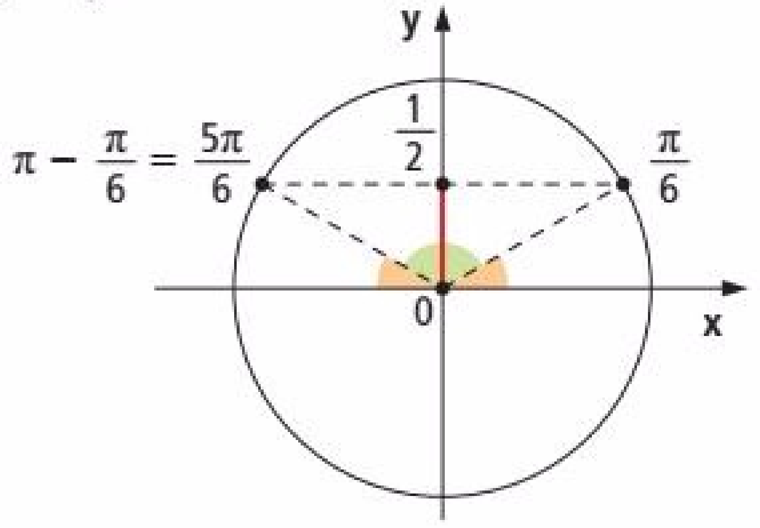
b) No conjunto dos números reais.

Resolução

a) Na circunferência trigonométrica, marcamos no eixo dos senos (eixo vertical) o valor $\frac{1}{2}$. Em seguida, traçamos pelo ponto $\frac{1}{2}$ uma reta paralela ao eixo horizontal.



Os valores de *x*, soluções da equação, são as medidas dos arcos cujas extremidades são os pontos de intersecção da reta paralela ao eixo horizontal com a circunferência trigonométrica. No 1º quadrante, o arco cujo seno é $\frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{6}$.



Logo, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução da equação $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ é $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

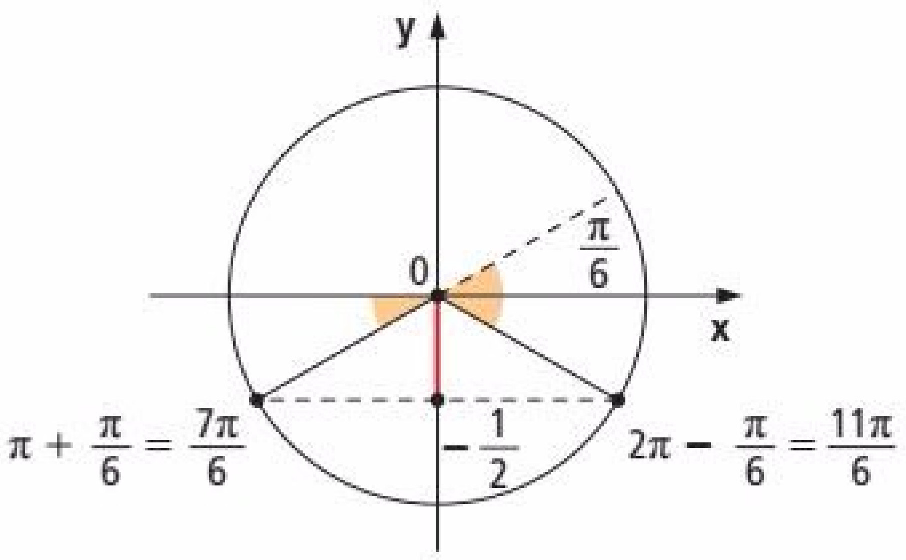
b) Como a função seno é periódica de período 2π, a solução no conjunto $\mathbb{R}$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

16 Resolva a equação $\text{sen}\,(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

Resolução

a) Na circunferência trigonométrica, marcamos $-\frac{1}{2}$ no eixo dos senos e traçamos pelo ponto $-\frac{1}{2}$ uma reta paralela ao eixo horizontal.


y
0
$\frac{\pi}{6}$
x
$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Ilustrações: Editoria de arte

$$\text{sen}\,(3x - \pi) = \text{sen}\, \frac{7\pi}{6}$$

$$3x - \pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

ou

$$\text{sen}\,(3x - \pi) = \text{sen}\, \frac{11\pi}{6}$$

$$3x - \pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{17\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

17 Sendo $\cos(a + x) \cdot \cos(a - x) - \text{sen}(a + x) \cdot \text{sen}(a - x) = \frac{7}{25}$ e $a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcule $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$.

Resolução

Usando a fórmula do cosseno de uma soma, temos:

$$\cos(a + x) \cdot \cos(a - x) - \text{sen}(a + x) \cdot \text{sen}(a - x) = \frac{7}{25}$$

$$\cos[(a + x) + (a - x)] = \frac{7}{25} \Rightarrow \cos 2a = \frac{7}{25}$$

Como $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, temos:

$$2\cos^2 a - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow 2\cos^2 a = \frac{7}{25} + 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = \pm\frac{4}{5}$$

Sendo $a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, cos a é negativo. Logo: $\cos a = -\frac{4}{5}$.

Usando a fórmula da tangente do arco metade, temos:

$$\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm 3$$

Como $a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $\frac{a}{2} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

Logo, $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) < 0$. Portanto, $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = -3$.

62. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

54. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **64.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

52. Resolva as seguintes equações, sendo $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) $\text{sen } x = -1$ $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

d) $\cos x = -1$ $S = \{\pi\}$

53. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\text{tg } 3x = 1$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $\text{tg}(2x - \pi) = -1$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

54. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $2\,\text{sen } x + 1 = 0$

b) $2\,\text{sen } 2x = 1$

55. Determine o conjunto solução da seguinte equação:

$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

56. Calcule o conjunto solução da equação $1 - \sqrt{2}\cos x = 0$, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$

57. Qual é o conjunto verdade da equação $\text{cossec } x = \sqrt{2}$, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$? $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

58. Um gerador de corrente elétrica produz uma corrente dada pela equação $I(t) = 40\text{sen}(120\pi t)$, em que *t* é o tempo em segundo, e *I* é a corrente em ampere. Determine o mínimo valor positivo de *t* para que I = 20 amperes. Dê a resposta com quatro casas decimais. $\simeq 0{,}0014$ s

59. Sabendo que $2\,\text{tg}^2 x + \frac{1}{\text{cotg } x} = 1$ e que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, calcule o valor de *A*, sendo $A = \text{sen } x + \cos x$. 0

60. (UFMS) Se *x* é número real, tal que $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, e verifica a igualdade $(1 - 2\,\text{tg}^2 x)\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 0$, calcule $\frac{12x}{\pi}$. 15

61. Sendo $0 \leqslant x < 2\pi$, resolva a equação

$2\cos^2 x + 4\,\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} + \text{tg}^2 x$. $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

62. Determine o conjunto solução das equações:

a) $2\,\text{sen}^2 x - 6\,\text{sen } x - 8 = 0$

b) $\cos^2 x + \cos x = 0$

63. Calcule o conjunto solução da equação

$2\,\text{sen}^4 x - 3\,\text{sen}^2 x + 1 = 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

64. Resolva a equação $4^{-\text{sen } x} = \frac{1}{2}$.

65. Determine o conjunto solução da equação

$|\cos(\pi - x)| = \frac{1}{2}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

66. Sabendo que $x \in [0, 2\pi[$, resolva a equação

$\cos 3x = \text{sen } x$. Use $\text{sen } x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Identidades trigonométricas

Consideremos uma igualdade da forma f(x) = g(x), na qual f(x) e g(x) são funções trigonométricas.

Se essa igualdade é válida para qualquer valor real de *x*, para os quais os valores das funções *f* e *g* existem, dizemos que f(x) = g(x) é uma **identidade trigonométrica**.

Observe:

- A igualdade $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ é válida para qualquer *x* real.
  Logo, é uma identidade trigonométrica.
- A igualdade $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$ é válida para todo $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, é uma identidade trigonométrica.

Para provar uma identidade trigonométrica, podemos empregar qualquer uma das relações trigonométricas já estudadas e escolher um dos seguintes processos de demonstração que vamos utilizar neste livro.

1º processo: Partimos de um membro da igualdade e chegamos ao outro membro.

2º processo: Transformamos a expressão do 1º membro e a do 2º membro em uma mesma expressão.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= h(x) \\ g(x) &= h(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Acompanhe como realizar essas demonstrações nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

18 Demonstre a identidade $(1 + \text{cotg}^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) = 1$.

Resolução

Vamos reescrever a expressão do 1º membro utilizando apenas as funções sen x e cos x. Depois, aplicaremos a relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para chegar ao 2º membro:

$$\left(1+\text{cotg}^2 x\right)\cdot\left(1-\cos^2 x\right)=\left(1+\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}\right)\cdot\left(1-\cos^2 x\right)=$$

$$=\left(\frac{\text{sen}^2 x+\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}\right)\cdot\left(1-\cos^2 x\right)=\frac{1}{\cancel{\text{sen}^2 x}}\cdot\cancel{\text{sen}^2 x}=1$$

Assim, fica demonstrada a identidade
$(1 + \text{cotg}^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) = 1$

19 Demonstre a identidade $\frac{\text{sen}\, 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\text{tg}\,\frac{x}{2}$.

Resolução

Fazendo f(x) − g(x) = 0, temos:

$$\frac{\text{sen}\, 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

Temos que $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x$,
$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ e

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\Rightarrow\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$$

Fazendo a substituição, temos:

$$\frac{2\,\text{sen}\, x\cos x}{1+\cos^2 x-\text{sen}^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{2\,\text{sen}\, x\cos x}{\cos^2 x+\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{\cancel{2}\,\text{sen}\, x\,\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{2}\,\cancel{\cos^2 x}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{\text{sen}\, x}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{\cancel{2}\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$\text{tg}\,\frac{x}{2}-\text{tg}\,\frac{x}{2}=0$$

$$0=0$$

Portanto, fica demonstrada a identidade.

Professor, os exercícios propostos 67 a 72 da página 53 são referentes a este conteúdo.

Inequações trigonométricas

Toda inequação envolvendo uma função trigonométrica com arco desconhecido denomina-se **inequação trigonométrica**. Assim, são inequações trigonométricas, por exemplo:

a) $\operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2}$ b) $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ d) $\operatorname{tg} x < 1$

Os valores de *x* que satisfazem a inequação formam seu conjunto solução.

Exercícios resolvidos

20 Determine o conjunto solução da inequação $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 > 0$. Suponha $x \in [0, 2\pi[$.

Resolução

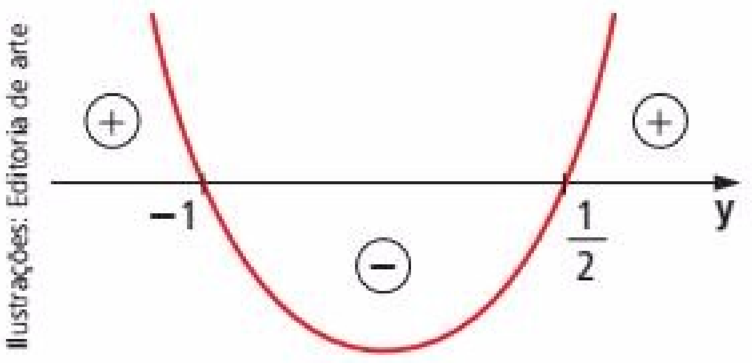
Fazendo $y = \operatorname{sen} x$, temos:

$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 > 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 > 0$$

Calculando as raízes, temos:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Então, $y' = \dfrac{1}{2}$ ou $y'' = -1$.

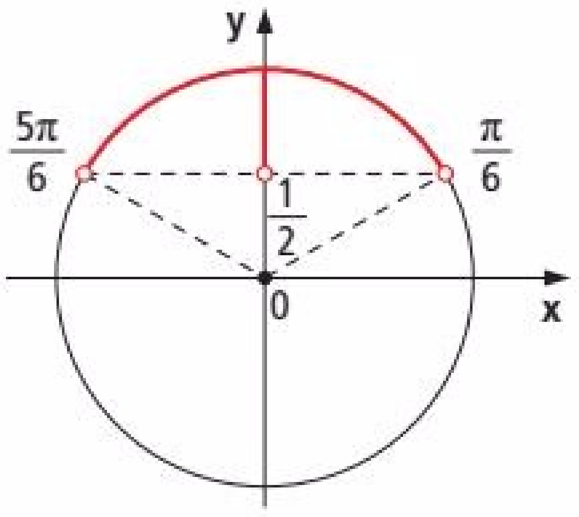


Ilustrações: Editoria de arte

Logo: $y < -1$ ou $y > \dfrac{1}{2}$.

Voltando à substituição, obtemos:

$$\operatorname{sen} x < -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$$

21 Resolva a inequação $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

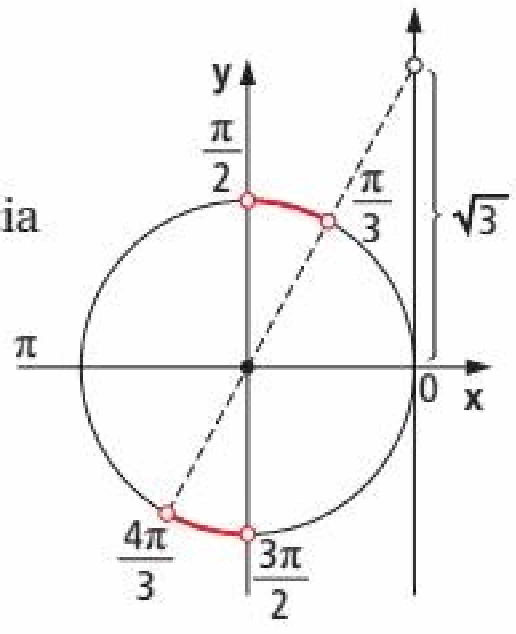
Resolução

Sabendo que $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e observando a circunferência trigonométrica, temos que:

$\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$ ou

$\dfrac{4\pi}{3} < x < \dfrac{3\pi}{2}$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

67. Mostre que: Demonstração.

a) $\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = \sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

b) $\sec^2 x - \operatorname{cossec}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$

68. Demonstre que: Demonstração.

a) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sec x}$

b) $(\cos a - \operatorname{sen} a)(\operatorname{cossec} a - \sec a) + 2 = \sec a \cdot \operatorname{cossec} a$

69. Demonstre que: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2}$. Demonstração.

70. Prove que: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\operatorname{cossec} x$. Demonstração.

71. Mostre que $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \dfrac{1 + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x - 1}$. Demonstração.

72. Mostre que $\operatorname{sen}^2 x - 2(1 + \cos x) = -4\cos^4 \dfrac{x}{2}$. Demonstração.

73. Resolva a inequação $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$, sendo $x \in [0, 2\pi[$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leqslant x < \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

74. Resolva as seguintes inequações trigonométricas, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $2\operatorname{sen} x \geqslant -1$ c) $|\operatorname{sen} x| < \dfrac{1}{2}$

b) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ d) $|\cos x| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

75. Determine o conjunto solução da inequação $\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x - 1} > 0$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

76. Sendo $x \in [0, 2\pi[$, determine o conjunto solução da inequação, $\operatorname{sen} 2x < \cos x$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

77. Sendo $x \in [0, 2\pi[$, resolva: $\dfrac{2\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} < 1$.

78. (UFJF-MG) Seja *x* um número real, tal que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

É correto afirmar que:

a) $\operatorname{sen} x > \cos x$

b) $\cos x > \operatorname{sen} x$

c) $\operatorname{tg} x > \cos x$

X d) $\operatorname{tg} x > \operatorname{sen} x$

e) $\operatorname{sen} x > \operatorname{tg} x$

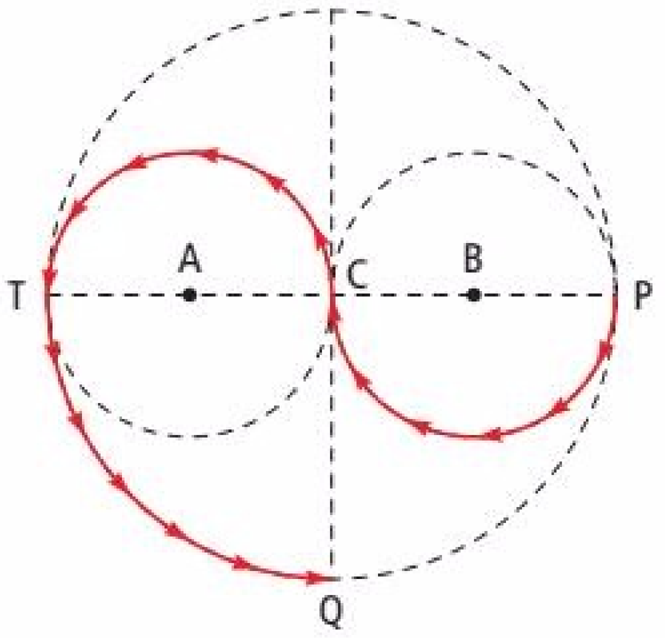
76. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x < \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

77. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. Na figura, tem-se três circunferências, de centros *A*, *B* e *C*, tangentes duas a duas. As retas QC e PT são perpendiculares. Sendo 4 m o raio da circunferência maior, quantos metros devemos percorrer para ir de *P* a *Q*, seguindo as flechas? 6π metros



2. (OBMEP) Duas formigas partem do ponto *A* e vão até o ponto *D*, andando no sentido indicado pelas flechas. A primeira percorre o semicírculo maior; a segunda, o segmento AB, o semicírculo menor e o segmento CD. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* estão alinhados e os segmentos AB e CD medem 1 cm cada um. Quantos centímetros a segunda formiga andou menos que a primeira?

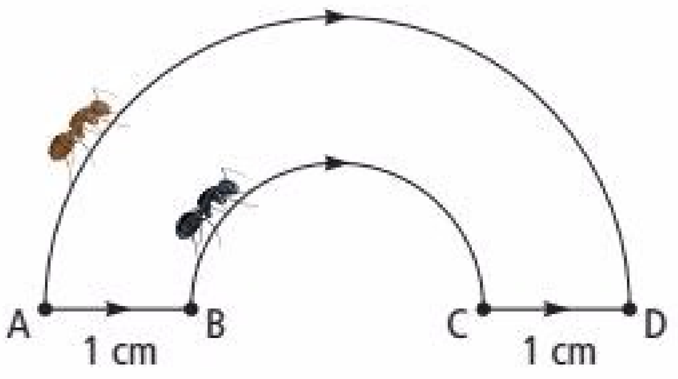
a) 2

b) π

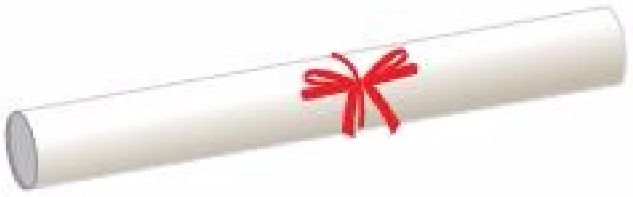
c) $\frac{\pi}{2}$

x d) π − 2

e) 2π



3. (Enem/MEC) Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro *d* em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

a) πd

b) 2πd

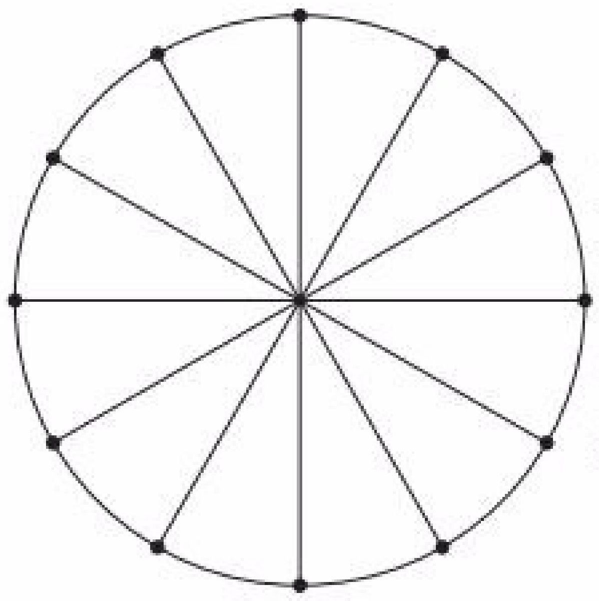
c) 4πd

x d) 5πd

e) 10πd

4. A soma das medidas de três ângulos adjacentes é 240°. O primeiro mede 60°, e o terceiro é o suplemento deste. Determine, em radianos, a medida do ângulo formado pelas bissetrizes do segundo e terceiro ângulos. $\frac{\pi}{2}$ rad

5. (Unama-PA) A roda-gigante do Parque de Diversões de Nazaré, representada na figura abaixo, tem 24 metros de diâmetro e sua circunferência está dividida em 12 arcos iguais, em cujas extremidades ficam localizados os bancos. Responda:



Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual o comprimento de cada um desses arcos? 2π m

b) Quantas voltas deverá dar uma pessoa na roda-gigante para percorrer 26π radianos? 13 voltas.

6. (FGV-SP)

a) Construa um triângulo isósceles cujo ângulo menor seja metade de cada um dos ângulos maiores e nomeie seus vértices de A, B e C, sendo $B\hat{A}C$ o ângulo menor. Em seguida, desenhe uma circunferência que passe pelos três vértices desse triângulo. Por fim, trace as bissetrizes dos dois ângulos maiores do triângulo; batize de ponto D o encontro da bissetriz de $B\hat{A}C$ com a circunferência e, de ponto E, o encontro da bissetriz de $A\hat{C}B$ com a circunferência. Notas: (i) indique a localização dos pontos A, B, C, D e E; (ii) como referência, adote para o segmento de reta *AB* qualquer tamanho entre 5 e 10 centímetros. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Imagine que a figura construída no item anterior seja a versão, em miniatura, de uma figura na qual o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede 2 km. Nesse caso, qual é o comprimento do arco $\widehat{BD}$? Aproximadamente 2 512 m.

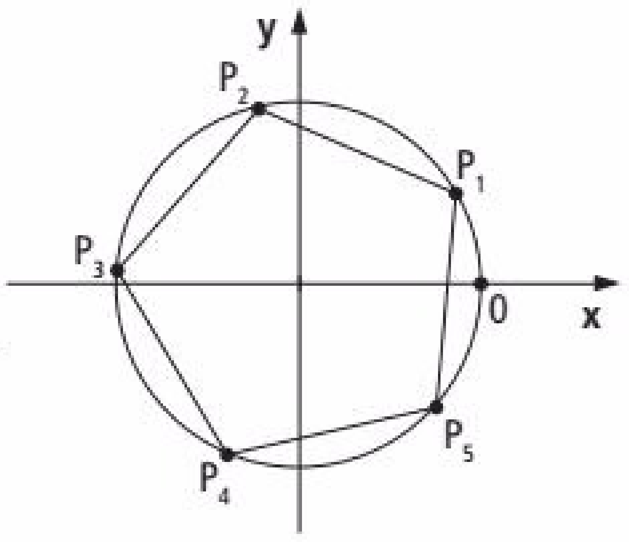
c) Na figura ampliada descrita no item anterior, qual é o perímetro do pentágono AEBDC? Se necessário, adote: $\text{sen}(36°) = 0{,}59$; $\text{sen}(54°) = 0{,}81$; $\text{sen}(72°) = 0{,}95$; $\cos(36°) = 0{,}81$; $\cos(54°) = 0{,}59$; $\cos(72°) = 0{,}31$. Aproximadamente 11 800 m.

7. (Fuvest-SP) Qual dos números é maior? Justifique.

a) sen 830° ou sen 1 195° sen 830°

b) cos (−535°) ou cos 190° cos 190°

8. (EsPCEx-SP) Na figura, está representado um círculo trigonométrico em que os pontos P_1 a P_5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P_1 corresponde a um arco de $\frac{\pi}{6}$ radiano, então o ponto P_4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radiano, é igual a:



Ilustrações: Editoria de arte

a) $\frac{13\pi}{30}$

b) $\frac{17\pi}{30}$

c) $\frac{29\pi}{30}$

[✓ d) $\frac{41\pi}{30}$]

e) $\frac{53\pi}{30}$

9. (Acafe-SC) Analise o ciclo trigonométrico a seguir e determine o perímetro do retângulo MNPQ, em unidades de comprimento.

A alternativa correta é:

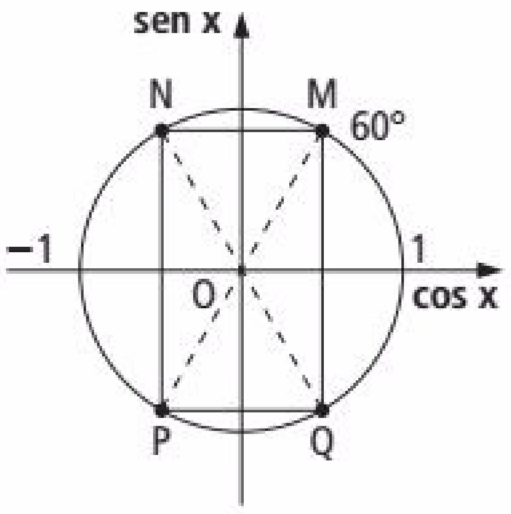
a) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1+2\sqrt{3}$

c) $1+\sqrt{3}$

d) $2+\sqrt{3}$

[✓ e) $2(1+\sqrt{3})$]



10. (Enem/MEC) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço *P*, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x)=8+5\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right)$, onde *x* representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro

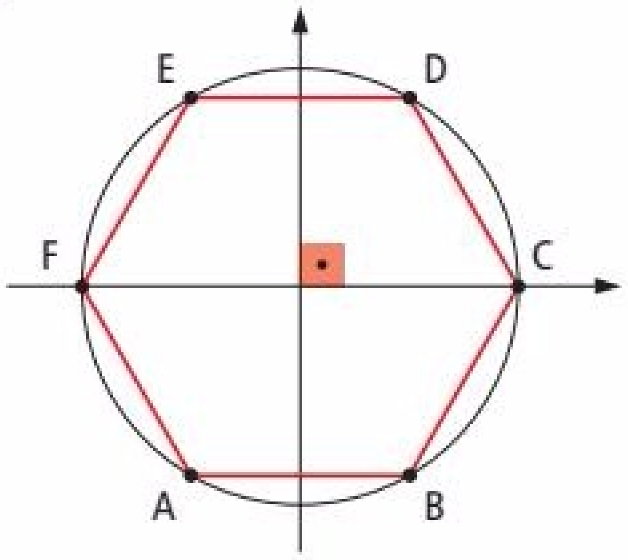
b) abril

c) junho

[✓ d) julho]

e) outubro

11. O hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência trigonométrica.



A e D = $\sqrt{3}$;
B e E = $-\sqrt{3}$;
F e C = 0

Determine a tangente dos números reais associados aos vértices desse hexágono.

12. (UFAL) A expressão $\frac{1+\text{sen } 300°}{\text{tg } 540°+\cos(-120°)}$ é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

d) $2+\sqrt{3}$

[✓ e) $-2+\sqrt{3}$]

13. (IFRS) Considere as afirmações a seguir:

I. $\text{sen}^2 144° + \cos^2 144° = 1$.
II. Para todo *x*, $\tan^2 x > \text{sen}^2 x$.
III. Para todo *x*, $\cos x = \text{sen}(x + 90°)$.

Qual(quais) está(estão) correta(s)?

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

[✓ d) Apenas I e III.]

e) I, II e III.

14. (UFF-RJ) Uma plataforma é paralela a um pátio plano. O piso da plataforma e o pátio distam 6 m um do outro e estão ligados por uma rampa reta. Sabendo que a rampa forma com o pátio um ângulo cujo cosseno vale $\frac{4}{5}$, determine o comprimento dessa rampa.

10 m

15. Determine o valor de $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\ldots\right)$. $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

16. (UEPA) A altura das ondas em determinado trecho de um oceano varia de acordo com a expressão $H(t) = 5 + 3\text{sen}(2t)$, onde t (em segundos) é o tempo e H (em metros), a altura dessas ondas. A altura máxima (crista da onda) atingida por essas ondas é de:

a) 9 m

b) 3 m

c) 5 m

d) 6 m

[✓ e) 8 m]

17. (UECE) Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $g(x) = 3x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ então o valor da soma $g(2) + g(3) + g(4) + \ldots + g(10) + g(11)$ é

a) 187

b) 183

c) 194

[✓ d) 190]

18. (Cefet-PE) Numa certa região do nosso planeta, a temperatura media semanal *T* (em °C) é expressa em função do tempo *t* (em semanas) por meio da função $T(t)=20+6\cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-12}{28}\right)\right]$. Nessas condições, calcule a maior temperatura média semanal dessa região:

x a) 26 °C b) 25 °C c) 24 °C d) 23 °C e) 22 °C

19. Simplifique as expressões:

a) $\frac{\text{tg}\,x-3}{\sec\,x-3\cdot\text{cossec}\,x}$ sen x b) $\frac{\text{sen}^2\,t-16}{\text{sen}^2\,t+2\cdot\text{sen}\,t-8}$ $\frac{\text{sen}\,t-4}{\text{sen}\,t-2}$

20. (UFRN) Marés são movimentos periódicos de rebaixamento e elevação de grandes massas de água formadas pelos oceanos, mares e lagos. Em determinada cidade litorânea, a altura da maré é dada pela função $h(t) = 3 + 0{,}2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, onde *t* é medido em horas a partir da meia-noite. Um turista contratou um passeio de carro pela orla dessa cidade e, para tanto, precisa conhecer o movimento das marés.

Desse modo,

a) qual a altura máxima atingida pela maré? 3,2

b) em quais horários isto ocorre no período de um dia? $t = 12$ ou $t = 24$

21. (UFPE) Admita que a pressão arterial P(t) de uma pessoa no instante *t*, medido em segundos, seja dada por $P(t) = 96 + 18\cos(2\pi t)$, $t \geqslant 0$.

Considerando esses dados, analise a veracidade das seguintes afirmações.

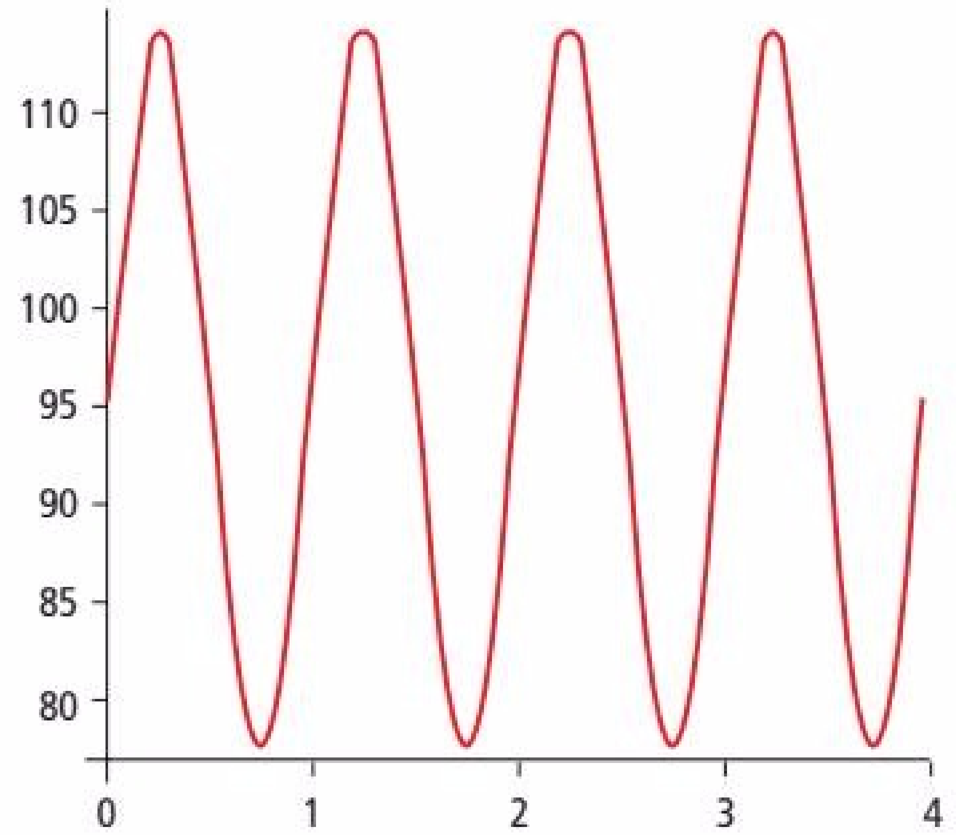
I) O valor máximo da pressão arterial da pessoa é 114. V

II) O valor mínimo da pressão arterial da pessoa é 78. V

III) A pressão arterial da pessoa se repete a cada segundo, ou seja, $P(t + 1) = P(t)$, para todo $t \geqslant 0$. V

IV) Quando $t = \frac{1}{3}$ de segundo, temos $P\left(\frac{1}{3}\right) = 105$. F

V) O gráfico de P(t) para $0 \leqslant t \leqslant 4$ é F



Editoria de arte

22. (FGV-SP) O PIB (Produto Interno Bruto) de um país, em bilhões de dólares, é dado por:

$P(x) = 800 + 50x + 40\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi x}{8}\right)$, onde $x = 0$ corresponde ao ano de 1998;

$x = 1$ corresponde ao ano de 1999;

$x = 2$ corresponde ao ano de 2000 e assim por diante.

a) Qual o PIB do ano 2018? 1 840 bilhões de dólares.

b) Mostre que, dado um ano qualquer *x*, o PIB do ano $(x + 16)$ é superior ao do ano *x* em *k* bilhões de dólares (onde *k* é uma constante). Determine também o valor de *k*. Demonstração. $k = 800$ bilhões de dólares

23. (Uncisal-AL) A quantidade de peixes, em tonelada, em uma determinada região da costa brasileira varia de acordo com a função periódica $P(t) = 720 + 250\cdot\text{sen}\,\frac{\pi\cdot t}{4}$, onde *t* é o tempo em meses.

Se $t = 1$ representa o mês de janeiro de 2005, a quantidade de peixes, em tonelada, em outubro desse mesmo ano foi de:

x a) 970 c) 780 e) 470
b) 900 d) 540

24. (UFSM-RS) Uma gráfica que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei $C(t) = 200 + 120\cdot\text{sen}\,\frac{\pi\cdot t}{2}$, com *t* medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximos e mínimos desse produto são:

a) 320 e 200 c) 200 e 80 e) 120 e 80
b) 200 e 120 x d) 320 e 80

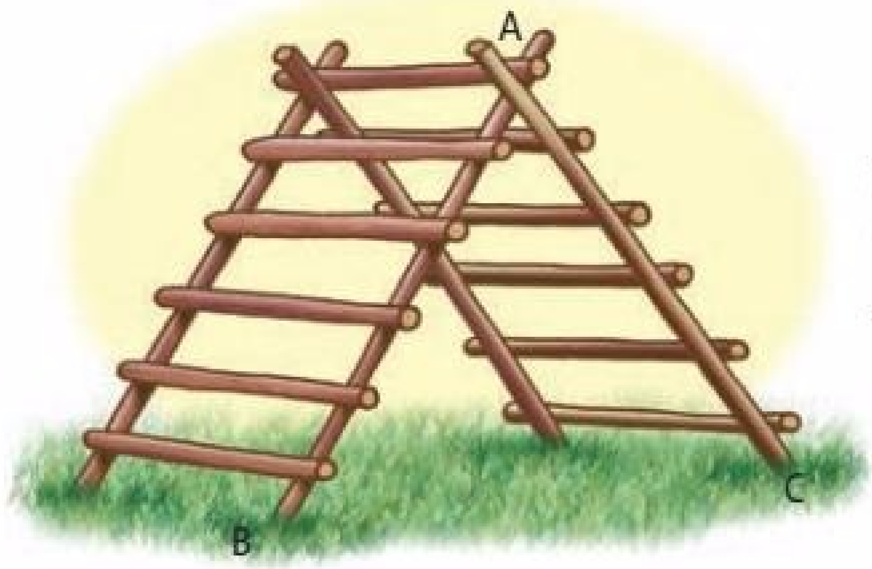
25. (Vunesp-SP) Há famílias que sobrevivem trabalhando na coleta de material para reciclagem, principalmente em cidades turísticas. Numa tal cidade, uma família trabalha diariamente na coleta das latas de alumínio. A quantidade (em quilogramas) que essa família coleta por dia varia, aumentando em finais de semana e feriados.

Um matemático observou a quantidade de alumínio coletada por essa família durante dez dias consecutivos e modelou essa situação através da seguinte função $f(x) = 10 + (x + 1)\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right)$, onde f(x) indica a quantidade de alumínio, em quilogramas, coletada pela família no dia *x*, com $1 < x < 10$, *x* inteiro positivo. Sabendo que f(x), nesse período, atinge seu valor máximo em um dos valores de *x* no qual a função $\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right)$ atinge seu máximo, determine o valor de x para o qual a quantidade coletada nesse período foi máxima e quantos quilos de alumínio foram coletados pela família nesse dia. $x = 8$ e 19 quilogramas.

26. (UFPel - RS) São cada vez mais frequentes construções de praças cujos brinquedos são montados com materiais rústicos.

A criatividade na montagem de balanços, escorregadores e gangorras de madeira vem proporcionando uma opção de lazer para as crianças.

A figura abaixo mostra um brinquedo simples que proporciona à criançada excelente atividade física.



Alberto De Stefano

Considerando os textos, a distância AB e AC igual a 2,0 m, o ângulo $B\hat{A}C$ igual a 75° e seus conhecimentos, determine:

a) A distância de B até C. 2,4 metros.

b) A altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC. 1,6 metro.

27. Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + (\cos x)$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

28. (UFPB) Sabendo que $\text{cotg}\ x = \frac{1}{2}$, o valor de $\text{tg}\ 2x$ é igual a:

a) $-\frac{1}{2}$

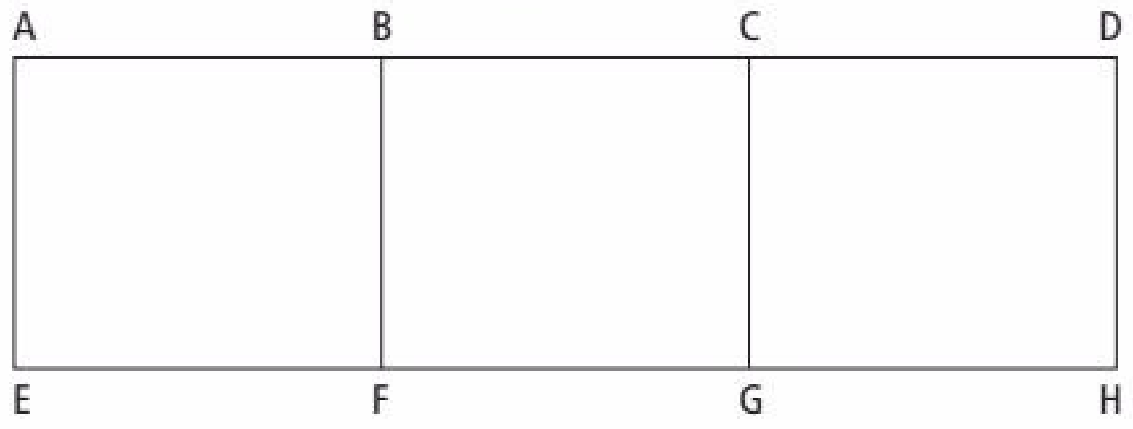
b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{4}{3}$

d) -1

x e) $-\frac{4}{3}$

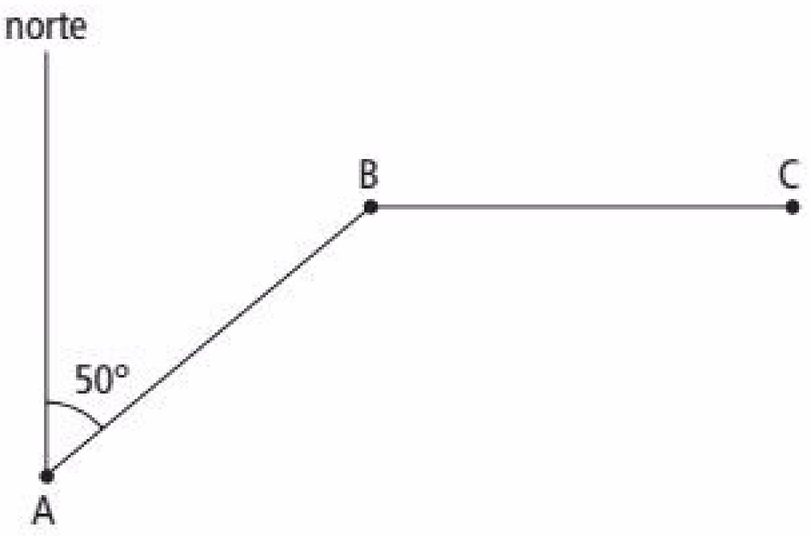
29. (UECE) A figura abaixo representa um retângulo formado pela justaposição de três quadrados.



Assim, as medidas dos segmentos AB, BC, CD, EF, FG, GH, AE, BF, CG e DH são iguais. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que a soma das medidas, em graus, dos ângulos $C\hat{E}H$ e $D\hat{E}H$ é igual a

a) 60° b) 55° x c) 45° d) 50°

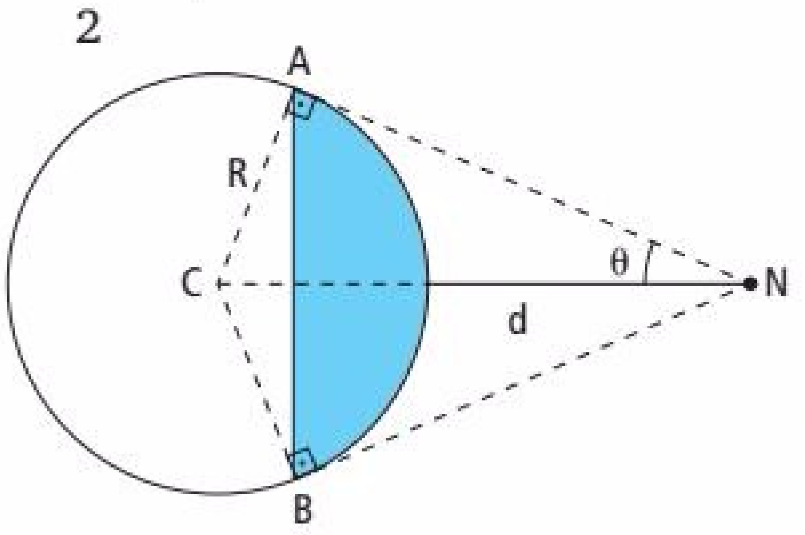
30. (FGV-RJ) A figura abaixo mostra a trajetória de Renato com seu barco.



Renato saiu do ponto A e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto B, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto B, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto C. Calcule a distância do ponto A ao ponto C. Dados: $\text{sen}\ 20° = 0{,}342$, $\cos 20° = 0{,}940$. 18,8 km.

31. (UFSCar-SP) Suponha que o planeta Terra seja uma esfera de centro C e raio R. Na figura, está representado o planeta Terra e uma nave espacial N. A fração visível da superfície da Terra por um astronauta na nave N é dada em função do ângulo θ, mostrado na figura, pela expressão:

$$f(\theta) = \frac{1 - \text{sen}\,\theta}{2}$$



Ilustrações: Editoria de arte

a) Determine o ângulo θ, em graus, para o qual é visível da nave a quarta parte da superfície da Terra e a distância da nave à superfície da Terra neste caso. (Use a aproximação $R = 6.400$ km.) $\theta = 30°$, $d = 6400$ km.

b) Se um astronauta numa nave, a uma distância d da Terra, avista a superfície da Terra com ângulo $\theta = 15°$, determine a fração visível da superfície da Terra pelo astronauta. (Use as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{6} = 2{,}4$) $\frac{3}{8}$

32. (UECE) Considerando o logaritmo na base 10 e analisando as possíveis soluções reais da equação $\log(\cos^4 x - 26\cos^2 x + 125) = 2$, pode-se afirmar corretamente que a equação

a) não possui solução.

b) possui exatamente duas soluções.

x c) possui infinitas soluções.

d) possui exatamente quatro soluções.

33. (UFG-GO) Encontre todos os valores de x tais que $\log(2^{2\,\text{sen}\,x} - 3 \cdot 2^{\text{sen}\,x} + 3) = 0$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

34. Mostre que: Demonstração.

a) $\text{sen}\, 3a = 3\,\text{sen}\, a - 4\,\text{sen}^2\, a$

b) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

c) $\text{tg}\, 3a = \dfrac{3\,\text{tg}\, a - \text{tg}^3\, a}{1 - 3\,\text{tg}^2\, a}$

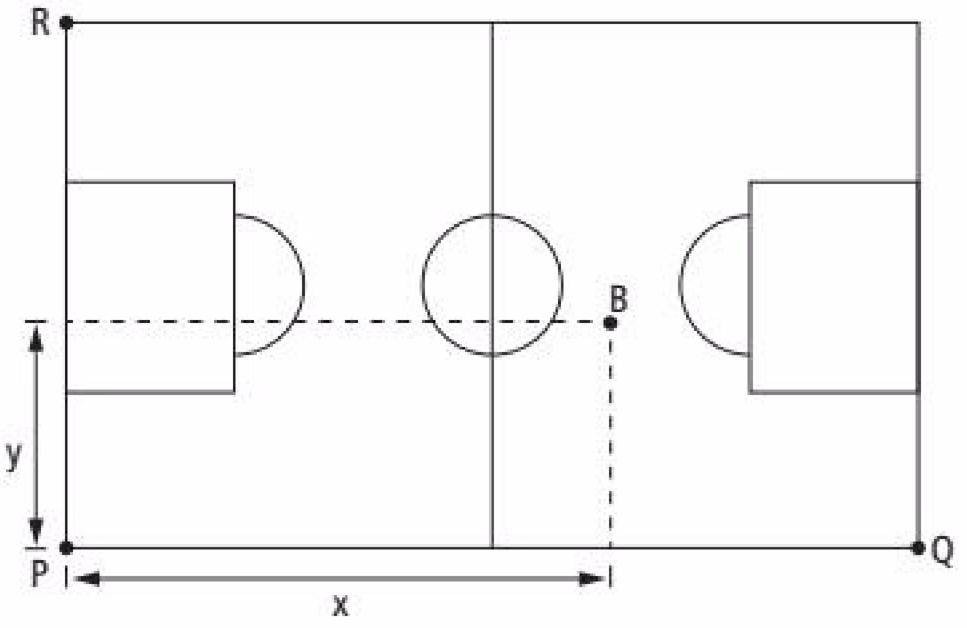
Sugestão: Faça $3a = 2a + a$.

35. Qual é o menor valor positivo de x para que $16^{-\cos x} = \frac{1}{4}$? $\frac{\pi}{3}$

36. (FMABC-SP) Uma cirurgia teve início às 10 horas de certo dia e foi encerrada no período da tarde desse mesmo dia, quando os ponteiros de um relógio estavam superpostos entre os números 2 e 3 do mostrador. Considerando que esse relógio não atrasa nem adianta, a duração dessa cirurgia, em minutos, foi de, aproximadamente,

a) 242 b) 246 X c) 251 d) 254

37. (Insper-SP) Um empreendedor está desenvolvendo um sistema para auxiliar o julgamento de lances duvidosos em partidas de futebol. Seu projeto consiste de um *chip* instalado na bola e um sensor posicionado em um dos cantos do campo (ponto P).



O sensor detecta a distância r entre os pontos P e B (bola) e a medida α do ângulo $B\hat{P}Q$. Em seguida, transforma essas informações nas distâncias x e y indicadas na figura. Isso pode ser feito por meio das expressões

a) $x = \frac{1}{r}\,\text{sen}\,\alpha$ e $y = \frac{1}{r}\cos\alpha$

b) $x = r^2\cos\alpha$ e $y = r^2\,\text{sen}\,\alpha$

c) $x = r\,\text{sen}\,2\alpha$ e $y = r\cos 2\alpha$

X d) $x = r\cos\alpha$ e $y = r\,\text{sen}\,\alpha$

e) $x = \frac{1}{r}\,\text{sen}\,2\alpha$ e $y = \frac{1}{r}\cos 2\alpha$

38. (IFSul-RS) Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$, o valor da expressão $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$ é

X a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{3}{4}$

39. (UEPG-PR) Se $A = \sec\theta + \text{tg}\,\theta$ e $B = \sec\theta - \text{tg}\,\theta$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, assinale o que for correto.

X 01) Se $\theta = \frac{\pi}{3}$ então $B > 0$

X 02) $A \cdot B = 1$

04) $\frac{A}{B} = \sec^2\theta + \text{tg}^2\,\theta$

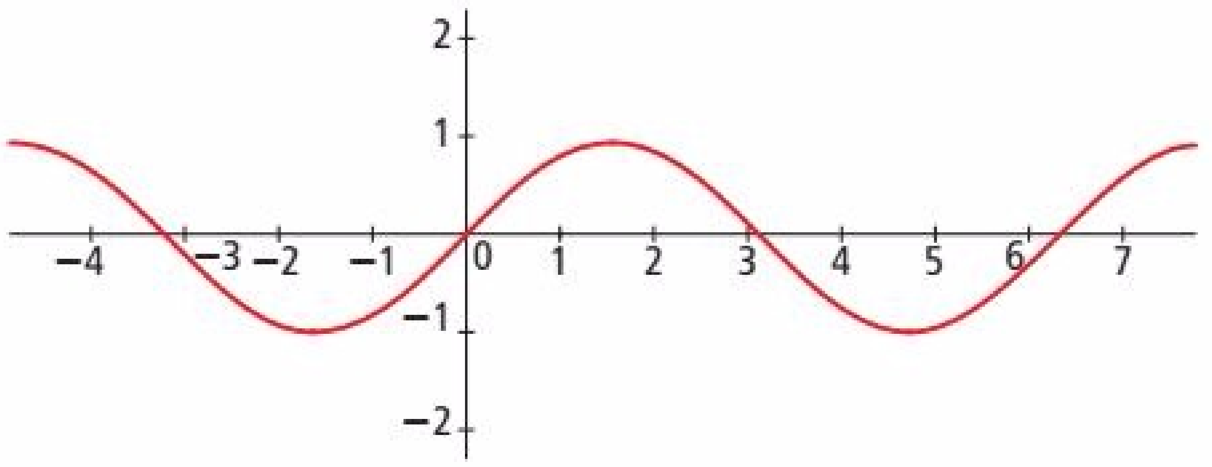
08) $A + B = \dfrac{2}{\text{sen}\,\theta}$

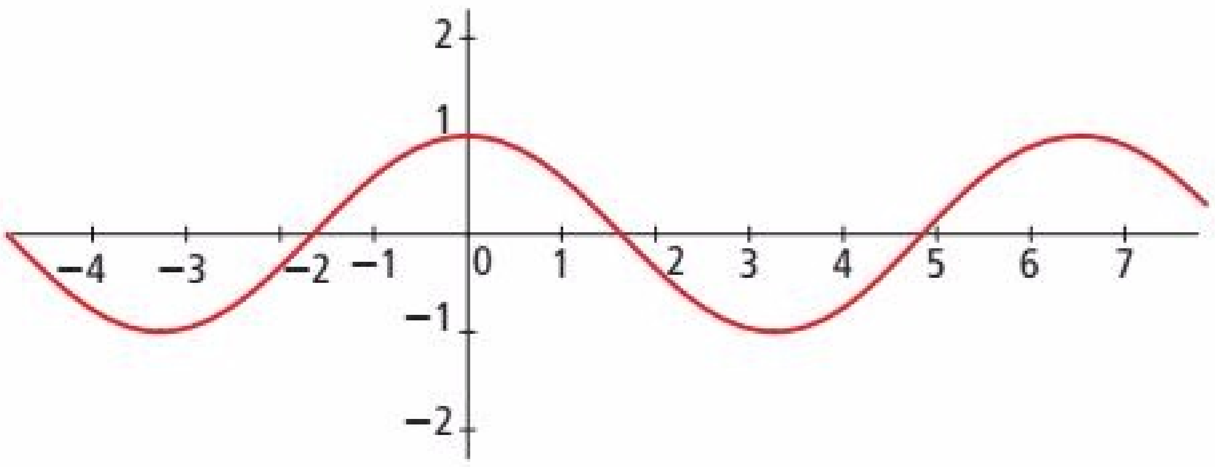
16) Se $\theta = \frac{\pi}{6}$ então $B < 0$ Soma = 01 + 02 = 03

40. (Udesc-SC) Se m é a soma de todas as raízes da equação $\text{tg}(x) - 2\,\text{sen}(2x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi]$, então $\cos\left(\frac{m^2}{\pi}\right) - \cos^2(m)$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 0
X d) −2
e) −1

41. (UCB-DF) Considere as representações gráficas das funções seno e cosseno apresentadas abaixo e seus conhecimentos de trigonometria para julgar os itens a seguir.





Ilustrações: Editoria de arte

F 0. ▨ As funções seno e cosseno são crescentes para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

V 1. ▨ $\cos(0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

V 2. ▨ As funções seno e cosseno são periódicas e limitadas.

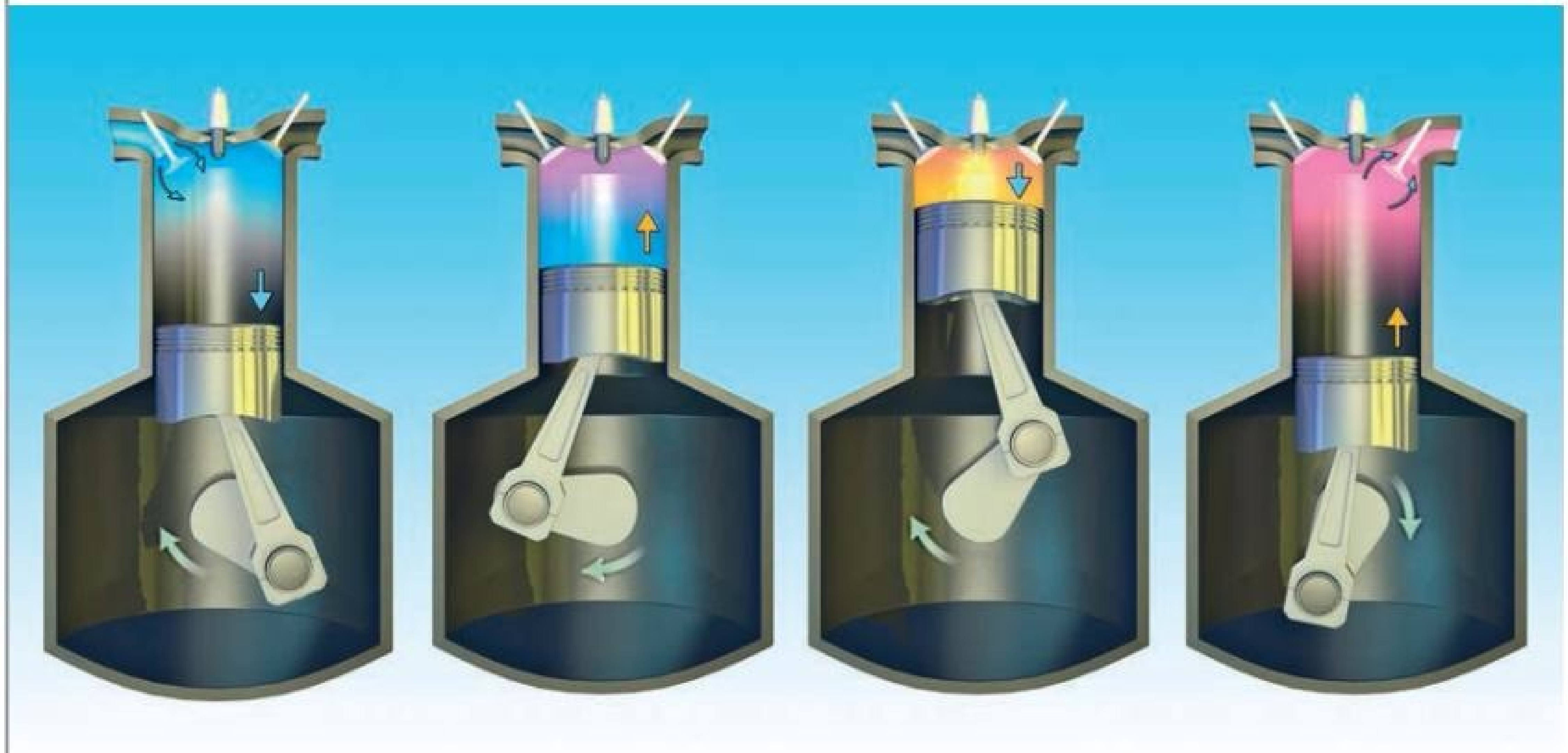
V 3. ▨ No conjunto dos números reais, a equação $\text{sen}\, x = 0$ tem infinitas raízes.

F 4. ▨ No conjunto dos números reais, a equação $\cos x = 1$ tem exatamente duas raízes.

Retomando e pesquisando

Na abertura desta unidade você conheceu um pouco mais sobre os motores a combustão interna e seu funcionamento. O tipo de motor mais utilizado em carros de passeio é o que utiliza o ciclo Otto, em que a mistura ar-combustível é aspirada para dentro do cilindro para posteriormente promover a combustão, inciada por uma faísca.

Os estágios da combustão são denominados: admissão, compressão, combustão e escape. A figura abaixo ilustra este funcionamento em cada um de seus estágios (ou tempos).



Andrea Danti/Shutterstock.com

1º tempo: O pistão desce e ocorre injeção da mistura entre ar e vapor da gasolina.

2º tempo: O pistão sobe, comprimindo a mistura.

3º tempo: A vela de ignição lança uma faísca que causa a explosão da mistura e empurra o pistão para baixo.

4º tempo: O pistão sobe e libera os gases formados na combustão.

O movimento do pistão, ao perfazer os quatro tempos de forma cíclica e contínua, é responsável pelo movimento do sistema associado a este motor. Em um motor de combustão interna de 4 tempos, no instante t = 0, o pistão está no ponto mais alto dentro do cilindro (altura 5 A). Ao iniciar o primeiro estágio, ele é deslocado para baixo, chegando à posição mais baixa dentro do pistão (altura = −A).

Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos dessa unidade para realizar as atividades a seguir.

Escreva no caderno

1. Converse com os colegas a respeito dos 4 tempos relativos ao processo de um motor ciclo Otto. Em seguida, pesquise a diferença entre combustão e explosão. Veja o Manual do Professor.

2. Supondo que a altura do pistão em função do tempo pode ser representada por função cosseno e que o tempo gasto para o pistão percorrer uma volta completa seja de 1 segundo (faça corresponder 1 segundo = 2π radianos), faça o que se pede em cada caso.

a) Escreva a lei da função trigonométrica que pode representar a situação em função de t e A.

b) Caso o pistão percorresse 3 voltas completas em 1 segundo, qual seria a função correspondente?

3. Os motores a combustão que utilizam combustíveis fósseis emitem gases poluentes originados pelo processo de funcionamento do motor. Converse com os colegas, pesquise e elabore um cartaz contendo exemplos de fontes de energia renovável, capaz de suprir as necessidades humanas ao invés de utilizar combustíveis fósseis.

Unidade 2

Matrizes, determinantes e sistemas lineares

Conhecer o valor nutricional dos alimentos que ingerimos é fundamental para cultivarmos uma dieta equilibrada e uma alimentação saudável.

Em 2001, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária – Anvisa, tornou obrigatória a presença de informações nutricionais nos rótulos dos alimentos e bebidas produzidos, comercializados e embalados na ausência do cliente e prontos para oferta ao consumidor.

As informações nutricionais devem conter, por porção em **medida caseira**, o valor energético, a quantidade de carboidratos, proteínas, gorduras totais e saturadas, colesterol, fibras alimentares, cálcio, ferro e sódio presentes no alimento. Deve apresentar o percentual que cada nutriente representa com base em uma dieta de 2 000 kcal por dia.

Vale ressaltar que a quantidade ideal de nutrientes a ser consumida varia de acordo com a sua necessidade pessoal e deve ser apontada por um profissional da área de Nutrição.

Os valores diários (VD) de referência são as quantidades dos nutrientes que se deve consumir diariamente para ter uma alimentação saudável. Observe os valores diários de alguns nutrientes: carboidratos: 300 g, proteínas: 75 g, gorduras totais: 55 g, gorduras saturadas: 22 g, colesterol: 300 mg, Fibra alimentar: 25 g, cálcio: 1 000 mg, ferro 14 mg e Sódio: 2 400 mg.

Dados obtidos em: <http://portal.anvisa.gov.br/wps/wcm/connect/5f53be80474583c58ee8de3fbc4c6735/manual_industria.pdf?MOD=AJPERES> e <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/dicas/246_rotulos_alimentos.html>. Acesso em: 25 abr. 2016.

Medida caseira é a forma de medir os alimentos sem o uso de balanças ou qualquer tipo de utensílio que se faça uma mensuração exata. Por exemplo: em fatias, biscoitos, pote, xícaras, copos, colheres de sopa entre outros.

Veja o Manual do Professor.

1. Você já conhecia a obrigatoriedade de inclusão das informações nutricionais nos rótulos dos alimentos? Por que elas são tão importantes? Discuta com os colegas.

Escreva no caderno

2. Verifique o rótulo de algum alimento que você tenha hábito de consumir regularmente. Analise com os colegas os dados nutricionais presentes no rótulo e respondam:

   Uma porção desse alimento apresenta quantidades de gorduras e sódio dentro das expectativas de valores diários apresentados pela Anvisa?

3. Você sabia que as gorduras também são importantes e necessárias ao nosso organismo? Pesquise a respeito dos benefícios que elas podem trazer e a importância do consumo controlado, dentro dos limites estabelecidos como referência.

Informac ricional
Porção d 0 g (1/3 xícara chá)
Quant de por porção
Valor ene tico 188 kcal = 790 kJ
Carboidr s 38 g 13
Proteínas 6,2 g 12
Gorduras tais 1,3 g 2
Gorduras s radas 0
Gorduras 0
Fibra alimen 1,1 g 4%
Sódio 47 2%
(*) % Valores Diários de Re com base em uma

kenary820/Shutterstock.com/Fernando Favoretto

1000 Words/Shutterstock.com

Os rótulos dos alimentos apresentam as informações nutricionais dos produtos aos consumidores. Essas informações devem ser claras para que o consumidor possa escolher alimentos mais saudáveis, por exemplo, os que contêm menos sódio. Além disso, é importante consumir alimentos como frutas, verduras e legumes para manter uma alimentação saudável.

CAPÍTULO 3

Matrizes

Com a quantidade de informações que recebemos no dia a dia, torna-se necessária uma organização para avaliar qual informação é pertinente ou de interesse pessoal. Uma das principais formas de organização da informação dá-se por meio de tabelas.

Tabelas são organizadas em linhas e colunas.

Por exemplo, abaixo temos uma tabela que mostra o consumo mensal, em quilogramas, de quatro alimentos básicos, durante um trimestre, por família.

	Consumo no 2º trimestre		
	Abril	**Maio**	**Junho**
Arroz	10 kg	8 kg	9 kg
Feijão	4 kg	5 kg	6 kg
Carne	5 kg	7 kg	10 kg
Legumes	12 kg	11 kg	16 kg

Fonte: Dados fictícios.

Assim, para localizar uma informação, basta identificar uma linha e uma coluna. Por exemplo, o consumo de feijão (linha) no mês de abril (coluna) foi de 4 kg.

É possível trabalhar apenas com os números independentemente da informação e a essa representação damos o nome de **matrizes**.

O estudo das matrizes, atualmente é mais utilizado no campo das Tecnologias.

A resolução de televisores e monitores, resoluções de máquinas fotográficas ou o desenvolvimento de animações em computação gráfica são alguns exemplos de aplicação de matrizes.

kentoh/Shutterstock.com

Atualmente, muitos equipamentos tecnológicos, como televisores, utilizam conceitos e cálculos envolvendo matrizes para o seu funcionamento.

Getty Images/Moment Open

A resolução das fotos de telefones celulares ou máquinas fotográficas também dependem de cálculos matriciais.

Conceito

Ao separar as informações numéricas da tabela do nosso exemplo, obtemos uma matriz que representa as informações descritas. Veja o modelo abaixo:

	Consumo no 2º trimestre		
	Abril	**Maio**	**Junho**
Arroz	10	8	9
Feijão	4	5	6
Carne	5	7	10
Legumes	12	11	16

Fonte: Dados fictícios.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Também podemos utilizar os colchetes para representar a matriz: $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 6 \end{bmatrix}$

Matrizes são tabelas retangulares utilizadas para organizar dados que podem ser números, funções ou elementos de qualquer natureza.

Veja outros exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -1 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

As linhas de uma matriz são numeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita. Veja o exemplo, ao lado.

Essa matriz tem 4 linhas e 3 colunas. Dizemos que essa é uma matriz do tipo 4 × 3 (lê-se: 4 por três).

$$\begin{array}{cccc} \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} & \\ 10 & 8 & 9 & \rightarrow \text{1ª linha} \\ 4 & 5 & 6 & \rightarrow \text{2ª linha} \\ 5 & 7 & 10 & \rightarrow \text{3ª linha} \\ 12 & 11 & 6 & \rightarrow \text{4ª linha} \end{array}$$

As matrizes são nomeadas com uma letra maiúscula, e cada um de seus elementos, pela mesma letra, porém minúscula, acompanhada de dois índices, respectivamente, que representam a linha e a coluna em que o elemento está localizado. Por exemplo, em $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ temos o elemento da:

- 1ª linha e 1ª coluna: $a_{11} = 2$ (lê-se: *a* um um igual a dois).
- 2ª linha e 1ª coluna: $a_{21} = 4$ (lê-se: *a* dois um igual a quatro).
- 1ª linha e 3ª coluna: $a_{13} = 0$ (lê-se: *a* um três igual a zero).
- 2ª linha e 3ª coluna: $a_{23} = 5$ (lê-se: *a* dois três igual a cinco).

Podemos representar genericamente a matriz *A* como: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

De modo geral, uma matriz *A* de *m* linhas e *n* colunas $(m \times n)$ é indicada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ com } m, n \in \mathbb{N}^*$$

Abreviadamente, a matriz genérica *A* pode ser representada por:

$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$

Nessa expressão, a_{ij} representa o elemento que está na linha *i* e na coluna *j*, em que *i* assume valores no conjunto {1, 2, 3, ..., m} e *j* assume valores no conjunto {1, 2, 3, ..., n}.

Matrizes especiais

Matriz linha e matriz coluna

A **matriz linha** é aquela que tem apenas uma linha. Já a **matriz coluna** é aquela que tem apenas uma coluna.

Veja alguns exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ → matriz linha do tipo 1 × 2

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ → matriz linha do tipo 1 × 3

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ → matriz coluna do tipo 2 × 1

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → matriz coluna do tipo 3 × 1

Matriz nula

A **matriz nula** é aquela que tem todos os elementos iguais a zero. Assim, vamos denominar que uma matriz nula 3 × 2 como $0_{3\times2}$, ou ainda, uma matriz nula de ordem m × n, em que m, n $\in \mathbb{N}$, como $0_{m\times n}$.

Exemplos:

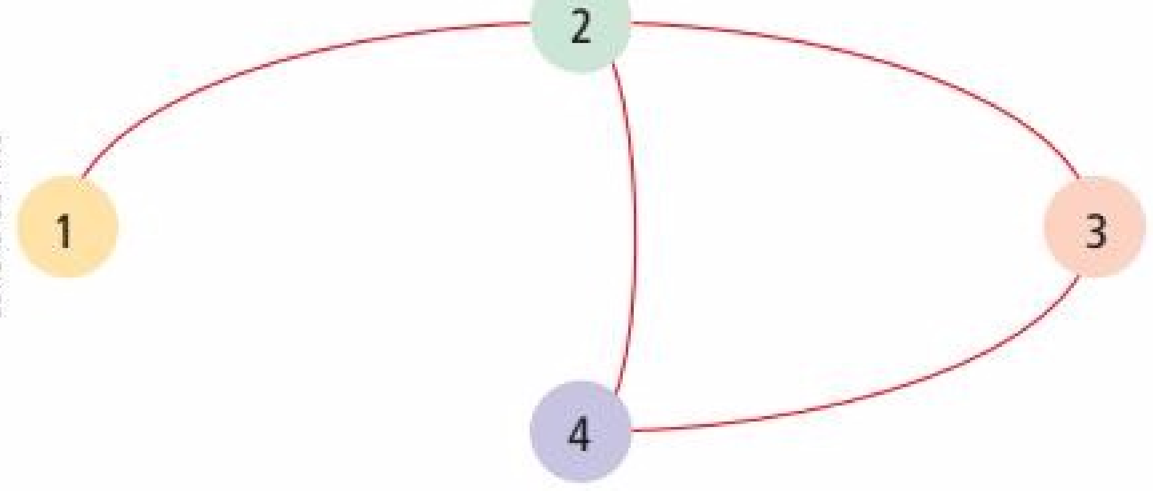
No caso da matriz nula, utilizamos o número zero, 0, para nomeá-la seguido de seu tipo.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz nula do tipo } 3 \times 2$$

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz nula de ordem } m \times n.$$

Exercícios resolvidos

1 O diagrama abaixo representa um mapa rodoviário mostrando as estradas que ligam as cidades 1, 2, 3 e 4.



A matriz $A = [a_{ij}]_{4\times4}$ associada a esse mapa é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \text{ está ligada diretamente a } j \\ 0, \text{ se } i = j \text{ ou } i \text{ não tem ligação direta com } j \end{cases}$$

Sabendo que i e j referem-se às cidades do mapa e variam no conjunto {1, 2, 3, 4}, construa a matriz A.

Resolução

A representação genérica da matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

De acordo com a definição, temos:

- a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{32}, a_{34}, a_{42} e a_{43} são iguais a 1, pois as cidades estão diretamente ligadas entre si.
- a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44} são iguais a zero, pois i = j.
- a_{13}, a_{14}, a_{31} e a_{41} são iguais a zero, pois as cidades não estão ligadas diretamente entre si.

$$\text{Portanto: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Construa as matrizes sabendo que:

a) $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ j - i, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

b) $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, em que: $b_{ij} = \begin{cases} 2i + j, \text{ se } i \geqslant j \\ 2j - i, \text{ se } i < j \end{cases}$

Resolução

Para construir cada matriz é necessário associar os índices de linha e coluna de cada elemento à fórmula e, em seguida, calcular seu valor numérico.

a) $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ j - i, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$a_{11} \Rightarrow i = 1$ e $j = 1$, assim:
$i = j \Rightarrow a_{11} = i + j = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a_{11} = 2$
$a_{12} \Rightarrow i = 1$ e $j = 2$, assim:
$i \neq j \Rightarrow a_{12} = j - i = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
$a_{13} \Rightarrow i = 1$ e $j = 3$, assim:
$i \neq j \Rightarrow a_{13} = j - i = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a_{12} = 2$
$a_{21} \Rightarrow i = 2$ e $j = 1$, assim:
$i \neq j \Rightarrow a_{21} = j - i = 1 - 2 = -1 \Rightarrow a_{21} = -1$
$a_{22} \Rightarrow i = 2$ e $j = 2$, assim:
$i = j \Rightarrow a_{12} = i + j = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_{22} = 4$
$a_{23} \Rightarrow i = 2$ e $j = 3$, assim:
$i \neq j \Rightarrow a_{23} = j - i = 3 - 2 = 1 \Rightarrow a_{32} = 1$

Assim, a matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, em que: $b_{ij} = \begin{cases} 2i + j, \text{ se } i \geqslant j \\ 2j - i, \text{ se } i < j \end{cases}$

$b_{11} \Rightarrow i = 1$ e $j = 1$, assim:
$i = j \Rightarrow b_{11} = 2i + j = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow b_{11} = 3$
$b_{12} \Rightarrow i = 1$ e $j = 2$, assim:
$i < j \Rightarrow b_{12} = 2j - i = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow b_{12} = 3$
$b_{13} \Rightarrow i = 1$ e $j = 3$, assim:
$i < j \Rightarrow b_{13} = 2j - i = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \Rightarrow b_{12} = 5$
$b_{21} \Rightarrow i = 2$ e $j = 1$, assim:
$i > j \Rightarrow b_{21} = 2i + j = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow b_{21} = 5$
$b_{22} \Rightarrow i = 2$ e $j = 2$, assim:
$i = j \Rightarrow b_{12} = 2i + j = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \Rightarrow b_{22} = 6$
$b_{23} \Rightarrow i = 2$ e $j = 3$, assim:
$i < j \Rightarrow b_{23} = 2j - i = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \Rightarrow b_{32} = 4$
$b_{31} \Rightarrow i = 3$ e $j = 1$, assim:
$i > j \Rightarrow b_{11} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \Rightarrow b_{11} = 7$
$b_{32} \Rightarrow i = 3$ e $j = 2$, assim:
$i > j \Rightarrow b_{12} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \Rightarrow b_{12} = 8$
$b_{33} \Rightarrow i = 3$ e $j = 3$, assim:
$i = j \Rightarrow b_{13} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 3 = 9 \Rightarrow b_{12} = 9$

Assim, a matriz *B* é:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Obtenha a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, em que $a_{ij} = 3i - j^2$.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

2. Construa as matrizes: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $A = (a_{ij})_{1\times 3}$, tal que $a_{ij} = 2i - j$

b) $B = (b_{ij})_{4\times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \leqslant j \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$

c) $C = (c_{ij})_{3\times 3}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, \text{ se } i \neq j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$

3. Escreva a matriz *A* em cada caso: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $A = (a_{ij})_{3\times 1}$, sendo $a_{ij} = (j - i)^2$

b) $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, sendo $a_{ij} = (-1)^{3i - j}$

c) $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, sendo $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j}, \text{ se } i < j \\ i^2 - j + 1, \text{ se } i \geqslant j \end{cases}$

4. (Vunesp-SP) Imagine os números inteiros não negativos formando a seguinte tabela:

0	3	6	9	12	...
1	4	7	10	13	...
2	5	8	11	14	...

a) Em que linha da tabela se encontra o número 319? 2ª linha

b) Em que coluna se encontra esse número? b) 107ª coluna

5. (UEPA) A tabela abaixo, regularmente disposta em linhas (atleta) e colunas (dia), representa os registros dos tempos de treinamento dos atletas *A*, *B* e *C* em 3 dias. Sendo *i* a ordem das linhas e *j* a ordem das colunas e $a_{ij} = 30i + 10j$ o elemento genérico desta tabela, com *i* e *j* dados em minutos, o tempo de treinamento gasto pelo atleta *B* no terceiro dia foi de:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1^{\text{o}} \text{ dia} & 2^{\text{o}} \text{ dia} & 3^{\text{o}} \text{ dia} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

x a) 1 hora e 30 minutos
b) 1 hora e 50 minutos
c) 2 horas
d) 2 horas e 10 minutos
e) 2 horas e 30 minutos

Matriz quadrada

Matriz quadrada é aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja, $m = n$. Nesse caso, chamamos de matriz $n \times n$ ou, simplesmente, matriz quadrada de ordem *n*.

Veja alguns exemplos:

a) A matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

b) A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

Em uma matriz quadrada, os elementos a_{ij} para os quais $i = j$ formam uma diagonal denominada **diagonal principal**. Já os elementos a_{ij} para os quais $i + j = n + 1$ é chamada **diagonal secundária**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

diagonal principal (i = j).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária
(i + j = n + 1).

Matriz triangular: É a matriz de ordem *n* cujos elementos acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Veja alguns exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: É a matriz de ordem *n* na qual $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Veja alguns exemplos:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade: É a matriz quadrada de ordem *n* na qual $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$ (os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1).

A matriz identidade também é conhecida como **matriz unidade** de ordem *n* e é indicada por I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Observe que todos os elementos dessa matriz que **não estão** na diagonal principal são iguais a zero, e todos os elementos que **estão** na diagonal principal são iguais a 1.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

6. (Unimontes-MG) Ao associarmos as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

podemos afirmar que a palavra UNIMONTES pode ser codificada pela matriz 3 × 3 dada por

a) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

x b) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

7. Dizemos que uma matriz quadrada é um quadrado mágico se as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna, das diagonais, principal e secundária, são todas iguais. Diga quais matrizes a seguir formam um quadrado mágico: A e B.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

8. Escreva a matriz identidade de ordem para: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) n = 2 b) n = 3 c) n = 5

9. Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 4, em que $(a_{ij}) = i - j$. Zero.

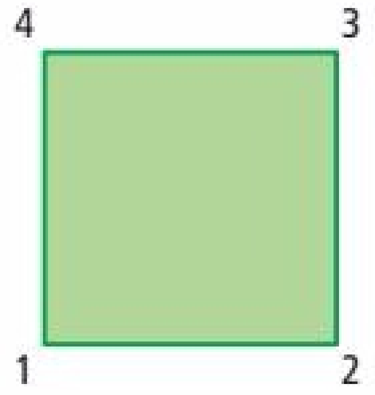
10. Escreva: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) A matriz triangular de ordem 3, em que

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ para } i < j \\ a_{ij} = i + j, \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 5, \text{ para } i > j \end{cases}$$

b) A matriz diagonal de ordem 4, em que $a_{ij} = 2i - j$, para $i = j$.

11. (Unimep-SP) É dado um quadrado de lado medindo 1 unidade, numerado conforme a figura.



Editoria de arte

A matriz 4 × 4, tal que a_{ij} é a distância entre os vértices de números *i* e *j*, é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

x b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) nenhuma das alternativas anteriores.

12. Responda e justifique: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Toda matriz identidade é matriz diagonal?

b) Toda matriz diagonal é matriz identidade?

13. (Cesupa-PA) Aproveitando o recesso do mês de julho, o Cesupa pretende alterar parte do sistema de refrigeração em 3 de seus prédios, num período de uma semana. Para tanto, convida 3 firmas para submeter orçamento para o trabalho envolvido em cada um dos prédios. As propostas recebidas estão representadas na matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

onde a_{ij} é o orçamento em unidades de mil reais da firma *i* para o prédio *j*.

Como cada firma, no período previsto de uma semana, só consegue fazer o serviço em um dos prédios, será preciso então contratar uma firma diferente para cada prédio. A contratação firma/prédio, dentre as abaixo apresentadas, que levará o Cesupa a uma despesa mínima é:

x a) a_{11}, a_{22}, a_{33}

b) a_{11}, a_{23}, a_{32}

c) a_{12}, a_{23}, a_{31}

d) a_{13}, a_{22}, a_{31}

Igualdade de matrizes

Considere as matrizes *A* e *B* do tipo 3 × 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 - 1 & 5 + 3 \\ 2 - 2 & 5 \cdot 1 \\ 1 - 2 & 4 : 2 \end{pmatrix}$$

Nessas matrizes, todos os elementos correspondentes são iguais. Veja:

$$a_{11} = 3 \text{ e } b_{11} = 4 - 1 = 3, \text{ então: } a_{11} = b_{11}$$

$$a_{12} = 8 \text{ e } b_{12} = 5 + 3 = 8, \text{ então: } a_{12} = b_{12}$$

$$a_{21} = 0 \text{ e } b_{21} = 2 - 2 = 0, \text{ então: } a_{21} = b_{21}$$

$$a_{22} = 5 \text{ e } b_{22} = 5 \cdot 1 = 5, \text{ então: } a_{22} = b_{22}$$

$$a_{31} = -1 \text{ e } b_{31} = 1 - 2 = -1, \text{ então: } a_{31} = b_{31}$$

$$a_{32} = 2 \text{ e } b_{32} = 4 : 2 = 2, \text{ então: } a_{32} = b_{32}$$

Assim, concluímos que A = B. De modo geral, temos que:

Dadas matrizes de mesmo tipo m × n: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, se cada elemento de *A* for igual ao elemento correspondente (que ocupa a mesma posição) de *B*, as matrizes *A* e *B* são ditas iguais.

Adição e subtração de matrizes

Veja a situação a seguir:

A editora da dona Edite elaborou um projeto de 12 coleções de livros de Matemática para venda ao governo e para venda nas livrarias. As coleções serão destinadas aos seguintes segmentos: Ensino Fundamental I (EF I), Ensino Fundamental II (EF II) e Ensino Médio (EM). O projeto propõe duas versões para cada volume: a do livro do aluno (LA) e a do livro do professor (LP). Veja o número de páginas previstas para essas coleções:

Vendas ao governo

	EF I	EF II	EM
LA	1024	1376	1760
LP	1344	1632	2912

Fonte: Dados fictícios.

Vendas nas livrarias

	EF I	EF II	EM
LA	880	1312	1680
LP	1360	1536	2520

Fonte: Dados fictícios.

Para saber os totais de páginas das duas versões dessas coleções, basta adicionar os valores correspondentes. Veja a tabela:

	Total de páginas de cada versão por coleção		
	EF I	**EF II**	**EM**
LA	1024 + 880 = 1904	1376 + 1312 = 2688	1760 + 1680 = 3440
LP	1344 + 1360 = 2704	1632 + 1536 = 3168	2912 + 2520 = 5432

Fonte: Dados fictícios.

Para saber quantas páginas cada coleção para venda ao governo terá a mais que cada coleção para venda nas livrarias, basta subtrair os valores correspondentes.

	Diferença de páginas de cada versão por coleção		
	EF I	**EF II**	**EM**
LA	1024 − 880 = 144	1376 − 1312 = 64	1760 − 1680 = 80
LP	1344 − 1360 = −16	1632 − 1536 = 96	2912 − 2520 = 392

Fonte: Dados fictícios.

O resultado −16 na versão LP do Ensino Fundamental I significa que, para vendas ao governo, essa versão tem menos páginas do que a para vendas nas livrarias.

Dadas as matrizes de mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a **matriz soma** de *A* com *B* é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Essa situação ilustra a obtenção da matriz soma e da matriz diferença.

Acompanhe o exemplo a seguir:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcule a matriz C sabendo que C = A + B.

Como C = A + B, sabemos que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, então:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+0 \\ 2+3 & 3+2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Dadas as matrizes de mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a **matriz diferença** de *A* e *B* é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Utilizando as matrizes *A* e *B*, vamos calcular a matriz *D*, sabendo que D = A − B.

Assim, como D = A − B podemos definir que $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, então:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-0 \\ 2-3 & 3-2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz oposta

Denominamos **matriz oposta** de uma matriz *A* a matriz **−A** cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes de *A*.

Veja o exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Observe que −A, matriz oposta da matriz *A*, é obtida trocando-se os sinais de todos os elementos de *A*.

Desse modo, a subtração de matrizes também pode ser efetuada assim:

$$C = A - B \Rightarrow C = A + \boxed{(-B)} \longrightarrow \text{oposta de } B$$

Propriedades da adição de matrizes

Para matrizes *A*, *B*, *C* e 0 (matriz nula) de mesmo tipo m × n, valem as propriedades:

1ª) Propriedade comutativa: $A + B = B + A$

2ª) Propriedade associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3ª) Propriedade elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$

4ª) Propriedade elemento oposto: $A + (-A) = A - A = 0$

Exercício resolvido

3 Dada a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, na qual

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i > j \\ -1, \text{ se } i < j \end{cases}, \text{ calcule } A + I_3.$$

Resolução

Inicialmente, vamos determinar a matriz *A*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 0; & a_{12} = -1; & a_{13} = -1 \\ a_{21} = 1; & a_{22} = 0; & a_{23} = -1 \\ a_{31} = 1; & a_{32} = 1; & a_{33} = 0 \end{matrix}$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Como I_3 é a matriz identidade de ordem 3, obtemos:

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

14. Determine o valor de cada incógnita para que as matrizes sejam iguais: $\begin{bmatrix} 3 & a & b \\ c-1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 & -5 & 1 \\ 4 & y & z+3 \end{bmatrix}$

$a = -5$; $b = 1$; $c = 5$; $x = 5$; $y = 4$; $z = -3$

15. Determine *x*, *y* e *z* para que: $\begin{bmatrix} 2^x & y^2 \\ \log_2 32 & |z| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 25 \\ y & 9 \end{bmatrix}$ $x = -3$; $y = 5$; $z = \pm 9$

16. Seja *A* a matriz diagonal de ordem 3, em que $a_{ij} = 2i - j$, para $i = j$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, definida por $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ i+j, \text{ se } i = j \\ 2, \text{ se } i > j \end{cases}$. Calcule A + B.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

17. Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, calcule a matriz *X*, tal que $X + A - B = 0$. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

18. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, mostre que: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $B + 0_{2\times 2} = B$

d) $C + (-C) = 0_{2\times 2}$

19. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B

b) B − A

19. a) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & 13 \end{bmatrix}$ b) $B - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

20. Considere as seguintes matrizes:

$A = (a_{ij})_{2\times 3}$, definida por $a_{ij} = i + j$

$B = (b_{ij})_{2\times 3}$, definida por $b_{ij} = i - j$

Determine o elemento c_{23} da matriz $C = A + B$. 4

21. Ache *m*, *n*, *p* e *q*, de modo que: $\begin{bmatrix} m & 2m \\ p & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & -n \\ q & -3q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $m = 5$; $n = 2$; $p = 2$; $q = -1$

22. Dadas $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcule *X* tal que $X + A - (B + C) = 0$. $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

23. Calcule *x* e *y*, sabendo que: $\begin{bmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. $x = 1$ e $y = -1$

24. Uma escola fez uma pesquisa para identificar a origem étnica de seus alunos. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos em dois segmentos: no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

	Etnia dos alunos			
	Ensino Fundamental		**Ensino Médio**	
Sexo **Origem étnica**	**Meninos**	**Meninas**	**Meninos**	**Meninas**
Branca	340	410	180	152
Negra	105	87	64	36
Amarela	96	134	113	88

Fonte: Dados fictícios.

24. a) $A = \begin{bmatrix} 340 & 410 \\ 105 & 87 \\ 96 & 134 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 180 & 152 \\ 64 & 36 \\ 113 & 88 \end{bmatrix}$

b) $C = A + B = \begin{bmatrix} 520 & 562 \\ 169 & 123 \\ 209 & 222 \end{bmatrix}$

a) Ordene esses dados em duas matrizes, *A* e *B*, respectivamente.

b) Determine a matriz $C = A + B$, em que *C* representa o total de alunos da escola (meninos e meninas) de acordo com suas origens.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Vamos voltar ao caso da editora da dona Edite. Uma empresa de transporte levará a uma escola municipal uma remessa de 200 livros de cada coleção de venda ao governo. Sabendo que cada página tem 1 grama, para calcular a massa de cada coleção dessa remessa, desconsiderando as capas, o transportador multiplica por 200 a quantidade de páginas de cada coleção.

Veja como ele pode efetuar essa multiplicação:

$$200 \cdot \begin{pmatrix} 1024 & 1376 & 1760 \\ 1344 & 1632 & 2912 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \cdot 1024 & 200 \cdot 1376 & 200 \cdot 1760 \\ 200 \cdot 1344 & 200 \cdot 1632 & 200 \cdot 2912 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204800 & 275200 & 352000 \\ 268800 & 326400 & 582400 \end{pmatrix}$$

Assim, o registro dessa situação é dado pela tabela:

Quantidade de páginas			
	EF I	**EF II**	**EM**
LA	204 800	275 200	352 000
LP	268 800	326 400	582 400

Fonte: Dados fictícios.

Para multiplicar um número real por uma matriz, multiplicamos o número por todos os elementos da matriz e o resultado será uma matriz do mesmo tipo.

Dada uma matriz *A*, de ordem m × n, e um número real *k*, denominamos o produto de *k* por *A* a matriz *B*, de ordem, m × n, em que $B = kA$ e $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Exercícios resolvidos

4 Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine a matriz *X*, tal que $2X + A - B = 0$.

Resolução

$$2X + A - B = 0 \Rightarrow 2X = B - A \Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Substituindo: $X = \frac{1}{2} \cdot (B - A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

5 Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha as matrizes *M* e *N*, tais que $\begin{cases} 2M + N = A - B \\ M + 3N = 2A + B \end{cases}$.

Resolução

$$\begin{cases} 2M + N = A - B \\ M + 3N = 2A + B \times (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \cancel{2M} + N = A - B \\ \underline{-\cancel{2M} - 6N = -4A - 2B} \\ -5N = -3A - 3B \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5N = 3A + 3B \Rightarrow 5N = 3 \cdot (A + B) \Rightarrow N = \frac{3}{5}(A + B)$$

Sabemos que:

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Substituindo: $N = \frac{3}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 3 & \frac{6}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Voltando ao sistema, temos:

$$\begin{cases} 2M + N = A - B \times (-3) \\ M + 3N = 2A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -6M - \cancel{3N} = -3A + 3B \\ \underline{M + \cancel{3N} = 2A + B} \\ -5M = -A + 4B \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5M = A - 4B \Rightarrow M = \frac{1}{5} \cdot A - \frac{4}{5} \cdot B$$

Substituindo: $M = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

25. Sendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $2A$

b) $-3B$

c) $\frac{1}{2}B$

d) $3A + 2B$

26. Sendo $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, mostre que: Demonstração.

a) $\alpha(\beta X)=(\alpha\beta)X$

b) $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$

c) $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$

d) $1 \cdot Y = Y$

27. Encontre o valor de x para que a igualdade

$2 \cdot \begin{bmatrix} x^2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ seja verdadeira. $x = -2$

28. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ e

$B=\begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & -6 & 15 \end{bmatrix}$, determine, se possível:

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $\frac{1}{2}(A+B)$

b) $-4A-\frac{2}{3}B$

29. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $A + B - C$

b) $2A - \frac{1}{2}B + 3C$

c) $3 \cdot (A - B) - 2 \cdot (C - B)$

d) X, sabendo que $\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C$.

30. Sejam as matrizes: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

$A=(a_{ij})_{2\times 2}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} i+j, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i=j \end{cases}$

$B=(b_{ij})_{2\times 2}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 2i-j, \text{ se } i=j \end{cases}$

Calcule:

a) $C = 2A - 3B$

b) $D=\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}B$

Matriz transposta

Dada uma matriz *A* do tipo m × n, denominamos **matriz transposta** de *A* (indicamos $\mathbf{A^t}$) a matriz do tipo n × m obtida trocando-se ordenadamente as linhas de *A* pelas colunas de *A*.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$, então sua transposta é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

Observe:

- A 1ª linha de *A* é igual à 1ª coluna de A^t.
- A 2ª linha de *A* é igual à 2ª coluna de A^t.
- A 3ª linha de *A* é igual à 3ª coluna de A^t.

Veja outros exemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Propriedades da matriz transposta

Para toda matriz *A* de ordem qualquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) Propriedade: $(A^t)^t = A$

2ª) Propriedade: $(kA)^t = kA^t$

3ª) Propriedade: $(A + B)^t = A^t + B^t$

Matriz simétrica

Uma matriz quadrada *A* de ordem *n* é chamada **matriz simétrica** quando $\mathbf{A = A^t}$.

Veja exemplos de matrizes simétricas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, porque $A = A^t$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, porque $B = B^t$

Observe que, nessas matrizes, dois elementos simétricos em relação à diagonal principal são **iguais**, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$.

Observação:

Quando temos $A = -A^t$, dizemos que a matriz *A* é **antissimétrica**.

Exercícios resolvidos

6 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+y & 3x-y \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, calcule *x* e *y* para que $A = B^t$.

Resolução

$A = B^t \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 1 \end{bmatrix}$

Duas matrizes são iguais quando os elementos de mesma posição são iguais, logo: $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=10 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{cases} +$$

$$4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

$$x + y = 2$$
$$3 + y = 2$$
$$y = -1$$

Assim, $x = 3$ e $y = -1$.

7 Sendo $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{se } i \leqslant j \\ i \cdot j, \text{se } i > j \end{cases}$, determine o elemento *x* da 4ª linha e 3ª coluna da matriz A^t.

Resolução

O elemento *x* da 4ª linha e 3ª coluna da matriz A^t corresponde ao elemento da 3ª linha e 4ª coluna da matriz *A*.

$x = a_{34} = i - j = 3 - 4 \Rightarrow x = -1$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

31. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ z & m & 2 \end{bmatrix}$.

Calcule *x*, *y*, *z* e *m* tais que $A = B^t$. $x = 4; y = 8; z = -3; m = 0$

32. Determine *x* para que $M = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ seja simétrica. $x = \pm 2$

33. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, mostre que $(A^t)^t = A$. Demonstração.

34. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix}$ admite a transposta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{pmatrix}$. Nessas condições, calcule *x*, *y* e *z*. $x = 4; y = 1; z = 5$

35. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, obtenha X tal que $X = A + A^t$.

$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

36. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2y \\ 3 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} y^2 & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$.

Se $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, determine a transposta de *A*.

$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

37. Determine o elemento da 3ª linha da matriz $C = \left(\frac{1}{4}B - \frac{1}{2}A\right)^t$, em que $A = (2 \ \ -4 \ \ 6)$ e $B = (4 \ \ -8 \ \ 12)$. $c_{31} = 0$

Multiplicação de matrizes

Acompanhe a situação a seguir.

Sandra oferece mensalmente alimentos a dois orfanatos. Para o orfanato 1, são doados 25 kg de arroz, 20 kg de feijão, 30 kg de carne e 32 kg de batata. Para o orfanato 2, são doados 28 kg de arroz, 24 kg de feijão, 35 kg de carne e 38 kg de batata.

Sandra faz a cotação de preços, em reais, em dois supermercados. Veja:

Cotação de preços		
Mercadoria (1 kg)	**Supermercado 1**	**Supermercado 2**
Arroz	3,10	2,80
Feijão	3,00	3,20
Carne	15,00	22,00
Batata	3,60	3,20

Fonte: Dados fictícios.

Vamos determinar o gasto mensal de Sandra, por orfanato, supondo que todas as mercadorias sejam adquiridas no mesmo estabelecimento e que este represente a melhor opção de compra.

Com a matriz *A*, representamos a quantidade de quilogramas a ser comprada de cada mercadoria para os dois orfanatos:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{orfanato 1} \\ \rightarrow \text{orfanato 2} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{arroz} & \text{feijão} & \text{carne} & \text{batata} \end{array} & \end{array}$$

Com a matriz *B*, representamos os preços das mercadorias nos dois supermercados:

$$B = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 3{,}10 & 2{,}80 \\ 3{,}00 & 3{,}20 \\ 15{,}00 & 22{,}00 \\ 3{,}60 & 3{,}20 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{arroz} \\ \rightarrow \text{feijão} \\ \rightarrow \text{carne} \\ \rightarrow \text{batata} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{supermercado 1} \leftarrow & \rightarrow \text{supermercado 2} \end{array} & \end{array}$$

Vamos calcular o gasto mensal de Sandra nas quatro situações possíveis:

- Com o orfanato 1:
  supermercado 1: $25 \cdot 3{,}10 + 20 \cdot 3{,}00 + 30 \cdot 15{,}00 + 32 \cdot 3{,}60 = 702{,}70$
  supermercado 2: $25 \cdot 2{,}80 + 20 \cdot 3{,}20 + 30 \cdot 22{,}00 + 32 \cdot 3{,}20 = 896{,}40$
- Com o orfanato 2:
  supermercado 1: $28 \cdot 3{,}10 + 24 \cdot 3{,}00 + 35 \cdot 15{,}00 + 38 \cdot 3{,}60 = 820{,}60$
  supermercado 2: $28 \cdot 2{,}80 + 24 \cdot 3{,}20 + 35 \cdot 22{,}00 + 38 \cdot 3{,}20 = 1046{,}80$

Esses valores podem ser representados pela matriz *C*, de ordem 2×2: $C = \begin{bmatrix} 702{,}70 & 896{,}40 \\ 820{,}60 & 1\,046{,}80 \end{bmatrix}$

Comparando as somas, temos: $(702{,}70 + 820{,}60) < (896{,}40 + 1046{,}80)$.

Portanto, a melhor opção seria comprar as mercadorias no supermercado 1.

A matriz *C* obtida é denominada **matriz produto** de *A* por *B*. Indicamos: $C = A \cdot B$.

Uma condição necessária para multiplicar as matrizes *A* e *B* é que a quantidade de colunas da matriz *A* deve ser igual ao número de linhas da matriz *B* e o produto será uma matriz cujo número de linhas será igual ao número de linhas da matriz *A* e o número de colunas da matriz *B*, ou seja:

$$\underbrace{A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}}_{\text{iguais}} = (A \cdot B)_{m \times p}$$

Observe o exemplo a seguir:

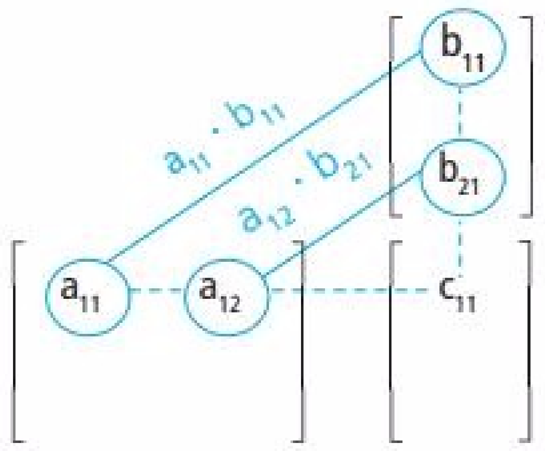
Dadas as matrizes $A_{3 \times 4}$ e $B_{4 \times 2}$, temos:

$$\underbrace{A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}}_{\text{iguais}} = (A \cdot B)_{3 \times 2} \qquad \underbrace{B_{4 \times 2} \cdot A_{3 \times 4}}_{\text{diferentes}} \rightarrow \text{Nesse caso, não existe } B \cdot A.$$

De modo geral, temos:

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$, denomina-se **produto de *A* por *B*** a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, tal que o elemento c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de *A* com os correspondentes elementos (de mesma ordem) da j-ésima coluna de *B*.

Observe o esquema:



Em que:
$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$

Assim, generalizando, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ e } C = A \cdot B$$

Logo:

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22} b_{22} \\ a_{31}\, b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31}\, b_{12} + a_{32} b_{22} \end{bmatrix}$$

Para matrizes quadradas, representaremos o produto $A \cdot A$ por A^2.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de modo que as somas e os produtos estejam definidos, valem as propriedades:

1ª) Propriedade associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2ª) Propriedade distributiva: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (à esquerda)
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (à direita)

Observações:

I) A multiplicação de matrizes **não é comutativa**, isto é, geralmente temos matrizes *A* e *B* tais que $AB \neq BA$.

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então $AB \neq BA$, pois $AB = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

II) Se ocorrer $AB = BA$, dizemos que as **matrizes *A* e *B* comutam**. Observe:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ comutam, pois: $AB = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

III) Ao contrário do que ocorre com os números reais, na multiplicação de matrizes **não vale** a **lei do anulamento do produto**, isto é, podemos ter $AB = 0$, mesmo com $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Veja:

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, temos $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

IV) Na multiplicação de matrizes **não vale** a **lei do cancelamento**, isto é, mesmo que a matriz *A* seja nula, podemos ter $AB = AC$ e $B \neq C$. Observe:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, então $AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$, com $A \neq 0$ e $B \neq C$.

V) Dada uma matriz *A* quadrada de ordem *n*, temos que $AI_n = I_nA = A$, em que I_n é a matriz identidade.

Exercícios resolvidos

8 Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, determine, se possível:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

Resolução

a) *A* é do tipo 2×2 e *B* do tipo 2×3, então existe a matriz *C* tal que $C = AB$ e é do tipo 2×3. Assim:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) = 5$$

$$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 1$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = 15$$

$$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = -11$$

Logo, $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & -11 \end{bmatrix}$.

b) *B* é do tipo 2×3 e *A* é do tipo 2×2. Como a quantidade de colunas de *B* é diferente da quantidade de linhas de *A*, não existe $B \cdot A$.

9 Resolva a equação matricial $AX = B$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Resolução

Inicialmente, encontramos o tipo da matriz *X*:

$$A_{2 \times 2} \cdot X_{n \times p} = B_{2 \times 1} \Rightarrow X_{2 \times 1}$$

Indicando a matriz $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 3b \\ 5a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 14 \\ 5a + b = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = 1$ e $b = 4$.

Logo, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

10 (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz $A = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz *A*, de ordem 5×1, formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO

b) SHUME

c) SADAN

d) RENAN

e) RAMON

Resolução

Usando as informações dadas, temos:

$$\underset{5 \times 5}{\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{5 \times 1}{\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} = \underset{5 \times 1}{\begin{bmatrix} 11 + 9 \\ 3 + 4 \\ 14 \\ 1 \\ 2 + 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \\ 14 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Decodificando, obtemos:

20 → R 7 → A 14 → M 1 → O 8 → N

Portanto, o nome do espião é RAMON.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

38. Efetue as multiplicações.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 4 \quad -1)$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

39. Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule AB e BA. As matrizes *A* e *B* comutam?

A e *B* não comutam, pois $AB \neq BA$.

40. (Cesgranrio-RJ) Cláudio anotou suas médias bimestrais de Matemática, Português, Ciências e Estudos Sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a figura:

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cccc} 1^{\underline{o}}\,b & 2^{\underline{o}}\,b & 3^{\underline{o}}\,b & 4^{\underline{o}}\,b \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Matemática} \\ \text{Português} \\ \text{Ciências} \\ \text{Estudos Sociais} \end{array} & \begin{bmatrix} 5{,}0 & 4{,}5 & 6{,}2 & 5{,}9 \\ 8{,}4 & 6{,}5 & 7{,}1 & 8{,}6 \\ 9{,}0 & 7{,}8 & 6{,}8 & 6{,}2 \\ 7{,}7 & 5{,}9 & 5{,}6 & 6{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

X e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

41. Sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$, calcule a matriz *X*, tal que $A \cdot X = B$.

$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

42. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$, calcule $(A \cdot B)^t$ e $B^t \cdot A^t$ e escreva o que você observou nos cálculos realizados.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

43. (UFPR) Calcule o valor de *a* de modo que exista somente uma matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, tal que o produto $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ seja igual a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. $a = 2$

44. (FGV-SP) Em uma instituição financeira, um investidor pode aplicar parte de seu capital numa aplicação *A*, cuja taxa de ganho esperado é 15% ao ano; a outra parte, ele pode aplicar numa aplicação *B*, com taxa de ganho esperado de 30% ao ano. Todavia, quanto maior o ganho esperado, maior o risco. Alocando parte de seus recursos em *A* e parte em *B* seu ganho esperado ficará entre 15% e 30% ao ano.

a) Se um investidor tiver um perfil de risco tal que seu ganho esperado seja 18% ao ano e seu capital for igual a R$ 40 000,00, quanto deverá aplicar em *A* e *B*?

b) Seja *C* o capital do investidor, *R* a sua taxa de ganho anual esperado, *x* e *y* os valores aplicados em *A* e em *B*, respectivamente. Escreva as relações que devem ser satisfeitas por *x* e *y*, usando a forma de equação matricial.

45. (EsPCEx-SP) Considere as matrizes

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \text{tg}\,x \\ -\cos^2 x & \text{cotg}\,x \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{tg}\,x \end{bmatrix}$ para $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

A matriz resultante do produto matricial $M_1 \cdot M_2$ é:

a) $\begin{bmatrix} \sec^2 x \\ \cos^2 x \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \text{tg}^2\,x \\ -\cos^2 x \end{bmatrix}$

X c) $\begin{bmatrix} \sec^2 x \\ \text{sen}^2\,x \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \text{cossec}^2\,x \\ -\text{sen}^2\,x \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \cos^2 x \\ \text{sen}^2\,x \end{bmatrix}$

44. a) R$ 32 000,00 em *A* e R$ 8000,00 em *B*.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}15 & 0{,}30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ R \cdot C \end{bmatrix}$

Inversa de uma matriz

Sabemos que o inverso do número 3 em relação à multiplicação é o número $\frac{1}{3}$. Já o inverso do número $\frac{5}{4}$ é $\frac{4}{5}$. Dados dois números, dizemos que um número é o inverso do outro quando o produto deles é igual a 1. Assim:

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \qquad \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

De modo geral, o inverso de um número real a, $a \neq 0$, é o número $\frac{1}{a}$, que também é indicado por a^{-1}, tal que:

$$\mathbf{a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1}.$$

Para matrizes quadradas de mesma ordem, é possível obter uma igualdade análoga.

Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n*. Se existe uma matriz *B*, quadrada de ordem *n*, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, dizemos que a matriz *B* é a **matriz inversa** de *A*.

Costumamos indicar a matriz inversa por A^{-1}. Assim, $B = A^{-1}$. Portanto, $\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$.

Sendo I_n a matriz identidade da mesma ordem *n* que as matrizes *A* e A^{-1}.

Observações:

- Se a matriz quadrada *A* é invertível, então a sua inversa é única.
- Quando uma matriz quadrada não possui inversa, dizemos que ela é uma **matriz singular** ou **não invertível**.

Exercícios resolvidos

11 Determine a inversa das matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução

a) Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e fazendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+5c & b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$\begin{cases} 2a+4c=1 \\ a+5c=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{6} \text{ e } c = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} 2b+4d=0 \\ b+5d=1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{2}{3} \text{ e } d = \frac{1}{3}$$

Vamos verificar se $A^{-1} \cdot A = I_2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{6} - \frac{2}{3} & \frac{20}{6} - \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} & -\frac{4}{6} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e fazendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A última igualdade não pode ser satisfeita, pois implicaria $0 = 1$ (elementos da segunda linha e segunda coluna). Logo, a matriz *A* não admite inversa.

12 Sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$, resolva a equação matricial $AX = B$.

Resolução

Precisamos encontrar a matriz *X*, mas não conhecemos a matriz *A*. Então, multiplicamos os dois membros da equação $AX = B$ por A^{-1} à **esquerda**. Assim:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \left(\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_3}\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{I_3 \cdot X}_{X} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Logo, não precisamos conhecer a matriz *A*.

Na última igualdade, substituindo as matrizes dadas, obtemos:

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -15 \cdot (-1) + (-8) \cdot (-18) + (-3) \cdot 52 \\ -9 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-18) + (-2) \cdot 52 \\ 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-18) + 1 \cdot 52 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

46. Determine a inversa das matrizes: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$

47. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $AB + A^{-1}$.

48. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, mostre que *B* é a inversa de *A*. Demonstração.

49. (EEM-SP) Sendo $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, resolva a equação: $AX = B$. $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$

50. Dada a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, resolva a equação matricial $AX - B^t = B$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

51. (Unirio-RJ) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, resolva a equação matricial $A^{-1} + A^t = I_2$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

52. (IME-RJ) Determine uma matriz não singular *P* que satisfaça a equação matricial $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

53. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Sabendo que $A \cdot B^{-1} = C$, calcule $A - B + C$. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

54. Sejam as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Sabendo que *N* é a matriz inversa de *M*, calcule $(p + q)$. 0

55. (Mack-SP) Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{pmatrix}$. Os valores de *a* e *b*, tais que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$, são respectivamente:

x a) 24 e −11

b) 18 e 53

c) −19 e 17

d) 33 e −47

e) 35 e 2

Conexões — Criptografia

56. Proteger informações é uma necessidade humana bastante antiga. Nos dias de hoje, em que são realizadas transações financeiras e envio de arquivos confidenciais pela internet, essa necessidade se torna ainda mais relevante. A criptografia é uma técnica utilizada para codificar mensagens e informações, como senhas etc. A Matemática está diretamente associada a isso.

Leia o texto a seguir e faça o que se pede.

jijomathaidesigners/Shutterstock.com

Toda a segurança envolvida na internet é feita por processos criptográficos.

> A criptografia representa a transformação de informação inteligível numa forma aparentemente ilegível, a fim de ocultar informação de pessoas não autorizadas, garantindo privacidade.
>
> A palavra criptografia tem origem grega (kriptos = escondido, oculto e grifo = grafia) e define a arte ou ciência de escrever em cifras ou em códigos, utilizando um conjunto de técnicas que torna uma mensagem incompreensível, chamada comumente de texto cifrado, através de um processo chamado cifragem, permitindo que apenas o destinatário desejado consiga decodificar e ler a mensagem com clareza, no processo inverso, a decifragem.
>
> Há duas maneiras básicas de se criptografar mensagens: através de códigos ou através de cifras. A primeira delas procura esconder o conteúdo da mensagem através de códigos predefinidos entre as partes envolvidas na troca de mensagens. Imagine o exemplo onde em uma guerra, um batalhão tem duas opções de ação contra o inimigo: atacar pelo lado direito do inimigo ou não atacar. A decisão depende da avaliação de um general posicionado em um local distante da posição de ataque deste batalhão. É acertado que se for enviada uma mensagem com a palavra "calhau", o exército deverá atacar pela direita; se for enviada uma mensagem com a palavra "araçagy", não deve haver ataque. Com isso, mesmo que a mensagem caia em mãos inimigas, nada terá significado coerente. O problema deste tipo de solução é que com o uso constante dos códigos, eles são facilmente decifrados. Outro problema é que só é possível o envio de mensagens predefinidas. Por exemplo: não há como o general mandar seu exército atacar pela esquerda.
>
> O outro método usado para criptografar mensagens é a cifra, técnica na qual o conteúdo da mensagem é cifrado através da mistura e/ou substituição das letras da mensagem original. A mensagem é decifrada fazendo-se o processo inverso ao ciframento. [...]
>
> A principal vantagem das cifras em relação aos códigos é a não limitação das possíveis mensagens a serem enviadas, além de ser tornarem mais difíceis de serem decifradas.
>
> As cifras são implementadas através de algoritmos associados a chaves, longas sequências de números e/ou letras que determinarão o formato do texto cifrado.

TRINTA, Fernando Antonio Mota; MACÊDO, Rodrigo Cavalcanti de. **Um estudo sobre criptografia e assinatura digital**. Recife: Centro de informática (UFPE), 1998. Disponível em: <http://www.di.ufpe.br/~flash/ais98/cripto/criptografia.htm>. Acesso em: 10 dez. 2016.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) De acordo com o texto apresentado, o que é uma mensagem criptografada?

b) Vamos conhecer um método para a cifragem de mensagens. A mensagem a ser cifrada será "Estudando matrizes".

- Considere a tabela abaixo para fazer a correspondência entre as letras da frase a ser cifrada e os números de 1 a 30 (o elemento 29 corresponde ao espaço).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	,	.	_	!

E	S	T	U	D	A	N	D	O		M	A	T	R	I	Z	E	S
5	19	20	21	4	1	14	4	15	29	13	1	20	18	9	26	5	19

- Escreva no caderno os números correspondentes à mensagem, na forma de uma matriz 2 × 9.
- Para criptografar a mensagem, utilizaremos a multiplicação de matrizes $C = A \cdot M$, em que C é a matriz correspondente à mensagem codificada, A a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (chave de criptografia) e M a matriz obtida no item anterior.
- Obtenha a matriz C.
- Para decodificar a mensagem, podemos utilizar propriedades de matrizes. Multiplique ambos os membros da equação $C = A \cdot M$ por A^{-1} e obtenha M em função de A e C.
- Obtenha a matriz inversa de A (A^{-1}) e utilize a equação obtida no item anterior para decodificar a mensagem, obtendo a matriz M.
- Pronto, nossa mensagem foi decodificada. Basta escrevê-la novamente no caderno, por extenso, utilizando inicialmente os elementos da primeira linha da matriz M, seguida dos elementos da segunda linha.

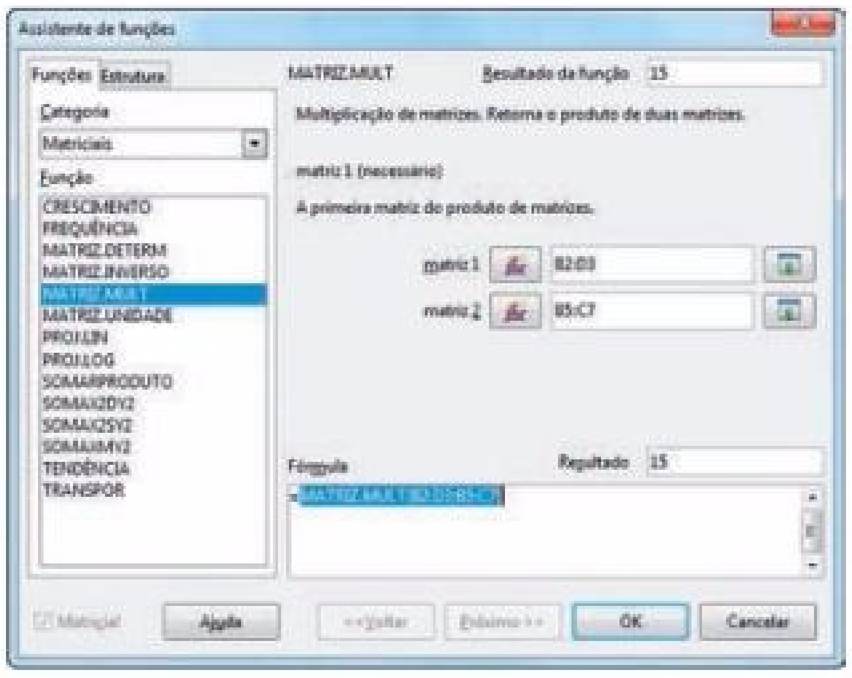
c) Troquem mensagens criptografadas com os colegas e tentem decodificá-las.

Explorando a tecnologia

Multiplicação de matrizes

Planilhas eletrônicas já trazem programada uma série de funções importantes de Matemática. Nesta seção, em especial, vamos trabalhar com as funções multiplicação de matrizes e inversa de uma matriz. Siga o roteiro abaixo.

1. Abra uma planilha no Libre Office e digite na célula A2 "R =" e, na célula A5, digite "S =".
2. Vamos escrever a matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ na planilha da seguinte maneira: na célula B2, digite "1"; na célula C2, digite "2"; na célula D2, digite "3"; na célula B3, digite "4"; na célula C3, digite "5" e na célula D3, digite "6". Assim, a matriz *R* estará configurada na planilha como B2:D3.
3. Agora, vamos escrever a matriz $S = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Começando pela célula B5, digite "−1"; na célula C5, digite "3"; na célula B6, digite "5"; na célula C6, digite "0"; na célula B7, digite "2" e na célula C7, digite "−6". Assim, a matriz *S* estará configurada na planilha como B5:C7.
4. Na célula A9, digite "R X S =".
5. Selecione a célula B9 e, na barra de ferramentas, localize e clique no **Assistente de Funções**, fx. Em seguida, abrirá um painel. Selecione, no campo **Categoria**, a opção **Matriciais** e, no campo **Função**, selecione **MATRIZ.MULT**. Clique duas vezes sobre essa função e aparecerão dois campos: matriz 1 e matriz 2.
6. No campo matriz 1, digite B2:D3; no campo matriz 2, digite B5:C7. Em seguida, clique em OK para obter a matriz R X S.
7. Em seguida, aparecerá o resultado da multiplicação entre as matrizes *R* e *S*, em que a célula B9 representa o elemento da primeira linha e coluna; C9, primeira linha e segunda coluna, e assim por diante.


Assistente de funções
Funções
Estrutura
CRESCIMENTO
FREQUÊNCIA
MATRIZ.DETERM
MATRIZ.INVERSO
MATRIZ.MULT
MATRIZ.UNIDADE
PROJ.LIN
PROJ.LOG
SOMARPRODUTO
SOMAX2DY2
SOMAX2SY2
SOMAXMY2
TENDÊNCIA
TRANSPOR
Matricial
Ajuda
<< Voltar
Próximo >>
OK
Cancelar

MATRIZ.MULT Resultado da função 15

Categoria: Matriciais

Multiplicação de matrizes. Retorna o produto de duas matrizes.

matriz 1 (necessário)

A primeira matriz do produto de matrizes.

matriz 1: B2:D3

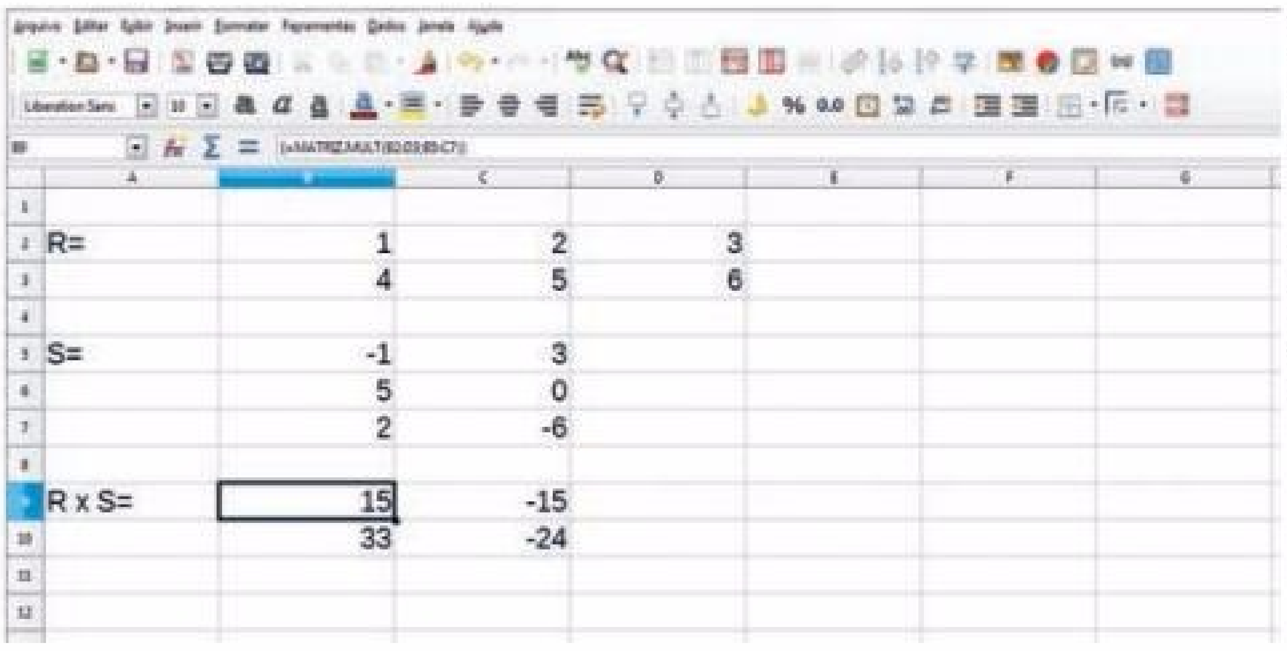
matriz 2: B5:C7

Fórmula: =MATRIZ.MULT(B2:D3;B5:C7)

Resultado: 15

Agora, vamos calcular a inversa de uma matriz, utilizando como exemplo a matriz R X S. Siga os passos:

1. Selecione a célula A12 e escreva "Inversa de RS =".
2. Na célula B12, repita o passo **5** e clique duas vezes sobre a função **matriz inverso** e digite B9:C10. Em seguida, clique em OK. O resultado apresentado é a matriz inversa de R X S.


Arquivo
Editar
Exibir
Inserir
Formatar
Ferramentas
Dados
Janela
Ajuda
Liberation Sans
10

{=MATRIZ.MULT(B2:D3;B5:C7)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	R=	1	2	3			
3		4	5	6			
4							
5	S=	-1	3				
6		5	0				
7		2	-6				
8							
9	R x S=	15	-15				
10		33	-24				
11							
12							

Crédito das imagens: Libre Office

Atividades

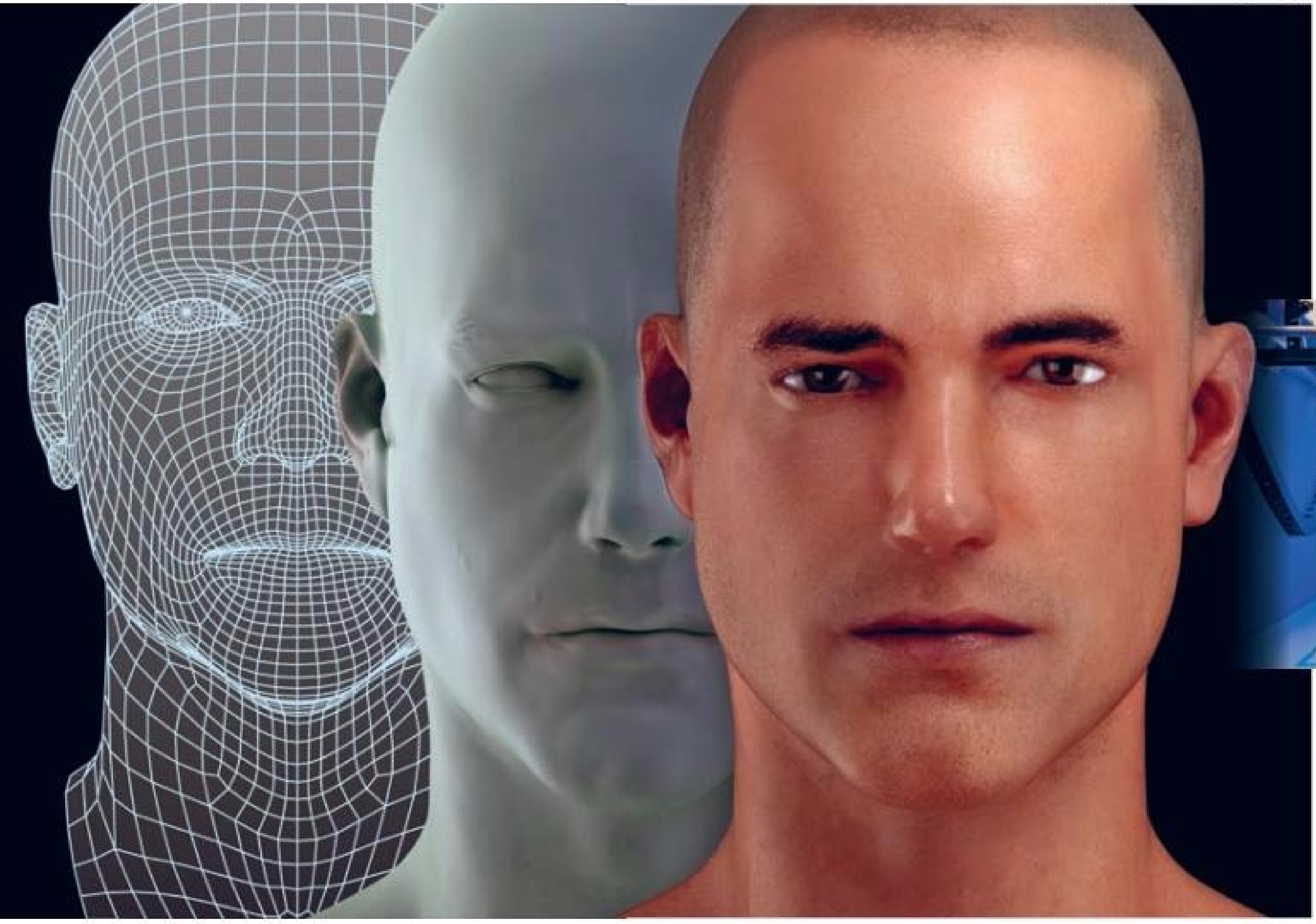
Escreva no caderno

Veja o Manual do Professor.

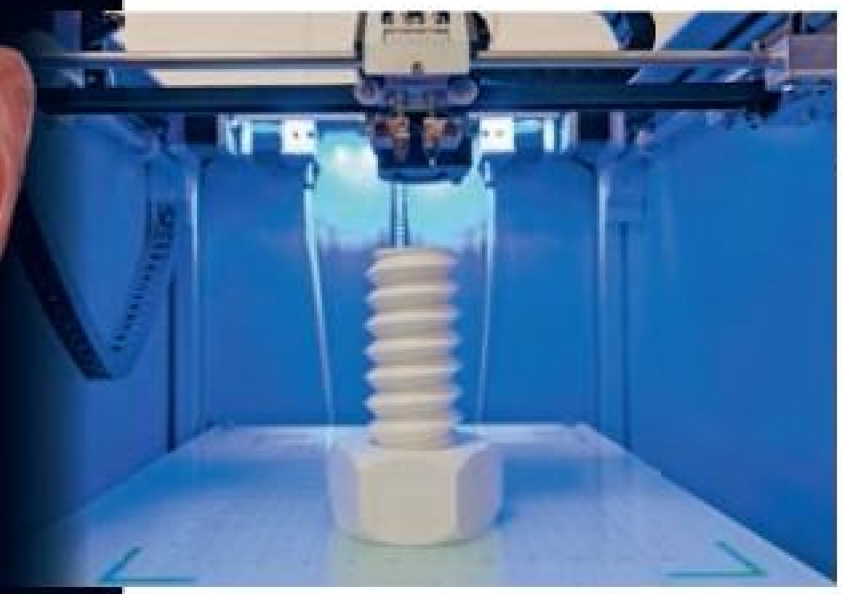
1. Com essa planilha, conseguimos multiplicar quaisquer matrizes? Justifique.
2. Sendo $A_{3 \times 3}$ uma matriz em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B_{3 \times 4}$, em que $b_{ij} = i - 2j$, calcule $A \cdot B$ e, depois, $B \cdot A$.
3. Resolva a equação matricial $AX = B$, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B_{3 \times 3}$ é uma matriz tal que $b_{ij} = i - j$.

CAPÍTULO 4

Determinantes



SuperStock RM/Getty Images

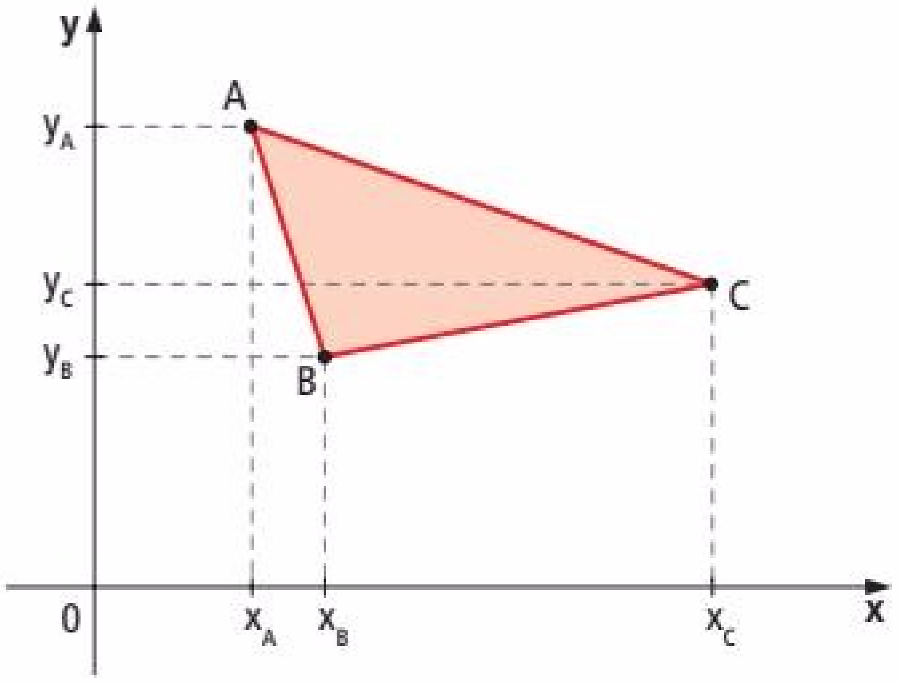


Getty Images

Softwares e impressoras tridimensionais usam malhas poligonais para compor objetos.

A malha poligonal, ou *Polygon Mesh*, é um método de descrição e construção de um objeto por meio de malhas de polígonos, muito utilizado na computação gráfica para criação de objetos ou personagens em filmes e animações.

Atualmente, com a evolução do *videogame* e da impressão tridimensional, personagens ou objetos se tornam cada vez mais próximos da realidade graças ao emprego desse método cujos cálculos envolvem conceitos matriciais de determinantes.



Editoria de arte

A área do triângulo é numericamente igual à metade do módulo do determinante da matriz formada pelas coordenadas de seus vértices.

Os chineses utilizavam os conceitos de determinantes, ainda que implícitos, para a resolução de sistemas de equações; porém, em 1683, o matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) sistematizou o procedimento usado pelos chineses.

Utilizaremos o conceito de determinantes para:

- resolver sistemas lineares;
- calcular área de regiões triangulares, quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices no plano;
- verificar se uma matriz é invertível ou não;
- verificar algebricamente se três pontos do plano cartesiano estão alinhados ou não.

Determinante

O **determinante** de uma matriz quadrada de ordem *n* é um número real a ela associado. Cada matriz tem um único determinante, que será definido a seguir. Acompanhe.

Dada a matriz quadrada: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Indicaremos o determinante dessa matriz por: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Determinante de uma matriz de ordem 1

Definimos como determinante de uma matriz $A = (a_{11})$, de ordem 1, o valor de seu único elemento a_{11}, ou seja:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Note que:

- Se $M = (4)$, então $\det M = 4$.
- Se $\det A = -\sqrt{2}$ e *A* é uma matriz de ordem 1, então $A = \left[-\sqrt{2}\right]$.

Nas matrizes de ordem 1, não devemos confundir a notação do determinante $|a_{11}|$ com o módulo do valor do elemento a_{11}.

Em uma matriz de ordem 1, o determinante é o próprio elemento da matriz.

Determinante de uma matriz de ordem 2

Uma matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, de ordem 2, tem como determinante o número real obtido pela expressão: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Assim:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

indica que se deve **inverter** o sinal do produto ⊖

⊕ indica que se deve **manter** o sinal do produto

Em uma matriz de ordem 2, o determinante é a diferença entre o produtos dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Considere o exemplo:

Sendo a matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 - 4 \cdot (-2) = -15 + 8 = -7$$

Exercícios resolvidos

1 Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Resolução

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = 10 + 3 = 13$$

$\ominus$ $\oplus$

O determinante da matriz *M* é 13.

2 Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 2^x & 4^x \\ 8 & \frac{1}{16} \end{vmatrix} = 0.$

Resolução

O determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Logo:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 4^x \\ 8 & \frac{1}{16} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{1}{16} - 8 \cdot 4^x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 2^{-4} - 2^3 \cdot 2^{2x} = 0 \Rightarrow 2^{x-4} = 2^{3+2x}$$

Igualando os expoentes, temos:

$x - 4 = 3 + 2x \Rightarrow x = -7$

Portanto, o conjunto solução da equação é: $S = \{-7\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ 14

b) $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ 26

c) $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ 11

d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 4 \\ -3 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$ 10

2. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule:

a) $\det (A^t)$

b) $\det (AB)$

c) $\det (A + B)$

d) $\det (2A - B)$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

3. Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{5\}$

b) $\begin{vmatrix} x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$ $S = \{0, 5\}$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{-1, 4\}$

d) $\begin{vmatrix} 2(x-1) & x+2 \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = 6$ $S = \{-2, 2\}$

4. Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ x & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$ $S = \{-7, 2\}$

5. Sabendo que $a = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ e $b = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$, calcule o valor de $3a + b^2$. 37

6. Calcule o determinante da matriz *A* do tipo 2 × 2, cujos elementos são: 22

$$\begin{cases} a_{ij} = i + 2j, \text{ se } i \geq j \\ a_{ij} = i^2 - j, \text{ se } i < j \end{cases}$$

7. Sabendo que $0 \leq x < 2\pi$, resolva a equação:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\, x & 3 \\ -1 & \text{sen}\, x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$ $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

8. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, calcule o número real *x*, tal que $\det (A - x \cdot B) = 0$. $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule os valores de λ, tais que o determinante da matriz $(A^2 - \lambda I)$ seja igual a zero. 0 ou 4.

10. (Fuvest-SP) O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & y \end{bmatrix}$ pela sua transposta é a identidade. Determine *x* e *y*, sabendo que $\det A > 0$. $x = -\frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$.

11. Se $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, determine o valor de *x* de modo que:

$$\begin{vmatrix} \cos 2x & -3 \\ \text{sen}\, x & 1 \end{vmatrix} = 2$$ $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{6}$.

12. Mostre que $\begin{vmatrix} \text{tg}\, x & \sec x \\ \sec x & \text{tg}\, x \end{vmatrix} = 1$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

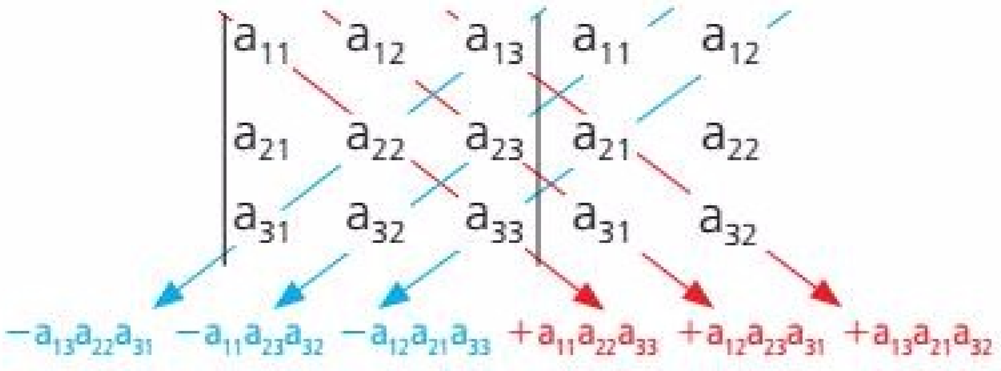
Determinante de uma matriz de ordem 3

Uma matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tem como determinante o número real det A.

Podemos obter det A utilizando um dispositivo prático denominado **regra de Sarrus**, que consiste em:

- repetir à direita da matriz suas duas primeiras colunas;
- multiplicar os elementos da diagonal principal e das diagonais das fileiras à direita, paralelas a ela, com três elementos mantendo os sinais dos produtos;
- multiplicar os elementos da diagonal secundária e das diagonais das fileiras à direita, paralelas a ela, com três elementos mudando os sinais dos produtos;
- adicionar as seis parcelas obtidas.

Observe o esquema da regra de Sarrus:


a_{11} a_{12} a_{13} a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{21} a_{22}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{31} a_{32}
$-a_{13}a_{22}a_{31}$
$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$+a_{13}a_{21}a_{32}$

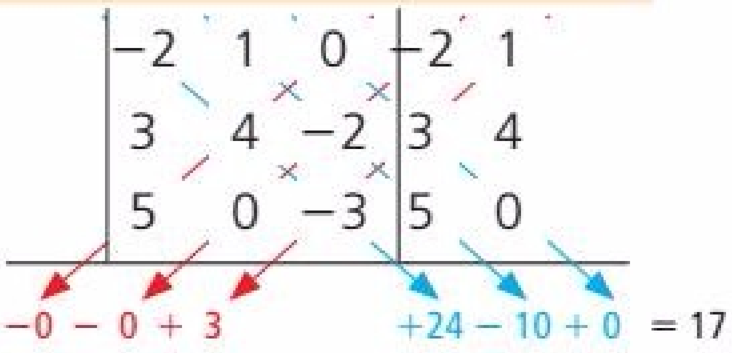
Assim, obtemos a expressão:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Portanto,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Por exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é dado por:


−2 1 0 −2 1
3 4 −2 3 4
5 0 −3 5 0
−0 − 0 + 3
+24 − 10 + 0
= 17

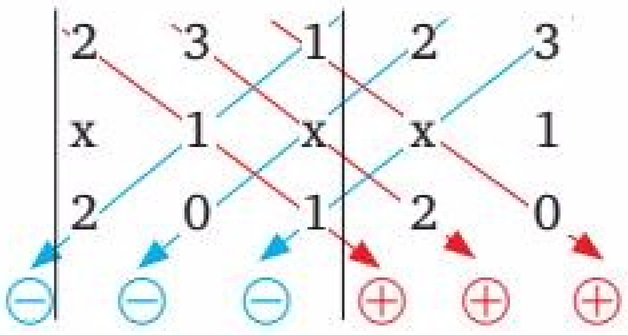
Logo, det A = 17.

Exercícios resolvidos

3 Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15.$

Resolução

Repetindo a 1ª e a 2ª colunas à direita, temos:


2 3 1 2 3
x 1 x x 1
2 0 1 2 0
⊖ ⊖ ⊖ ⊕ ⊕ ⊕

Assim:

$2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 2 + 1 \cdot x \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot x \cdot 0 - 3 \cdot x \cdot 1 = 15$

$2 + 6x + 0 - 2 - 0 - 3x = 15$

$3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Portanto, o conjunto solução da equação é: $S = \{5\}$.

4 Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{i}, \text{ se } i = j \\ \text{sen}\,\dfrac{7\pi}{i}, \text{ se } i \neq j \end{cases}, \text{ e calcule det A.}$$

Resolução

Como a matriz é de ordem 3, podemos considerar que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$; assim, para conhecer o valor de cada elemento, basta comparar os índices *i* e *j* com a sua lei de formação, ou seja:

Para i = j, temos: $a_{11} = \cos 7\pi = -1$;

$a_{22} = \cos\dfrac{7\pi}{2} = 0$; $a_{33} = \cos\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

Para $i \neq j$, temos:

$a_{12} = \text{sen}\ 7\pi = 0$ $\qquad a_{23} = \text{sen}\ \dfrac{7\pi}{2} = -1$

$a_{13} = \text{sen}\ 7\pi = 0$ $\qquad a_{31} = \text{sen}\ \dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a_{21} = \text{sen}\ \dfrac{7\pi}{2} = -1$ $\qquad a_{32} = \text{sen}\ \dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, podemos escrever a matriz *A* como:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = (0 + 0 + 0) - \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\det A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

13. Calcule cada um dos determinantes a seguir, utilizando a regra de Sarrus.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 15

b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 0

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ −11

14. Sabe-se que $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 3, em que $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$ e $a_{33} = 3$. Em cada linha de *A* aparecem os números 1, 2 e 3, sem repetição, e o mesmo ocorre em cada coluna. Qual o determinante de *A*? 18

15. Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ $S = \{-1\}$

b) $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

16. (UFC-CE) Se o determinante da matriz abaixo é igual a 280, determine o valor de $3k^2 - 2k$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3k \\ 3k & 1 & 1 \\ 9k^2 & 3k & 1 \end{vmatrix}$$ 93

17. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 3, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i < j \\ k, \text{ se } i = j \\ -1, \text{ se } i > j \end{cases}$$ e $k \in \mathbb{R}$. Calcule *k* de modo que o determinante da matriz *A* seja nulo. $k = 0$

18. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e a função $f(x) = -x^2 - x - 1$, calcule $f\left(-\dfrac{1}{\det A}\right)$. $-\frac{3}{4}$

19. Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

20. Calcule a soma das raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x^2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ −3

21. Estude a variação do sinal da função $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$.

$f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 1$
$f(x) > 0$ para $x < 0$ ou $x > 1$
$f(x) < 0$ para $0 < x < 1$

22. Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ \text{sen}\,x & 0 & 1 \\ \text{sen}\,x & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$, com $0 < x < \pi$. $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$

Conexões *Pixels*

23. Visualizar uma tela e observar a imagem que nos salta aos olhos pode nos fazer esquecer ou deixar de conhecer o que está por trás dessa realidade virtual que visualizamos. As imagens são compostas por pequenos pontos luminosos que, unidos, nos dão a sensação de que há realmente uma imagem complexa a nossa frente.

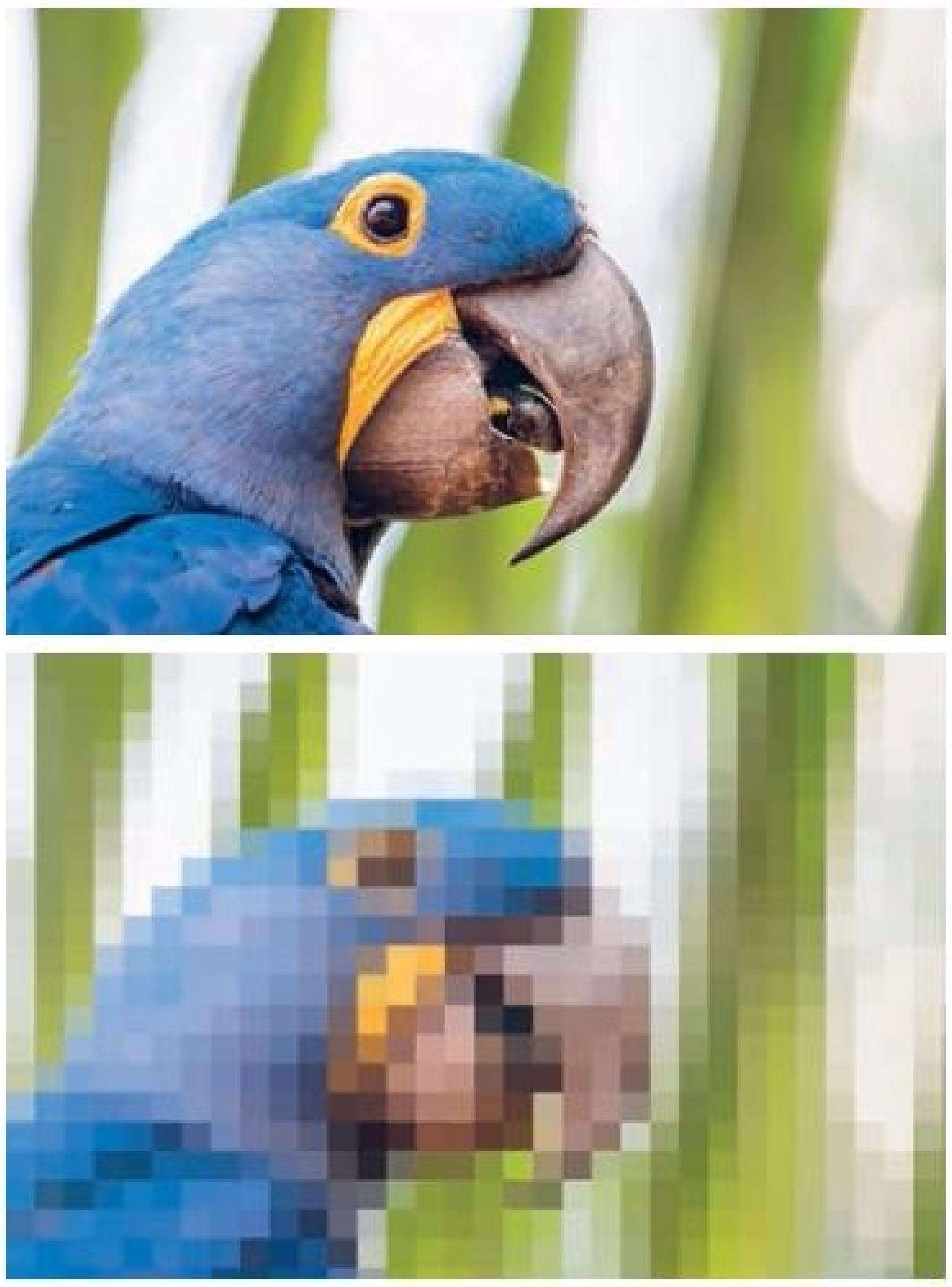
O que são *Pixels*?

Atualmente, a quantidade de dispositivos eletrônicos existentes é cada vez maior, e eles estão cada vez mais inseridos em nosso cotidiano. TVs, *smartphones*, computadores, *notebooks*, *tablets* e qualquer dispositivo que possua um monitor apresentam imagens digitais. Mas como essas imagens são formadas?

As imagens apresentadas por esses dispositivos são formadas por "pequenos pontinhos" – os *pixels*, que são o menor componente de uma imagem digital. A palavra *pixel* tem origem nos termos em inglês *Picture Element*, que significam "elemento de imagem". Esses *pixels* podem assumir cores, no caso de monitores coloridos, ou ser apenas pretos e brancos.

Podemos fazer uma analogia entre os *pixels* e as células. O corpo humano é formado por células: para compor um tecido humano, por exemplo, são necessárias milhares de células. O mesmo acontece com as imagens digitais: são necessários muitos *pixels* para formá-la.

E como os *pixels* formam as imagens que vemos nos monitores desses dispositivos eletrônicos?


Fotofeeling/Westend61/Corbis/Latinstock

A arara-azul vive nos biomas da Floresta Amazônica e principalmente no Cerrado e Pantanal. Essa espécie está ameaçada de extinção.

As imagens são formadas por quantidades de *pixels* definidas por uma composição retangular, por exemplo, $1\,920 \times 1\,080$ *pixels*. Visualmente, podemos imaginar essa imagem como uma matriz de $2\,073\,600$ elementos, em que cada elemento corresponde a um *pixel* e assume uma cor, que compõe a imagem final que visualizamos. A quantidade de *pixels* por "pedaço de tela" é comumente muito grande, o que nos dá a sensação de que a imagem projetada na tela não seja formada por "pontinhos".

O *pixel* não tem correspondência com unidades de medida linear, como o centímetro, o metro, a polegada etc. O *pixel* pode assumir tamanhos distintos, conforme o tamanho da imagem e sua resolução. A resolução é a quantidade de *pixels* presentes em cada unidade de medida linear, sendo suas unidades de medida mais comuns: *pixels*/centímetro e *pixel*/polegada. Assim, uma resolução de $1\,000$ *pixels*/cm indica que, na imagem, a cada centímetro há $1\,000$ *pixels*. Seguindo esse raciocínio, cada cm^2 da tela corresponde a $1\,000 \cdot 1\,000 = 10^6$ *pixels*.

Portanto, uma imagem em um monitor de 29 polegadas, apresentada em um monitor de 60 polegadas com a mesma resolução que a do anterior, conterá *pixels* maiores, uma vez que a quantidade de *pixels* por centímetro é a mesma nesse exemplo.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Há alguns padrões de resolução de tela, sendo um bastante comum, o HDV 720 (do inglês *High Definition Video*), cuja resolução é $1\,280 \times 720$ *pixels*. Quantos *pixels* há no total para essa resolução?

b) Em uma tela de resolução $1\,920 \times 1\,080$ *pixels*, supondo corresponder cada *pixel* a um elemento da matriz $M_{1\,920 \times 1\,080}$, qual a área (em *pixel*) de um triângulo cujos vértices são os pontos $A(1, 1)$, $B(300, 200)$ e $C(180, 450)$ da matriz *M*?

É possível obter a área de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ por meio da expressão

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que: } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ e } |D| \text{ é o módulo do determinante.}$$

c) Você já ouviu falar em *pixel art*? É uma expressão artística digital, em que o elemento básico é o *pixel*. *Videogames* antigos, por exemplo, apresentavam imagens altamente "*pixel*adas", ou seja, os *pixels* eram evidentes. Componha desenhos com malhas quadriculadas em que cada quadradinho só pode assumir uma cor. Discuta com os colegas como compor curvas (ou pelo menos tentar) utilizando essa técnica.

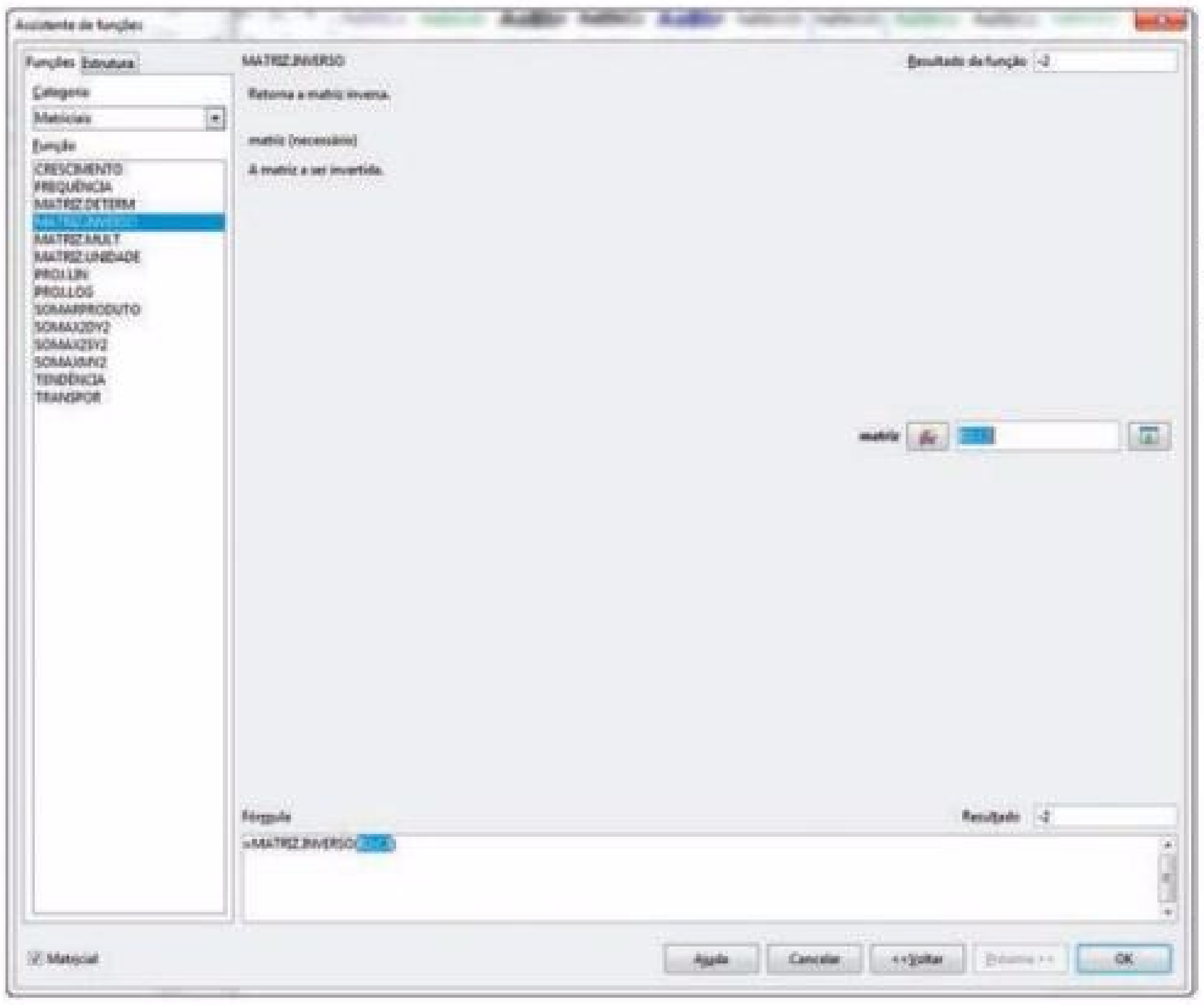
Explorando a tecnologia

Calculando o determinante

Acompanhe, a seguir, como usar uma planilha eletrônica do Libre Office para calcular o valor do determinante de uma matriz.

1. Abra uma planilha no Libre Office, nomeie-a como "DETMATRIZ".
2. Escreva na planilha a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ da seguinte maneira: digite na célula A2 "A =", na célula B2, digite "1", na célula C2, digite "2", na célula B3, digite "3", na célula C3, digite "4". Assim, nossa matriz estará configurada na planilha como B2:C3.
3. Na célula A5, digite "Det(A) =".
4. Selecione a célula B5 e, na barra de ferramentas, localize e clique no **Assistente de Funções**. Em seguida, abrirá um painel; selecione, no campo **Categoria**, a opção **Matriciais** e, no campo **Função**, selecione **MATRIZ.DETERM**. Clique duas vezes sobre essa função e aparecerá o campo para preencher com os elementos da matriz *A*.

6. Digite "B2:C3" no campo e clique em OK. Na célula B5 aparecerá o valor do determinante da matriz *A*. Repare que se você alterar os valores de cada elemento da matriz, o valor do determinante também mudará.


Assistente de funções
Funções
Estrutura
Categoria
Matriciais
Função
CRESCIMENTO
FREQUÊNCIA
MATRIZ.DETERM
MATRIZ.INVERSO
MATRIZ.MULT
MATRIZ.UNIDADE
PROJ.LIN
PROJ.LOG
SOMARPRODUTO
SOMAX2DY2
SOMAX2SY2
SOMAXMY2
TENDÊNCIA
TRANSPOR
MATRIZ.INVERSO
Resultado da função
matriz
Fórmula
Resultado
Matricial
Ajuda
Cancelar
<< Voltar
Próximo >>
OK

Resultado da função: -2

Retorna a matriz inversa.

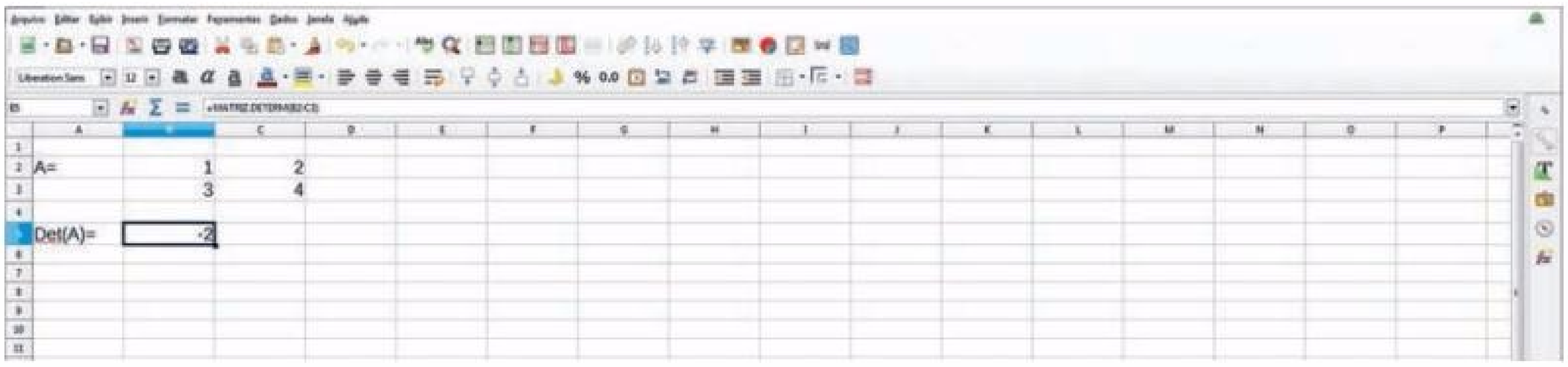
matriz (necessário)

A matriz a ser invertida.

Fórmula: =MATRIZ.INVERSO(B2:C3)

Resultado: -2

Crédito das imagens: Libre Office


Arquivo
Editar
Exibir
Inserir
Formatar
Ferramentas
Dados
Janela
Ajuda
Liberation Sans
12
B5

=MATRIZ.DETERM(B2:C3)

	A	B	C
1			
2	A=	1	2
3		3	4
4			
5	Det(A)=	-2	

Atividades

Escreva no caderno

Professor, essas propriedades serão apresentadas e verificadas no tema a seguir.

Vamos verificar, com o uso da planilha eletrônica, algumas propriedades dos determinantes.

1. Escreva uma matriz quadrada de ordem 3 em que uma das filas (linha ou coluna) tenha todos os elementos iguais a zero. Usando a planilha, obtenha o determinante dessa matriz. O determinante será igual a zero.
2. Faça algumas alterações nos elementos numéricos da matriz do item **1**; porém, deixando sempre uma fila de zeros. Em seguida, verifique o que acontece com o valor do determinante. O determinante da nova matriz continua sendo zero.
3. Construa uma matriz quadrada de ordem 3, que tenha duas linhas (ou duas colunas) iguais, e outra matriz que tenha duas linhas (ou duas colunas) proporcionais. A seguir, use a planilha para calcular o determinante de cada uma delas. Em ambas as matrizes o determinante será zero.
4. Crie uma matriz de ordem 3 cujo determinante seja diferente de zero. Troque de lugar, entre elas, duas linhas (ou duas colunas). O que você observa? O valor do determinante ficou oposto ao valor anterior.
5. Crie duas matrizes, *A* e *B*, de ordem 3 e verifique se o determinante de Det $(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$. Sim, a igualdade se mantém.

Propriedades e teoremas dos determinantes

A seguir, enunciaremos algumas propriedades e alguns teoremas que simplificam os cálculos dos determinantes. Cada enunciado está acompanhado de exemplos para verificação direta.

1ª propriedade: fila nula

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem nulos, seu determinante será nulo.

Exemplos:

a) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então: $\det A = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$

b) Se $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, então: $\det M = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$

2ª propriedade: filas iguais ou proporcionais

Se duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada forem iguais ou proporcionais, seu determinante será nulo.

Exemplos:

a) Se $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$, então: $\det B = 2 \cdot 15 - 5 \cdot 6 = 0$

$6 = 2 \cdot 3$ $\leftarrow$ $\rightarrow$ $15 = 5 \cdot 3$

Dizer que duas filas são proporcionais significa dizer que os elementos de uma delas são *k* ($k \neq 0$) vezes os elementos correspondentes da outra.

b) Se $N = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, então: $\det N = 4 + 20 + 24 - 24 - 20 - 4 = 0$

3ª propriedade: determinante da matriz transposta

O determinante de uma matriz quadrada *A* é igual ao determinante de sua transposta A^t, ou seja, $\det A = \det A^t$.

Exemplos:

a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, temos: $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Calculando os determinantes, temos:
$\det M = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$ e $\det M^t = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$
Portanto, $\det M = \det M^t$.

b) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e a sua transposta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Seus determinantes são:
$\det A = -5 + 0 + 6 - 0 - 4 - 20 = -23$ e $\det A^t = -5 + 6 + 0 - 0 - 4 - 20 = -23$
Portanto, $\det A = \det A^t$.

4ª propriedade: troca de filas

Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz será o oposto do determinante da primeira matriz.

Exemplos:

a) Seja a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$. Seu determinante é: $\det A = 30 - 24 = 6$.

Trocando a posição das linhas de *A*, obtemos a matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ cujo determinante é:

$\det B = 24 - 30 = -6$.

Note que os determinantes de *A* e *B* são números opostos.

b) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, temos: $\det M = 6 + 5 + 36 - 3 - 40 - 9 = -5$.

Trocando de posição, por exemplo, a 2ª e a 3ª colunas de *M*, obtemos a matriz $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

temos: $\det N = 40 + 3 + 9 - 5 - 6 - 36 = 5$.

Note que os determinantes de *M* e *N* são números opostos.

5ª propriedade: multiplicação de uma fila por um número real

Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) por um número real *k*, então o determinante da nova matriz será o produto de *k* pelo determinante da primeira matriz.

Se multiplicarmos duas linhas ou colunas por *k*, o determinante fica multiplicado por $k \cdot k = k^2$. Se multiplicarmos as *n* linhas ou colunas de uma matriz, de ordem *n*, por *k*, o determinante fica multiplicado por k^n.

Exemplos:

a) Seja a matriz quadrada $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Seu determinante é $\det P = 12 - 10 = 2$.

Multiplicando todos os elementos da 1ª linha de *P* por 4, temos a matriz:

$Q = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, cujo determinante é: $\det Q = 48 - 40 = 8$.

Observe que $\det Q = 4 \cdot \det P$.

b) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, temos: $\det A = 40 + 5 + 5 - 10 - 10 - 10 = 20$.

Escolhendo, por exemplo, a 1ª coluna de *A* e multiplicando seus elementos por $\frac{1}{5}$, obtemos a matriz

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Assim: $\det B = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4$.

Portanto, $\det A = \frac{1}{5} \det B$.

6ª propriedade: determinante da matriz triangular

Se todos os elementos de uma matriz quadrada, situados de um mesmo lado da diagonal principal, forem nulos, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

a) Dada a matriz quadrada $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, na qual todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, temos: $\det N = (-1) \cdot 5 \cdot 4 = -20$.

b) Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observamos que todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Logo:

$\det M = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 = 40$.

7ª propriedade: teorema de Jacobi

Se adicionarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada *A* outra linha (ou coluna) multiplicada por um número qualquer não nulo, o determinante da matriz *B* obtida será igual ao da matriz *A*.

Exemplos:

a) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Seu determinante é $\det A = 4 - 6 = -2$.

Substituindo a 2ª linha de *A* (L_2) pela soma dessa linha com o produto da 1ª linha (L_1) por -3, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \underbrace{3 - 3 \cdot 1}_{L_2 - 3L_1} & \underbrace{4 - 3 \cdot 2}_{L_2 - 3L_1} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o determinante de *B* é: $\det B = -2 - 0 = -2$.

Portanto: $\det A = \det B$.

b) Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Seu determinante é: $\det M = 21 + 20 + 32 - 56 - 8 - 30 = -21$.

Inicialmente, substituímos a 2ª coluna (C_2) de *M* pela soma desta com o produto da 1ª coluna (C_1) por -5. Depois, substituímos a 3ª coluna (C_3) de *M* pela soma desta com o produto da 1ª coluna (C_1) por -2. Assim, obtemos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 - 5 \cdot 1 & 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 & 7 - 5 \cdot 2 & 1 - 2 \cdot 2 \\ 4 & \underbrace{8 - 5 \cdot 4}_{C_2 - 5C_1} & \underbrace{3 - 2 \cdot 4}_{C_3 - 2C_1} \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & -12 & -5 \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus para o novo determinante, temos:

$\det N = 15 + 0 + 0 - 0 - 36 - 0 = 15 - 36 = -21$

Portanto, $\det N = \det M$.

8ª propriedade: teorema de Binet

Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesma ordem, então o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes, ou seja:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Exemplo:

Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, temos:

$\det A = 4 - 6 = -2$ e $\det B = -6 - 0 = -6$; então, $\det A \cdot \det B = (-2) \cdot (-6) = 12$.

Agora, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ -3 & 39 \end{pmatrix}$; então, $\det AB = -39 - (-3) \cdot 17 = 12$.

Observe que $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B) = 12$.

9ª propriedade: determinante da matriz inversa

No estudo das matrizes, vimos que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Sendo A^{-1} a matriz inversa de *A*, e *I* a matriz identidade, todas de mesma ordem, da relação $A \cdot A^{-1} = I$, temos: $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$

Como $\det I_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $\det(A \cdot A^{-1}) = 1$

Aplicando o teorema de Binet: $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Sabendo que $\det A \neq 0$, podemos concluir que:

O determinante da inversa de uma matriz é igual ao inverso do determinante dessa matriz.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Observe que se $\det A = 0$, não existe matriz inversa.

Exercícios resolvidos

5 Calcule o determinante da matriz A^{-1}, utilizando as propriedades dos determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução

Inicialmente, convém escolher um elemento igual a 1 e fixar sua linha ou coluna. Por exemplo, tomando o elemento $a_{11} = 1$ e fixando a 1ª linha, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, aplicamos o teorema de Jacobi.

- Multiplicamos por (-2) os elementos da 1ª linha e adicionamos os produtos aos elementos da 2ª linha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 4 & -8 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos por (-4) os elementos da 1ª linha e adicionamos os produtos aos elementos da 3ª linha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & -11 \\ -3 & 6 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos por 3 os elementos da 1ª linha e adicionamos os produtos aos elementos da 4ª linha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Como a matriz *A* é triangular, temos que o determinante é o produto da diagonal principal, logo:

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot (-12) \cdot 13 = -156$

Utilizando o teorema de Binet, podemos calcular a determinante da inversa de *A*, ou seja, $\det A^{-1}$. Então:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Rightarrow \det A^{-1} = -\frac{1}{156}$$

Assim, $\det A^{-1} = -\dfrac{1}{156}$.

6 Utilizando as propriedades dos determinantes, justifique por que os determinantes das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \text{ são nulos.}$$

Resolução

A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ tem duas linhas iguais; assim, pela 2ª propriedade, $\det A = 0$.

Na matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$, a terceira coluna é o produto da primeira coluna por 4, ou seja:

$$4 = 4 \cdot 1 \qquad 8 = 4 \cdot 2 \qquad 12 = 4 \cdot 3$$

Assim, essa matriz possui colunas proporcionais, ou seja, também pela 2ª propriedade, $\det B = 0$.

7 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$.

Determine o valor de *x*, sendo $\det (A \cdot B) = -5$.

Resolução

Como $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, vamos calcular $\det A$ e $\det B$:

$\det A = -2x - 5$

$\det B = \dfrac{x}{2} + 1$

$$\det A \cdot \det B = (-2x - 5) \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) =$$

$$= -x^2 - 2x - \frac{5x}{2} - 5 = \frac{-2x^2 - 9x - 10}{2}$$

Então:

$$\frac{-2x^2 - 9x - 10}{2} = -5$$

$$-2x^2 - 9x - 10 = -10$$

$$-2x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{9}{2}$$

Os possíveis valores de *x* são 0 e $-\dfrac{9}{2}$.

8 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcule o determinante da matriz inversa de *A*, sem obter a inversa de *A*.

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 0 - 4 + 3 - 40 - 0 = 4$$

Como $\det A \neq 0$, existe a matriz inversa de *A*.

Logo: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{4}$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

24. Utilize as propriedades dos determinantes e calcule: a) 0; b) 0; c) 0; d) 0

a) $\begin{vmatrix} 128 & 312 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 4 & 44 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 3 & x & 3 \\ 1 & y & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \\ 23 & 10 & 47 \end{vmatrix}$

25. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule: a) 2; b) 1; c) 1

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6a & 6b & 6c \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

26. Qual a relação entre os determinantes das matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\det B = 2\det A$

27. Sabe-se que *A* e *B* são matrizes quadradas de ordem 2 e o determinante de *A* é igual a 9. Se $B = 2 \cdot A$, calcule o determinante de *B*. 36

28. Sabe-se que *A* e *B* são matrizes quadradas de ordem 3, e *B* é a matriz transposta de *A*. Se $\det A = 9$, calcule o determinante de *B*. 9

29. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule o determinante de $7A^{-1}$. 3,5

30. Utilizando as propriedades, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ 0

b) $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 9 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ 120

31. Calcule os determinantes aplicando as propriedades. Justifique sua resposta.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ $D = 0\ (C_1 = 0)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $D = 0\ (L_1 = L_3)$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ $D = 0\ (L_3 = L_1 + L_2)$

32. Calcule o determinante utilizando as propriedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad -8$$

33. Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$, utilizando as propriedades do determinante. $S = \{-1\}$

34. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A^t + \det A^{-1}$ $\frac{257}{16}$

b) $\det (A^t \cdot A^{-1})$ 1

35. (Vunesp-SP) Os valores de *k* para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ não admita inversa são:

a) 0 e 3

b) 1 e −1

[✓ c) 1 e 2]

d) 1 e 3

e) 3 e −1

36. (Epcar-MG) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e P^{-1} a inversa de *P*. Se a matriz *B* é tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, tem-se que:

a) $\det B = 0$

b) $\det B = -50$

[✓ c) *B* é a matriz diagonal.]

d) $B = A$

37. (UFC-CE) Dada a matriz $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, calcule o determinante de P^2. 64

38. (Ufla-MG) O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é 16.

Assinale a alternativa **incorreta**:

a) Se multiplicarmos por 2 os elementos da primeira linha da matriz *A* e multiplicarmos por $\frac{1}{2}$ os elementos da primeira coluna da matriz *A*, o determinante da nova matriz é 16.

[✓ b) Se somarmos 2 aos elementos da primeira linha da matriz *A* e se subtrairmos 2 dos elementos da segunda linha da matriz *A*, o determinante da nova matriz é 16.]

c) Se trocarmos de posição a primeira linha com a segunda linha da matriz *A* e, em seguida, na matriz assim obtida, trocarmos de posição a primeira coluna com a segunda coluna, o determinante da nova matriz é 16.

d) O determinante do produto da matriz *A* por sua transposta é 16^2.

39. (Mack-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$, o determinante da matriz inversa de *A* é:

a) cossec (2x)

[✓ b) sec (2x)]

c) 1

d) sen (2x)

e) cos (2x)

CAPÍTULO 5

Sistemas lineares

No Ensino Fundamental você provavelmente já tenha estudado os sistemas lineares, porém com outro nome: sistemas de equações. Neste capítulo vamos dar sequência a esse estudo, incluindo mais variáveis e apresentando novas técnicas de resolução de sistemas.

Equação linear

Andréa conferiu o saldo de seu cartão escolar de transporte e verificou que tinha R$ 120,00. Na cidade em que mora, a passagem de ônibus custa R$ 3,00, a de metrô, R$ 2,50 e a de trem custa R$ 2,00. Com esse saldo, quantas viagens ela poderá fazer utilizando esses meios de transporte?

Uma situação como essa pode ser traduzida para a linguagem matemática. Para isso, representamos os valores desconhecidos (**as incógnitas**) por meio de letras e as relacionamos com as informações do enunciado.

Se *x*, *y* e *z* são, respectivamente, o número de passagens de ônibus, o de metrô e o de trem; então, podemos escrever a seguinte sentença:

$$3{,}00 \cdot x + 2{,}50 \cdot y + 2{,}00 \cdot z = 120{,}00 \text{ ou } 3x + 2{,}5y + 2z = 120$$

Toda equação que pode ser escrita na forma geral $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são incógnitas, é denominada equação linear.

Na equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$:

- $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais chamados **coeficientes**;
- $x_1, x_2, ..., x_n$ são as **incógnitas**;
- *b* é o **termo independente**.

Uma ênupla, ou seja, uma sequência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, que colocados respectivamente no lugar de $x_1, x_2, ..., x_n$, torna verdadeira a igualdade $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$, é uma **solução da equação**.

Quando o termo independente *b* de uma equação linear é igual a zero, ela é denominada equação linear homogênea, $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = 0$.

Nesse caso, a ênupla (0, 0,..., 0) é uma solução de qualquer equação linear homogênea.

Por exemplo, a equação $2x - y + 3z = 0$ é homogênea e (0, 0, 0) é uma de suas soluções, pois: $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$.

A sentença $3x + 2{,}5y + 2z = 120$, que consideramos na situação inicial, é uma **equação linear** em que:

- 3; 2,5 e 2 são os coeficientes;
- *x*, *y* e *z* são as incógnitas;
- 120 é o termo independente;
- (20, 20, 5), (16, 16, 16) e (25, 18, 0) são três de suas várias soluções, pois cada uma dessas ternas ordenadas tornam a igualdade $3x + 2{,}5y + 2z = 120$ verdadeira.

Veja outros exemplos de equações lineares:

a) $2x - y = 4$

Nessa equação, 2 e -1 são os coeficientes; *x* e *y* são as incógnitas; e 4 é o termo independente.

Duas soluções dessa equação são, por exemplo, os pares ordenados (2, 0) e (3, 2), pois:

- para $x = 2$ e $y = 0$, temos: $2x - y = 4 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4$.
- para $x = 3$ e $y = 2$, temos: $2x - y = 4 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$.

b) $x + 2y - z = 0$

Nessa equação, 1, 2 e -1 são os coeficientes; *x*, *y* e *z* são as incógnitas; e 0 é o termo independente.

Uma solução dessa equação é, por exemplo, a terna ordenada $(-1, 1, 1)$, pois:

- para $x = -1$, $y = 1$ e $z = 1$, temos: $x + 2y - z = 0 \Rightarrow -1 + 2 \cdot 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

No entanto, a terna ordenada (2, 3, 0) **não** é solução da equação, pois:

- para $x = 2$, $y = 3$ e $z = 0$, temos: $x + 2y - z = 0 \Rightarrow 2 + 2 \cdot 3 - 0 = 0 \Rightarrow 8 \neq 0$.

Não são equações lineares, por exemplo:

c) $xy = 15$

d) $x^2 + y^2 = 1$

Exercícios resolvidos

1 Verifique se a terna ordenada $(3, -2, 4)$ é solução da equação linear $4x - 3y + 5z = 36$.

Resolução

Substituindo $x = 3$, $y = -2$ e $z = 4$ na equação, temos:

$$4x - 3y + 5z = 36$$
$$4 \cdot 3 - 3(-2) + 5 \cdot 4 = 36$$
$$12 + 6 + 20 = 38$$
$$38 \neq 36$$

Logo, $(3, -2, 4)$ não é uma solução da equação linear $4x - 3y + 5z = 36$.

2 Calcule o valor de α sabendo que $(1, -1, \alpha, \alpha + 1)$ é solução da equação $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 12$.

Resolução

Substituindo cada incógnita pelo seu valor correspondente na solução, temos:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 12$$
$$2 \cdot 1 - 3(-1) + \alpha - 5(\alpha + 1) = 12$$
$$2 + 3 + \alpha - 5\alpha - 5 = 12$$
$$-4\alpha = 12$$
$$\alpha = -3$$

Portanto, $\alpha = -3$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Sendo *x*, *y* e *z* as incógnitas, quais das seguintes equações são lineares?

x a) $4x - y + \frac{z}{2} = 0$

b) $5x + 2yz = 0$

c) $2x + 3y - z^2 = 0$

d) $xyz = 1$

2. Dos pares ordenados $(0, -3)$, $(1, 2)$, $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, quais são soluções da equação $2x - 3y = 9$? $(0, -3)$ e $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

3. Considere a equação $4x - 2y + z = 8$.

a) Verifique se o termo ordenado $(0, -3, 2)$ é uma solução dessa equação. É solução.

b) Obtenha uma solução dessa equação cujo valor de *z* seja zero. Sugestão de resposta: (3, 2, 0).

4. A equação linear $0x + 0y = 4$ possui solução? Justifique. Não, pois qualquer que seja um par ordenado (a, b) temos que $0a + 0b \neq 4$.

5. Determine *m*, de modo que $(-1, 2, -3)$ seja solução da equação linear: $2a - 4b + mc = 0$. $m = -\frac{10}{3}$

6. Determine os valores de *m* para que a equação $x - 4y + z = m^2 - 4$ seja homogênea. $m = 2$ ou $m = -2$

7. Sendo *a* um número real qualquer, mostre que $(a, 6 - 2a)$ é solução da equação $2x + y = 6$.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

8. Quando duas ou mais equações possuem o mesmo conjunto solução dizemos que essas equações são equivalentes. Dado o conjunto solução $S = \{(1, -1, 3)\}$, escreva no seu caderno quais das equações a seguir são equivalentes.

a) $x + y + z = 0$

x b) $-2x + y + z = 0$

c) $x - 2y + z = 1$

x d) $5x + y - 2z = -2$

e) $3x + y + z = 1$

f) $x - 2y + z = 8$

Sistemas lineares 2 × 2

Acompanhe a situação:

Em uma feira, as tapiocas têm preço único e os copos de suco também. Um rapaz pagou R$ 31,50 por 5 tapiocas e 3 copos de suco e outro pagou R$ 19,50 por 3 tapiocas e 2 copos de suco. Qual o preço da tapioca e do suco?

Para representar essa situação, chamamos de: *x* o preço de cada tapioca e de *y* o preço de cada suco e montamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31{,}50 \\ 3x + 2y = 19{,}50 \end{cases}$$

Esse tipo de sistema de equações, que é formado por duas equações lineares com duas incógnitas, você provavelmente já tenha estudado nos anos finais do Ensino Fundamental; então, vamos retomar esse tipo de sistema e os métodos de resolução.

A tapioca é um alimento feito de fécula extraída da mandioca, de origem indígena e descoberta em Pernambuco, tem feito cada vez mais parte da alimentação dos brasileiros de todas as partes do Brasil.

Flickr RF/Getty Images

Para determinar o valor de *x* e o de *y* que satisfazem as duas equações no sistema do exemplo anterior, vamos aplicar o método da adição, ou seja, multiplicar ambas as equações por números específicos e, em seguida, somá-las para anular uma incógnita.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31{,}50 \xrightarrow{\cdot (3)} & 15x + 9y = 94{,}50 \\ 3x + 2y = 19{,}50 \xrightarrow{\cdot (-5)} & \underline{-15x - 10y = -97{,}50} \end{cases}$$

$$-y = -3{,}00$$

$$y = 3{,}00$$

Substituindo *y* por 3,00 na primeira equação, temos:

$5x + 3y = 31{,}50 \Rightarrow 5x + 3 \cdot 3{,}00 = 31{,}50 \Rightarrow 5x + 9{,}00 = 31{,}50 \Rightarrow x = 4{,}50$

Logo, a tapioca custa R$ 4,50 e o suco custa R$ 3,00.

Observe que os valores $x = 4{,}50$ e $y = 3{,}00$ verificam as duas equações do sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31{,}50 \\ 3x + 2y = 19{,}50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot (4{,}50) + 3 \cdot (3{,}00) = 31{,}50 \\ 3 \cdot (4{,}50) + 2 \cdot (3{,}00) = 19{,}50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22{,}50 + 9{,}00 = 31{,}50 \\ 13{,}50 + 6{,}00 = 19{,}50 \end{cases}$$

Portanto, o par ordenado (4,50; 3,00) é a solução do sistema, ou seja, o seu conjunto solução é $S = \{(4{,}50;\ 3{,}00)\}$.

Um sistema linear 2 × 2 também pode ser resolvido pelo método da substituição, que consiste em expressar uma incógnita em função da outra em uma das equações e substituir o valor obtido na outra equação. Por exemplo, acompanhe a resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \quad \textcircled{\scriptsize I} \\ x + 2y = 4 \quad \textcircled{\scriptsize II} \end{cases}$$

Isolando a incógnita *x* da equação (II) obtemos $x = 4 - 2y$ e substituímos esse valor na equação (I):

$2x + 3y = 7 \Rightarrow 2(4 - 2y) + 3y = 7 \Rightarrow 8 - 4y + 3y = 7 \Rightarrow -y = -1 \Rightarrow y = 1$

Agora, para determinar o valor de *x* utilizamos a relação $x = 4 - 2y$, obtida na equação (II):

$x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2(1) \Rightarrow x = 4 - 2 \Rightarrow x = 2$

Veja que o par ordenado (2, 1) é, ao mesmo tempo, solução das duas equações do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}$$

Assim, o sistema tem o conjunto solução $S = \{(2,\ 1)\}$.

Denomina-se **sistema linear 2 × 2** o conjunto de duas equações lineares em duas incógnitas que pode ser representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$, em que a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 e b_2 são números reais.

Outros exemplos de sistemas lineares 2 × 2 nas incógnitas *x* e *y*.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 2x - 5 \\ 6y = 3 \end{cases}$

Exercícios resolvidos

3 Calcule *m* e *n*, de modo que os sistemas tenham o mesmo conjunto solução.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$$

Resolução

Empregando o método da adição, vamos resolver o primeiro sistema.

$\begin{cases} x - y = 1 \; \textcircled{I} \\ 2x + y = 5 \; \textcircled{II} \end{cases} \Rightarrow x = 2$ e substituindo em $\textcircled{I}$,

temos y = 1.

Como os sistemas têm o mesmo conjunto verdade, a solução (2, 1) é também solução do segundo sistema.

Substituindo esses valores, temos:

$$\begin{cases} 2m - n = -1 \\ 2n + m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - n = -1 \\ -2m - 4n = -4 \end{cases}$$
$$-5n = -5 \Rightarrow n = 1$$

$$2m - n = -1 \Rightarrow 2m - 1 = -1 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Para que os sistemas tenham o mesmo conjunto solução, devemos ter m = 0 e n = 1.

4 Um caminhão-baú pode levar, no máximo, 58 caixas do tipo *A* ou *B*, de mesmo tamanho. Elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. A carga máxima para esse caminhão é 3,84 toneladas em cada viagem.

a) Quais equações representam a situação, estando o caminhão com a capacidade máxima ocupada?

b) Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão, estando ele com a capacidade máxima ocupada?

Resolução

a) Determinando x = número de caixas do tipo *A* e y = número de caixas do tipo *B*, temos:

$$\begin{cases} x + y = 58 \quad \textcircled{I} \\ 56x + 72y = 3\,840 \quad \textcircled{II} \end{cases}$$

b) Podemos resolver esse sistema usando o método da substituição. Assim, isolando *x* na equação $\textcircled{I}$ e substituindo-o na equação $\textcircled{II}$, temos:

$$x + y = 58 \Rightarrow x = 58 - y$$
$$56x + 72y = 3\,840 \Rightarrow 56 \cdot (58 - y) + 72y = 3\,840$$
$$3\,248 - 56y + 72y = 3\,840 \Rightarrow 16y = 592 \Rightarrow y = 37$$

Substituindo *y* por 37, na equação $\textcircled{I}$, temos:

$$x + 37 = 58 \Rightarrow x = 21$$

Logo, são transportadas 21 caixas do tipo *A* e 37 do tipo *B*.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

9. Verifique se (−1, 2) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} a - 4b = -9 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

É solução.

10. Verifique se os sistemas a seguir têm o mesmo conjunto solução.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

Sim
S = {4, 3}.

11. (UFG-GO) Para se deslocar de casa até o seu trabalho, um trabalhador percorre 550 km por mês. Para isso, em alguns dias, ele utiliza um automóvel e, em outros, uma motocicleta. Considerando que o custo do quilômetro rodado é de 21 centavos para o automóvel e de 7 centavos para a motocicleta, calcule quantos quilômetros o trabalhador deve andar em cada um dos veículos para que o custo total mensal seja de R$ 70,00. Motocicleta = 325 km e automóvel = 225 km.

12. Determine o conjunto solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases}$$

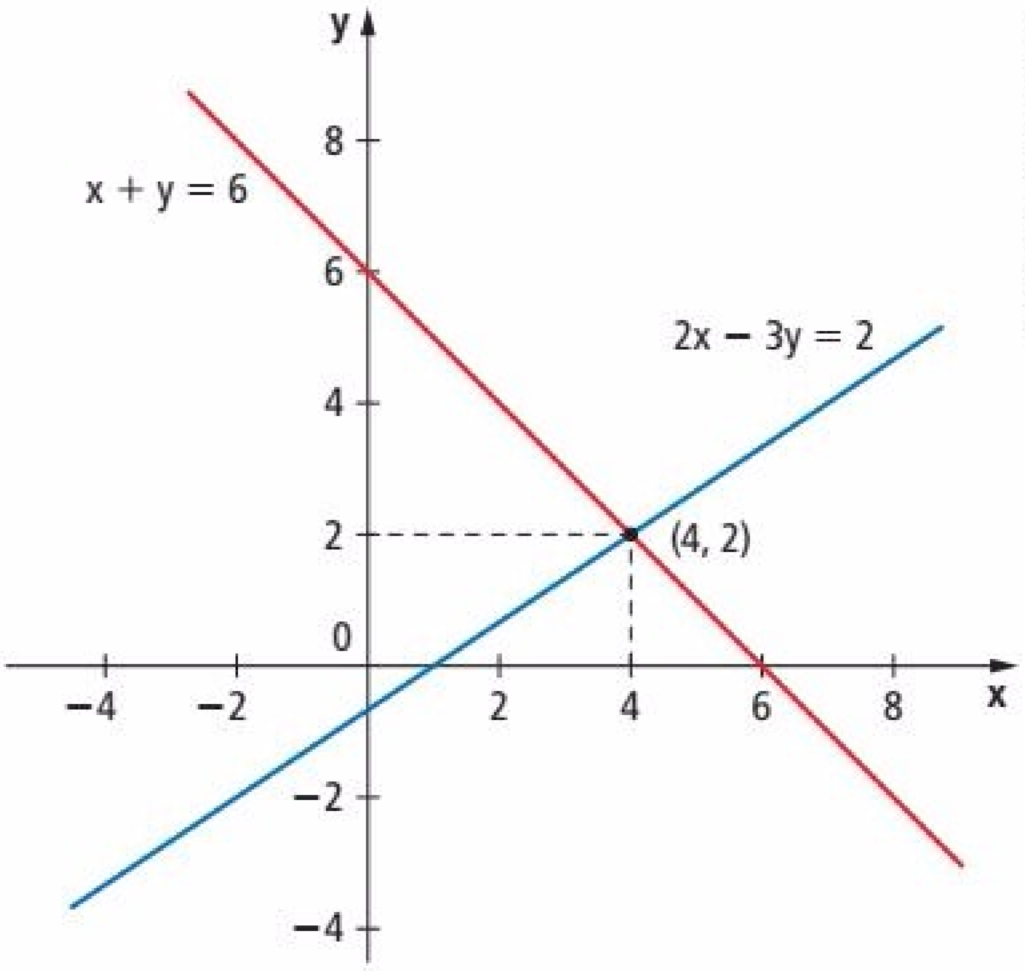
S = {(10, 5)}

Interpretação geométrica e classificação

As equações lineares do tipo ax + by = c, com *a* e *b* não simultaneamente nulos, podem ser reescritas como uma função afim, cujo gráfico é uma reta.

Assim, a interpretação geométrica de um sistema de equações lineares desse tipo pode ser feita pela representação gráfica das retas associadas a ele e, caso haja pontos de intersecções entre essas retas, eles representam a solução do sistema.

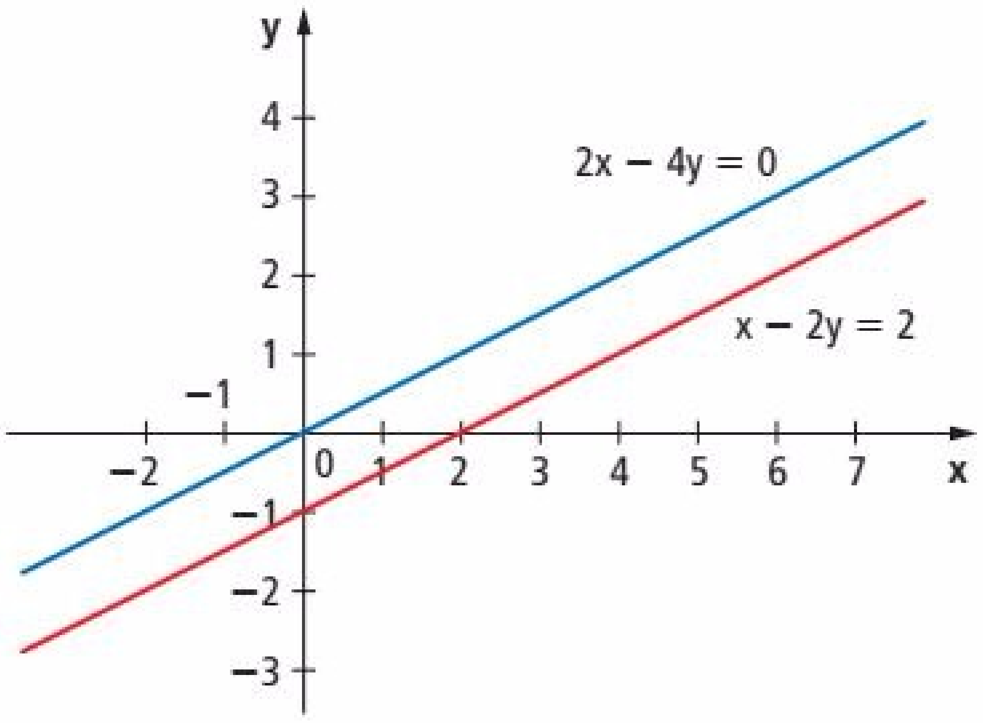
Por exemplo, traçando o gráfico associado ao sistema linear $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$, obtemos a representação ao lado.



Ilustrações: Editoria de arte

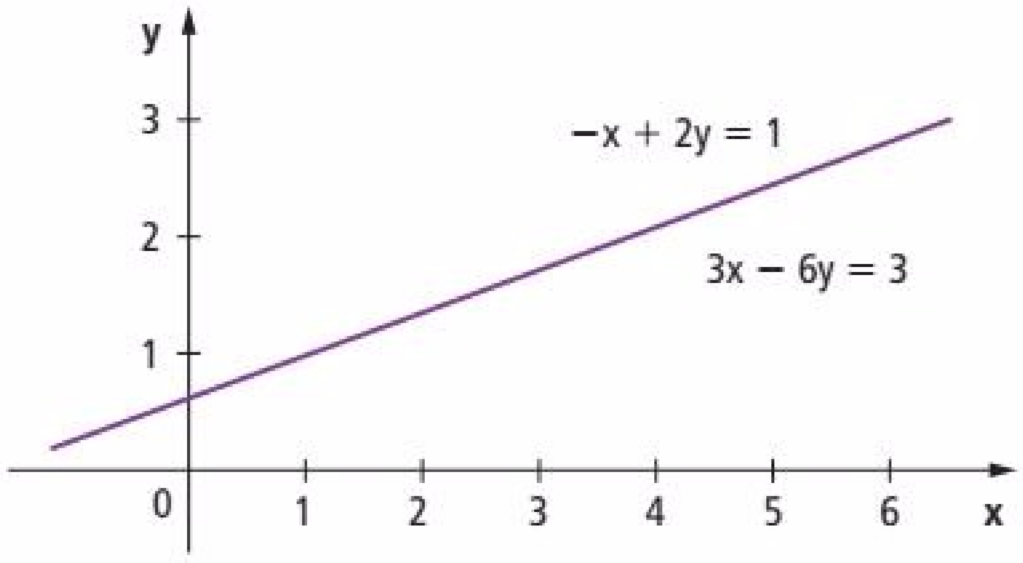
As coordenadas do ponto em que as retas x + y = 6 e 2x − 3y = 2 se intersectam são a solução do sistema, ou seja, o ponto (4, 2). Nesse caso, afirmamos que esse é um **sistema possível e determinado** (SPD) porque possui uma solução.

Ao traçar as retas de cada equação do sistema $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ podemos observar que essas retas são paralelas, ou seja, elas não se cruzam. Veja ao lado a representação geométrica de cada uma delas:



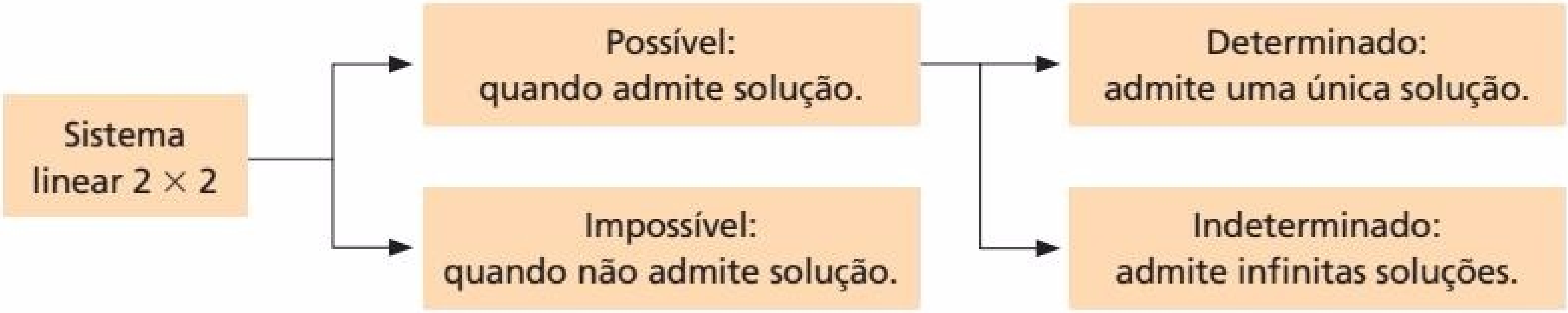
Como essas retas não se intersectam, esse sistema não possui solução e, por isso, dizemos que é um **sistema impossível** (SI).

Observe ao lado a representação geométrica do sistema $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$:



Podemos observar que as retas são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos de intersecção. Assim, esse sistema tem infinitas soluções e chamamos de **sistema possível e indeterminado** (SPI).

De maneira geral, os sistemas lineares podem ser classificados quanto ao número de soluções, veja:


Sistema linear 2 × 2
Possível: quando admite solução.
Impossível: quando não admite solução.
Determinado: admite uma única solução.
Indeterminado: admite infinitas soluções.

Exercícios resolvidos

5 Resolva e classifique o sistema: $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ 4a - 2b = 10 \end{cases}$

Resolução

Vamos resolver esse sistema usando o método da substituição. Veja:

$$\begin{cases} 2a - b = 5 & \text{Ⅰ} \\ 4a - 2b = 10 & \text{Ⅱ} \end{cases}$$

De Ⅰ, temos: $b = 2a - 5$

Substituindo b por $2a - 5$ em Ⅱ:

$4a - 2 \cdot (2a - 5) = 10 \Rightarrow 4a - 4a + 10 = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0a = 0$

Observe que qualquer número real colocado no lugar de *a* torna a sentença verdadeira.

Isso significa que o sistema tem infinitas soluções, ou seja, ele é possível e indeterminado. Cada uma das infinitas soluções é um par ordenado cujo 1º elemento é um número real qualquer e cujo 2º elemento é o dobro do 1º menos 5.

Veja algumas das soluções desse sistema:

$(1, -3), (-3, -11), (0, -5)$ e $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$

Como estamos trabalhando com números reais, podemos escrever: $S = \{(k, 2k - 5) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

6 Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

Resolução

Vamos resolver o sistema utilizando o método da adição. Multiplicando a primeira equação por (-2), temos:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -4x - 6y = -18 \rightarrow \cdot\ (-2) \\ \ \ 4x + 6y = 10 \quad + \end{cases} \\ \hline \quad 0x + 0y = -8 \end{array}$$

Observe que não há valores reais de *y* que tornam a sentença verdadeira. Por isso, dizemos que a solução do sistema é impossível, isto é, o conjunto solução é vazio: $S = \{\ \}$. De fato, observando as duas equações do sistema, já poderíamos perceber que não há solução, pois as equações $2x + 3y = 9$ e $4x + 6y = 10$ são incompatíveis. Multiplicando por 2 a primeira equação, obtemos $4x + 6y = 18$, e, como $4x + 6y$ não pode ser igual a 10 e a 18 ao mesmo tempo, o sistema é impossível.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

13. Obtenha o ponto de intersecção das retas *r* e *s* cujas equações são: r: $x + 2y = 0$ e s: $2x - 2y = -6$. $(-2, 1)$

14. Classifique os sistemas em possíveis, impossíveis, determinados ou indeterminados:

a) $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ Possível e determinado.

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 8y = 7 \end{cases}$ Impossível.

c) $\begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 4a + 8b = 4 \end{cases}$ Possível e indeterminado.

15. Considere o sistema de equações: $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x + my = 8 \end{cases}$

Qual o valor de *m* para que esse sistema seja possível e determinado? $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -9\}$

16. Determine *k* para que o sistema abaixo tenha infinitas soluções: $k = 10$

$$\begin{cases} x\sqrt{3} + y = 5 \\ 2x\sqrt{3} + 2y = k \end{cases}$$

17. Sabendo que *a* e *b* representam números reais, resolva e classifique o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{4} + \dfrac{1-b}{2} = a - 3b \\ \dfrac{a+2}{3} = \dfrac{a+2b}{4} \end{cases}$$

$a = 10$ e $b = 3$

18. (UFRGS-RS) O sistema de equações $\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - y - 18 = 0 \end{cases}$

Possui:

a) nenhuma solução

x b) uma solução

c) duas soluções

d) três soluções

e) infinitas soluções

Conexões **Transporte coletivo**

19. Utilizar e compartilhar o espaço público é direito e dever de todo cidadão. As grandes cidades sofrem com a gestão desse espaço quando se trata de vias públicas de rodagem, uma vez que os engarrafamentos e o tempo médio de locomoção são bastante grandes. As soluções estão no compartilhamento sustentável desse espaço, e o uso do transporte coletivo se apresenta como uma solução tangível. Leia o texto a seguir e faça o que se pede.

Entrada
301 PINHAIS
17E12

Pessoas utilizando o transporte público coletivo. Cidade de Curitiba, Paraná, 2014.

Marcio Jose Bastos Silva/Shutterstock.com

Os benefícios do transporte coletivo

[...] A cidade reúne os espaços de produção, trabalho e lazer e nesta se distribuem os serviços essenciais para a vida de seus habitantes. Logo, a forma de administração e a organização dos espaços públicos de convívio e interação social influenciam fortemente a vida cotidiana. A fim de propiciar mais liberdade e bem-estar para maior número de pessoas no meio urbano é preciso considerar a necessidade da gestão do espaço público. Regras básicas de uso do espaço e dos recursos públicos, sejam formais ou tácitas, precisam ser estabelecidas de forma que não apenas seu uso seja eficiente, mas também para que o convívio social seja possível. [...]

O transporte público coletivo – como metrôs, ônibus e trens de superfície – possui uma série de vantagens se comparado ao transporte baseado no automóvel. Sua primeira e mais evidente característica é a capacidade imensamente superior de transporte de passageiros.

Um ônibus pode transportar até 72 pessoas, ocupando 30 m^2. A mesma quantidade de pessoas é transportada (com uma taxa média de ocupação de 1,2 pessoa por carro) em 60 carros, ocupando 1 000 m^2. Assim, o ganho em termos de espaço e energia é muito elevado, sendo que, em uma estimativa modesta, um ônibus responde à capacidade de, no mínimo, 35 carros.

Com o ganho de espaço, há menos engarrafamentos nas ruas e maior ganho de tempo de deslocamento. Mesmo que um trajeto dure menos tempo se realizado por meio do automóvel em horários sem engarrafamentos, nada garante uma estabilidade ao longo do dia e do mês neste tipo de transporte. Com menos engarrafamentos, há maior pontualidade e regularidade de horários, o que permite a uma pessoa planejar suas atividades diárias com relativa precisão. [...]

[...] O transporte coletivo serve também como espaço de socialização e integração, o que se faz ao longo do trajeto – ao se encontrar em espaços públicos, as pessoas podem debater todo tipo de questões, desde os jogos da sua seleção de futebol até eventos políticos e culturais na cidade. [...]

[...] Em resumo, o transporte coletivo tem o potencial de promover uma série de vantagens para os habitantes da cidade, ampliando sua capacidade de locomoção e seu bem-estar. [...]

BERTUCCI, Jonas de Oliveira. Os benefícios do transporte coletivo. **Boletim Regional, Urbano e Ambiental**, Ipea, n. 5, jun. 2011. Disponível em: <http://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/5652/1/BRU_n5_beneficios.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2015.

a) Qual a principal vantagem do transporte coletivo em relação aos meios de transporte individuais, como carros e motos, conforme apresentado no texto? Capacidade superior de transporte de passageiros.

b) Além do ganho apresentado no texto, qual o benefício ambiental proveniente do transporte coletivo?
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam sobre as emissões de gás carbônico, sendo a adoção pelo transporte coletivo positiva para a redução de gases poluentes.

c) Discuta com os colegas outros meios de transporte que tenham a característica de redução de impacto ambiental e que podem contribuir também para uma melhor saúde física e mental.

d) Uma cidade de tamanho médio possui 1 ônibus para cada 150 carros que circulam por suas ruas. Utilizando os dados de ocupação máxima e média para ônibus e carros respectivamente, conforme presente no texto, qual a quantidade de veículos necessária para transportar 46 800 pessoas? 100 ônibus e 15 000 carros.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam e comentem a respeito da bicicleta, patins, *skate* etc., que são meios de transporte não poluentes, e que servem também como atividade física, promovendo o bem-estar e a saúde. Estimule os alunos a pensar em meios de transporte que não utilizem combustíveis fósseis, como os veículos elétricos. Aproveite a oportunidade para ressaltar aos alunos a importância do uso de equipamentos de segurança adequados para casa meio de transporte, além de observar o local correto da via para trafegar, como ciclovias.

Sistemas lineares

De maneira geral, denominamos sistema linear de *m* equações com *n* incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ a todo conjunto de equações que pode ser representado como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que:

- $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{mn}$ são os coeficientes reais das incógnitas;
- $b_1, b_2, ..., b_m$ são os termos independentes reais.

Quando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações dos sistemas, ou seja, satisfaz simultaneamente cada uma das equações, então $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução do sistema de equações.

Sistemas lineares 3 × 3

No caso dos sistemas lineares 2 × 2, temos *m* e *n* iguais a 2. Quando *m* e *n* forem iguais a 3, temos um sistema que chamamos de sistema linear 3 × 3 formado por três equações e apresenta três incógnitas, ou seja, é um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Em que:

- x_1, x_2 e x_3 são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{32}$ e a_{33} são os coeficientes das incógnitas;
- b_1, b_2 e b_3 são os termos independentes.

Exemplos de sistemas lineares 3 × 3:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = -2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ É um sistema linear 3 × 3 nas incógnitas *x*, *y* e *z*.

b) $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 2c = 2 \end{cases}$ É um sistema linear 3 × 3 nas incógnitas *a*, *b* e *c*.

A solução de um sistema linear 3 × 3 é um terno ordenado, ou tripla, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de números reais que satisfaz às três equações do sistema.

O terno ordenado (1, 1, 2), por exemplo, é solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases},$$

pois substituindo x_1, x_2 e x_3, respectivamente, por 1, 1 e 2, temos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1) + 1 - 2 = 1 \\ 1 - 1 + 2 = 2 \\ 1 + 3(1) + 2 = 6 \end{cases}$$

E, portanto, S = {(1, 1, 2)} é o conjunto solução do sistema.

Resolução de um sistema linear 3 × 3

Assim como os sistemas lineares 2 × 2, os sistemas lineares 3 × 3 podem ser resolvidos pelo método da adição e pelo método da substituição.

Vamos resolver o sistema abaixo utilizando os dois métodos.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textcircled{I} \\ x - y + z = 0 & \textcircled{II} \\ 2x + y - z = -3 & \textcircled{III} \end{cases}$$

Resolvendo primeiro pelo método da adição, podemos observar que ao adicionar as equações $\textcircled{II}$ e $\textcircled{III}$ podemos obter o valor da incógnita *x*:

$$\begin{array}{rl} & x - y + z = 0 \\ + & \underline{2x + y - z = -3} \\ & 3x \qquad\quad = -3 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

Substituindo esse valor de *x* em duas equações quaisquer do sistema, por exemplo, nas equações $\textcircled{I}$ e $\textcircled{II}$, obtemos o sistema linear 2 × 2:

$$\begin{cases} y + 2z = 2 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $y = 0$ e $z = 1$. Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(-1, 0, 1)\}$.

Agora, utilizando o método da substituição, vamos considerar a equação $\textcircled{II}$ e isolar a incógnita *x*:

$$\textcircled{II}\ x - y + z = 0 \Rightarrow x = y - z$$

Substituindo *x* por $y - z$ nas equações $\textcircled{I}$ e $\textcircled{III}$, temos:

$$\textcircled{I}\ x + y + 2z = 1 \Rightarrow (y - z) + y + 2z = 1 \Rightarrow 2y + z = 1$$

$$\textcircled{III}\ 2x + y - z = -3 \Rightarrow 2(y - z) + y - z = -3 \Rightarrow y - z = -1$$

Assim, também obtemos um sistema linear 2 × 2:

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos: $y = 0$ e $z = 1$.

Substituindo esses valores em $x = y - z$, temos $x = -1$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(-1, 0, 1)\}$.

Sistemas equivalentes

Dizemos que dois sistemas são equivalentes quando admitem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

São sistemas equivalentes pois ambos os sistemas lineares 3 × 3 têm o conjunto solução $S = \{(1, 2, 3)\}$.

Classificação de sistemas lineares 3 × 3

Também podemos classificar os sistemas 3 × 3 quanto ao número de soluções, ou seja:

- possível e determinado: quando possui uma única solução;
- possível e indeterminado: quando possui infinitas soluções;
- impossível: quando não admite solução.

Exercício resolvido

7 (UFPE) Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, A_1, A_2 e A_3, na construção de três tipos de carros C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em tonelada, usados na confecção dos três tipos de carro está na tabela a seguir.

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos (dos tipos C_1, C_2 ou C_3)?

Resolução

Sejam *a*, *b* e *c* os respectivos números de carros dos tipos C_1, C_2 e C_3 que foram construídos. As informações do enunciado nos levam ao sistema:

$$\begin{cases} 2a+3b+4c=26 & \text{(I)} \\ a+b+2c=11 & \text{(II)} \\ 3a+2b+c=19 & \text{(III)} \end{cases}$$

Isolando o valor de *a* da equação (II) e substituindo-o nas equações (II) e (III), obtemos:

$a + b + 2c = 11 \Rightarrow a = 11 - b - 2c$ (IV)

De (I), temos: $2 \cdot (11 - b - 2c) + 3b + 4c = 26 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 4$

De (III), temos: $3 \cdot (11 - b - 2c) + 2b + c = 19 \Rightarrow$
$\Rightarrow b + 5c = 14$ (V)

Substituindo *b* por 4 na equação (V):

$4 + 5c = 14 \Rightarrow c = 2$

Substituindo *b* por 4 e *c* por 2 na equação (IV):

$a = 11 - 4 - 2 \cdot 2 \Rightarrow a = 3$

Portanto, foram construídos 3 carros do tipo C_1, 4 carros do tipo C_2 e 2 carros do tipo C_3, num total de 9 carros.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

20. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=5 \\ -x_1+x_2+x_3=-2 \end{cases}$$

Verifique se as ternas a seguir são soluções desse sistema.

a) $(2, -1, 1)$ É solução. b) $(0, 0, 0)$ Não é solução.

21. Calcule o conjunto solução dos sistemas lineares a seguir e classifique-os em "possível e determinado", "impossível" e "possível e indeterminado".

a) $\begin{cases} -x+y+z=-10 \\ 2x+3y-z=-10 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

$S = \{(0, -5, -5)\} \rightarrow$ Sistema possível e determinado.

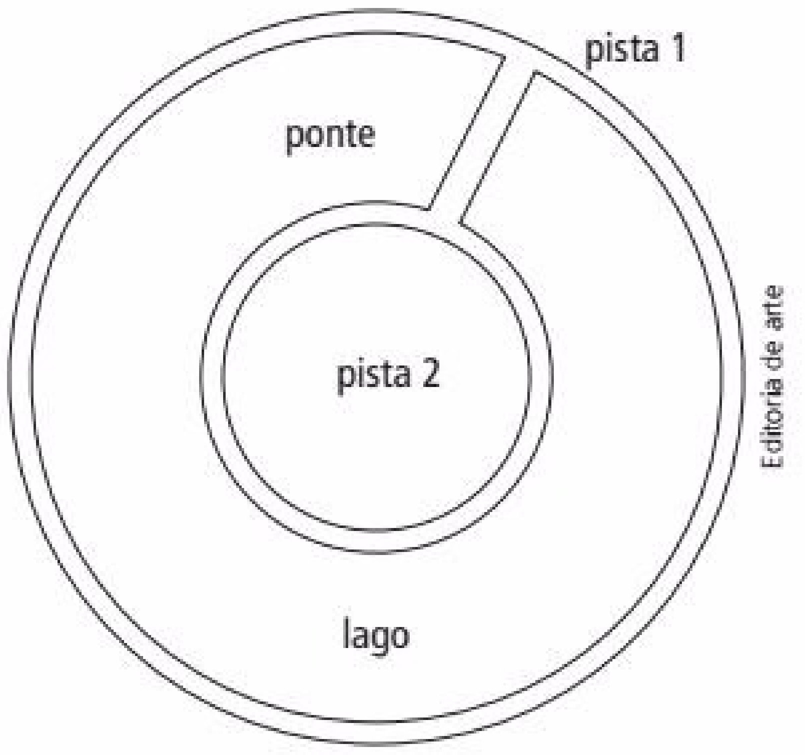
b) $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 3x+2y-3z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 4x+y+4z=-2 \\ 2x-y+2z=-4 \end{cases}$

$S = \{\ \} \rightarrow$ Sistema impossível.

22. (UECE) Um hotel possui exatamente 58 unidades de hospedagem assim distribuídas: *m* quartos duplos, *p* quartos triplos e *q* suítes para quatro pessoas. A capacidade máxima de lotação do hotel é 166 pessoas, sendo que, dessas, 40 lotam completamente todas as suítes. A diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é:

a) 8 b) 6 c) 14 d) 10 [✓ e) 12]

23. (UFG-GO) Em um determinado parque, existe um circuito de caminhada, como mostra a figura a seguir.



Editoria de arte

Um atleta, utilizando um podômetro, percorre em um dia a pista 1 duas vezes, atravessa a ponte e percorre a pista 2 uma única vez, totalizando 1 157 passos. No dia seguinte, percorre a pista 1 uma única vez, atravessa a ponte e percorre a pista 2, também uma única vez, totalizando 757 passos. Além disso, percebe que o número de passos necessários para percorrer sete voltas na pista 1 equivale ao número de passos para percorrer oito voltas na pista 2. Diante do exposto, conclui-se que o comprimento da ponte, em passos, é:

a) 5 [✓ c) 7] e) 15
b) 6 d) 8

21. c) $S = \{(-\alpha, \alpha, 0);\ \alpha \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ Sistema possível e indeterminado.
d) $S = \{(1, 2, -2)\} \rightarrow$ Sistema possível e determinado.

24. (FGV-SP) Para trabalhar na feira internacional do livro, a editora contratou três funcionários: Ana, Beto e Carlos, com salários x, y e z reais, respectivamente. O salário de Ana é igual à soma dos salários de Beto e Carlos. No final da feira, a editora pagou uma gratificação, de valor igual ao salário de Beto, a cada um dos três. Assim, Ana recebeu no total R$ 2 300,00, e a soma dos valores que os três receberam foi de R$ 5 400,00. Qual foi o valor da gratificação que receberam? R$ 800,00

25. (Unicamp-SP) As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto.

Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor pago correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal.

Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

x a) $\begin{cases} x+2z=60 \\ y+z=60 \\ 3{,}5x-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+z=60 \\ y+2z=60 \\ 3{,}5x-y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2z=60 \\ y+z=60 \\ 3{,}5x+y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+z=60 \\ y+2z=60 \\ 3{,}5x+y=0 \end{cases}$

Matrizes associadas a um sistema linear

Considere o sistema linear de *m* equações com *n* incógnitas: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, na qual cada linha é formada, ordenadamente, pelos coeficientes e termos independentes de cada equação, é denominada **matriz completa** do sistema.

A matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes ordenados de cada equação, é denominada **matriz incompleta** do sistema.

Consideremos ainda as seguintes matrizes coluna associadas ao sistema:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, formada pelas incógnitas.

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, formada pelos termos independentes.

Multiplicando a matriz incompleta pela matriz das incógnitas, obtemos a matriz dos termos independentes:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Dizemos que essa é a **forma matricial** do sistema linear.

Em notação simplificada, temos: $A \cdot X = B$, em que *A* é a matriz de ordem $m \times n$ formada por todos os coeficientes do sistema, *X* é a matriz coluna de ordem $n \times 1$, formada por todas as incógnitas, e *B* é a matriz coluna de ordem $n \times 1$ formada por todos os termos independentes.

Se um sistema linear tem o número de equações igual ao número de incógnitas, então a matriz incompleta associada a esse sistema é uma matriz quadrada, e seu determinante D_A é dito **determinante do sistema**.

Exercício resolvido

8 Represente na forma matricial e verifique se o sistema é possível e determinado.

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 4x - 3y + 6z = -1 \\ 7x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

Resolução

Sendo *A* a matriz dos coeficientes ordenados, *X* a matriz formada pelas incógnitas e *B*, pelos termos independentes, podemos escrever: A · X = B. Assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 210 - 4 - 21 - 12 + 40 =$$

$$= 225 \neq 0$$

Portanto, o sistema é possível e determinado.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

26. Expresse matricialmente os sistemas:
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y + z - t = 2 \\ 2x - y + t = 0 \\ y - z + 3t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = -5 \end{cases}$

27. Escreva no caderno as equações dos sistemas associados às matrizes dadas, em cada caso:
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

28. Represente o sistema $\begin{cases} 3a - 7b = 1 \\ 5a + 2b = 4 \end{cases}$ na forma matricial e depois resolva-o.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

29. Calcule *x*, *y* e *z*: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
x = −2, y = 3 e z = 0

30. No sistema linear abaixo, i_1, i_2 e i_3 são intensidades das correntes elétricas que percorrem certo circuito elétrico.

O sinal dos valores indica o sentido da corrente de acordo com o sentido adotado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$i_1 = -3,5$
$i_2 = 6,25$
$i_3 = 2,75$

Determine os valores dessas correntes elétricas.

31. Sabendo que (a, b, 20) é solução do sistema representado pelas matrizes: $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -8 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$, calcule o valor de a + 4b. 7

32. Em um concurso público, foram realizadas três provas, com 10 questões em cada uma. Cada questão valia um ponto, mas os pesos *x*, *y* e *z* das provas, nessa ordem, eram diferentes. O primeiro classificado no concurso, que acertou 8 questões na primeira prova, 9 na segunda e 10 na terceira, obteve, no final, um total de 93 pontos. O segundo classificado acertou, nessa mesma ordem, 9, 9 e 7 questões, totalizando 80 pontos. O terceiro classificado acertou 8, 8 e 7 questões, respectivamente, atingindo a soma de 75 pontos no final.

Para calcular os pesos *x*, *y* e *z*, podemos descrever a situação por meio de um sistema de equações. Escreva no caderno esse sistema e dê sua representação matricial.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

33. Considere o sistema linear representado pelas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2^x & 2^y & 2^z \\ 2^{x+1} & 2^y & -2^z \\ 2^x & -2^{y+1} & 2^{z+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcule os valores de *x*, *y* e *z*. x = 2, y = 1 e z = 0

34. (AFA-SP) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} k \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Em relação à equação matricial AX = B, é **correto** afirmar que:

a) é impossível para $k = \frac{7}{2}$.

b) admite solução única para $k = \frac{7}{2}$.

X c) toda solução satisfaz à condição $x_1 + x_2 = 4$.

d) admite a terna ordenada $\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ como solução.

Escalonamento de sistemas lineares

Segundo o dicionário eletrônico Houaiss, escalonar significa "dar formato de escada a", que, em nosso caso, escalonar um sistema linear seria dar um formato de escada a um sistema.

De modo informal, dizemos que um sistema linear está escalonado quando disposto nas seguintes formas:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 0x + 5y + z = 1 \\ 0x + 0y - z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 5z + 2w = 4 \\ 0x + 3y + 8z - 2w = 1 \\ 0x + 0y - z - 3w = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 2w = 0 \end{cases}$

Observe que, em ambos os exemplos:

- todas as incógnitas correspondentes estão alinhadas uma abaixo da outra;
- toda equação contém pelo menos um coeficiente não nulo;
- em toda equação do sistema, a primeira incógnita com coeficiente não nulo situa-se à esquerda da primeira incógnita com coeficiente não nulo da linha seguinte.

Considerando essas informações, podemos definir que todos os sistemas lineares m × n serão chamados escalonados quando:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \phantom{a_{11}x_1 + {}} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \phantom{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + {}} a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \phantom{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n} \vdots \quad \vdots \\ \phantom{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + {}} a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Acompanhe a resolução de alguns sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 4x + y - 6z = -9 \\ \phantom{4x + {}} 2y + 3z = 8 \\ \phantom{4x + 2y + {}} 5z = 10 \end{cases}$

Começando pela 3ª equação, temos: $5z = 10 \Rightarrow z = 2$

Substituindo o valor de *z* na 2ª equação:

$$2y + 3z = 8 \Rightarrow 2y + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow y = 1$$

Por último, substituindo os valores de *y* e *z* na 1ª equação, determinamos o valor de *x*:

$$4x + 1 - 6 \cdot 2 = -9 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Portanto, o conjunto solução desse sistema é $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; 1, 2\right)\right\}$. Então, esse sistema é possível e determinado.

b) $\begin{cases} a - b + c = 4 \\ \phantom{a - {}} 5b - 2c = -12 \end{cases}$

Observe que nesse sistema o número de equações é menor que o número de incógnitas.

Temos duas equações e três incógnitas. Assim, para obter um sistema escalonado conforme visto anteriormente, podemos considerar como $0 \cdot c = 0$ a equação que está faltando e, por isso, considerá-lo um **sistema possível e indeterminado**.

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ \phantom{a - {}} 5b - 2c = -12 \\ \phantom{a - 5b - {}} 0c = 0 \end{cases}$$

Para encontrar todas as soluções desse sistema, uma vez que ele é indeterminado, podemos substituir a incógnita *c* por uma nova letra chamada **parâmetro**, por exemplo, α, e encontrar os valores das outras incógnitas em função de α. Então, fazendo $c = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\begin{cases} a - b + \alpha = 4 \\ \quad 5b - 2\alpha = -12 \end{cases}$$

Então:

$$5b - 2\alpha = -12 \Rightarrow b = \frac{2\alpha - 12}{5}$$

Substituindo o valor de *b* na 1ª equação, temos:

$$a - b + c = 4 \Rightarrow a - \frac{2\alpha - 12}{5} + \alpha = 4$$

$$a = 4 + \frac{2\alpha - 12}{5} - \alpha \Rightarrow a = \frac{20 + 2\alpha - 12 - 5\alpha}{5} \Rightarrow a = \frac{-3\alpha + 8}{5}$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é: $S = \left\{\left(\frac{-3\alpha + 8}{5}, \frac{2\alpha - 12}{5}, \alpha\right)\right\}$.

Atribuindo alguns valores arbitrários para α, podemos obter algumas soluções numéricas para o sistema. Veja:

$$\alpha = 0 \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{8}{5}, \frac{-12}{5}, 0\right)\right\} \qquad \text{e} \qquad \alpha = 1 \Rightarrow S = \{(1, -2, 1)\}$$

Resolução de um sistema linear por escalonamento

Sempre é possível escalonar um sistema linear transformando o sistema inicial em um sistema equivalente, ou seja, que possui o mesmo conjunto solução. Abaixo alguns procedimentos que permitem o escalonamento.

- Podemos trocar de lugar duas ou mais equações de um sistema linear. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

- A fim de alinhar as incógnitas correspondentes, podemos trocar de lugar suas posições na mesma equação. Por exemplo:

$$\begin{cases} 3y - z + 2x = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

- Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação por qualquer número real não nulo. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \quad \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -2x - 4y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Depois de multiplicar uma equação por um número real não nulo, podemos somar o resultado a outra equação do sistema e obter uma nova equação. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \quad \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} \cancel{2x} + 3y - z = 5 \\ -\cancel{2x} - 4y - 2z = -4 \end{cases} \\ \hline \quad -y - 3z = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ \quad -y - 3z = 1 \end{cases}$$

- Na ausência de uma incógnita, podemos completar utilizando o coeficiente nulo para essa incógnita. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x \quad - \quad z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 0y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Acompanhe no exercício resolvido a seguir a utilização do método do escalonamento para resolver um sistema de equações lineares.

Exercício resolvido

9 Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$

Resolução

Para facilitar os cálculos do escalonamento, sempre que possível, organize as equações, trocando-as de lugar, para que o coeficiente da primeira incógnita seja igual a 1. Para esse exercício, será preciso trocar de lugar a 1ª e a 2ª equações, ou seja:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$$

Vamos anular o coeficiente da incógnita *x* da 2ª equação multiplicando a primeira equação por (−2), ou seja, o valor oposto do coeficiente a_{21}, e adicionamos o resultado à 2ª equação. Analogamente, vamos multiplicar a 1ª equação por (−3) e somar o resultado à 3ª equação para anular a variável *x*. Observe que −3 é o oposto do coeficiente a_{31}.

Assim, obtemos o sistema linear equivalente a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ \quad -5y - 6z = -2 \\ \quad -9y - 13z = -8 \end{cases}$$

Nosso trabalho agora é anular a incógnita *y* da 3ª equação $-9y - 13z = -8$ e, para isso, precisamos utilizar a 2ª equação. Se utilizarmos a 1ª equação novamente a incógnita *x* retornaria ao sistema e, assim, ele não estaria escalonado.

A 2ª equação $-5y - 6z = -2$ precisa ser multiplicada por um determinado número de tal maneira que o coeficiente de *y* seja 9 (oposto do coeficiente a_{31}). Assim, devemos multiplicar a 2ª equação por $-\frac{9}{5}$ e ao adicionar o resultado à 3ª equação, obtemos o seguinte sistema equivalente escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ \quad y + \frac{6}{5}z = \frac{2}{5} \\ \quad\quad -\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \end{cases}$$

Da 3ª equação, temos: $-\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \Rightarrow z = 2$

Substituindo *z* por 2 na 2ª equação, obtemos:

$y + \frac{6}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5} \Rightarrow y = -2$

Na 1ª equação, substituindo *y* por −2 e *z* por 2, obtemos: $x + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 5 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \{(1, -2, 2)\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

35. Resolva os sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 70 \\ \quad 4y = 80 \end{cases}$ $S = \{(10, 20)\}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \quad y - z = 4 \\ \quad\quad 7z = 21 \end{cases}$ $S = \{(-12, 7, 3)\}$

c) $\begin{cases} a - 3b + 2c - d = -1 \\ \quad 5b - 3c + d = 3 \\ \quad\quad \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 \\ \quad\quad\quad \frac{1}{5}d = \frac{1}{5} \end{cases}$ $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$

d) $\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ \quad 3y - 5z = 2 \\ \quad\quad 0z = 1 \end{cases}$ $S = \varnothing$

36. a) $S = \left\{\left(\frac{13 - \lambda}{2}, \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

b) $S = \left\{\left(\lambda, \frac{-8 + 4\lambda}{5}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

36. Determine o conjunto solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ \quad 0y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

37. Resolva os sistemas:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $S = \varnothing$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $S = \{(-7, -2, 2)\}$

38. O sistema abaixo tem o número de equações menor que o número de incógnitas. Resolva-o.

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ \quad -y + 5z - 4t = 5 \\ \quad\quad 6z - t = 2 \end{cases}$$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

39. Resolva os sistemas a seguir: **39. f)** $S = \left\{\left(\frac{14 - a}{7}, \frac{4a + 7}{7}, a\right) \mid a \in \mathbb{R}\right\}$

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ x + 5y = -9 \end{cases}$ $S = \{(1, -2)\}$

b) $\begin{cases} a + 4b + 3c = 1 \\ a - 3b - 2c = 5 \\ 2a + 5b + 4c = 4 \end{cases}$ $S = \{(3, -2, 2)\}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$ $S = \{(40 + 7b, -2b - 9, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 13x + 26y = -9 \end{cases}$ $S = \varnothing$

e) $\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $S = \{(0, 0, 0)\}$

f) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$

40. Resolva os sistemas a seguir por escalonamento:

a) $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-y+z-t=2 \\ -x+y+z-t=-4 \\ x-y-z-t=-4 \end{cases}$ $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+4z=9 \\ x-y+2z=2 \\ x+4y+2z=7 \end{cases}$ $S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

41. Determine o valor de *t* no sistema: $t = 8$

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+t=1 \\ y+z-2t=0 \\ 4y+3z=7 \end{cases}$$

42. Verifique se o sistema abaixo tem ou não solução. Em caso afirmativo, resolva-o.

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ x+3y+5z-t=50 \\ 2x+3y+4z+t=64 \\ 3x+5y-7z+t=4 \end{cases}$$ $S = \{(5, 6, 7, 8)\}$

Classificação de um sistema linear

Já estudamos que um sistema linear 2 × 2 pode admitir nenhuma, uma ou infinitas soluções e classificamos esses sistemas como impossível, possível e determinado e possível e indeterminado, respectivamente.

Também podemos classificar um sistema linear escalonado observando a última linha. Assim, se:

- $ax = b$, em que *a* e *b* são números reais diferentes de zero, temos um **sistema possível e determinado**. Veja o exemplo ao lado.

  Nesse caso, temos que $a = 2$ e $b = 6$, então o sistema é possível e determinado.

  $$\begin{cases} x+3y-z=4 \\ \quad 2y+3z=1 \\ \qquad 2z=6 \end{cases}$$

- $0x = 0$, ou $0 = 0$, ou $2 = 2$, ou seja, uma igualdade sem incógnita ou, de maneira equivalente, os coeficientes $a = 0$ e $b = 0$, temos um **sistema possível e indeterminado**. Veja o exemplo ao lado.

  Nesse caso, temos que $a = 0$ e $b = 0$, então o sistema é possível e indeterminado.

  $$\begin{cases} x-4y-2z=4 \\ \quad -2y+5z=1 \\ \qquad 0z=0 \end{cases}$$

- $0x = b$, ou $0 = 2$, ou $5 = 2$, ou seja, uma desigualdade sem incógnita ou, de maneira equivalente, os coeficientes $a = 0$ e $b \neq 0$, temos um **sistema impossível**. Veja o exemplo ao lado.

  Nesse caso, temos que $a = 0$ e $b = 3$, então o sistema é impossível.

  $$\begin{cases} x+4y-2z=4 \\ \quad -3y+z=1 \\ \qquad 0z=3 \end{cases}$$

Escrevendo os sistemas acima utilizando a matriz completa, também podemos classificar um sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Os dois últimos elementos da última linha são diferentes de 0, então o sistema é SPD.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da última linha são iguais a 0, então o sistema é SPI.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Somente o último elemento da última linha é diferente de 0, então o sistema é SI.

Discussão de um sistema linear

Discutir um sistema, em função de um ou mais parâmetros, significa dizer para que valores desses parâmetros ele é possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Essa discussão pode ser feita por meio do escalonamento do sistema linear ou da matriz completa associada ao sistema.

$$A = \begin{cases} x + ay + z = 60 \\ \quad y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y - 2az = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{neste exemplo, temos como parâmetro a letra } a.$$

Sempre que uma letra substitui o coeficiente numérico em um sistema de equações lineares, é possível **discutir o sistema**, ou seja, classificá-lo em SPD, SPI ou SI de acordo com o valor numérico, ou intervalo, da letra em questão, o **parâmetro**.

Essa discussão sobre o parâmetro é feita por meio de um escalonamento de um sistema linear ou da matriz completa associada ao sistema.

Exercícios resolvidos

10 Discuta, em função de *m*, o sistema: $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Resolução

Utilizando a matriz completa e escalonando, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & m & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{das linhas}]{\text{invertendo a posição}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & m & 2 \end{bmatrix} L_2 \xrightarrow{} -3L_1 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & m+3 & -1 \end{bmatrix}$$

Se $m + 3 \neq 0$, isto é, $m \neq -3$, o sistema é possível e determinado (SPD).

Se $m + 3 = 0$, isto é, $m = -3$, temos: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e o sistema é impossível (SI).

Não existe valor de *m* que torna o sistema possível e indeterminado (SPI).

11 (ITA-SP) O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \quad y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

a) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$.

Resolução

Escalonando o sistema por meio da matriz completa, temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ & 1 & 2 & b \\ 3 & -1 & -5c & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ & 1 & 2 & b \\ & 7 & 5c+9 & 3a \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - 7L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ & 1 & 2 & b \\ & & 5c-5 & 3a-7b \end{array}\right)$$

Da terceira equação, o sistema:

- admite solução única, ou seja, é possível e determinado se: $5c - 5 \neq 0 \Rightarrow 5c \neq 5 \Rightarrow c \neq 1$;
- admite infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado se: $5c - 5 = 0 \Rightarrow c = 1$ e $3a - 7b = 0 \Rightarrow a = \frac{7b}{3}$;
- não admite solução, ou seja, o sistema é impossível se: $5c - 5 = 0 \Rightarrow c = 1$ e $3a - 7b \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{7b}{3}$.

Portanto, o sistema é possível se $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$, ou seja, alternativa **b**.

12 Discuta, em função de *a*, o sistema: $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+3y=1 \\ x+ay=8 \end{cases}$

Resolução

Utilizando a matriz completa, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to -L_1 + L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & a-1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{4} L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to (1-a)\,L_2 + L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6-a \end{bmatrix}$$

Se $6 - a \neq 0$, ou seja, $a \neq 6$, o sistema é impossível (SI).

Se $6 - a = 0$, ou seja, $a = 6$, temos: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Não existe valor de *a* que torna o sistema possível e determinado (SPD).

Exercícios propostos

Escreva no caderno

43. Calcule o valor de *a* para que o sistema abaixo seja impossível:

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ ax-4y=0 \end{cases} \quad a=-6$$

44. Determine *a* e *b* para que o sistema abaixo seja possível e indeterminado: a= 6 e b = 8

$$\begin{cases} 6x+ay=12 \\ 4x+4y=b \end{cases}$$

45. Classifique e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ SPD, $S = \{(1, 2)\}$

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$ SI, $S = \varnothing$

c) $\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x+y=4 \end{cases}$ SPI, $S = \{(4-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

46. Discuta, por escalonamento, o sistema:

$$\begin{cases} 2x+my=3 \\ mx-8y=6 \end{cases} \quad \text{SPD, } \forall\, m \in \mathbb{R}$$

47. Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} mx+y=2 \\ x-y=m \end{cases}$ SPD se $m \neq -1$ e SI se $m = -1$

b) $\begin{cases} kx+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ SPD se $k \neq 1$ e SI se $k = 1$

48. Calcule *a* para que o sistema seja possível e determinado.

$$\begin{cases} ax-2y+2a=1 \\ -2x+ay-2a=1 \end{cases}$$

(Sugestão: transporte os termos que não possuem incógnitas para o 2º membro.) $\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 2 \text{ e } a \neq -2\}$

49. Determine o valor de *p* para que o sistema $\begin{cases} px + y - z = 4 \\ x + py + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ admita uma solução única. $\{p \in \mathbb{R} \mid p \neq -1\}$

50. Determine *k* para que o sistema indicado seja possível e determinado.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-2y=k \\ x+ky=5 \end{cases} \quad k = 1 \text{ ou } k = 15$$

51. Determine o valor de *k* para que o sistema seja impossível: $k \neq 5$

$$\begin{cases} 3z-4y=1 \\ 4x-2z=2 \\ 2y-3x=3-k \end{cases}$$

52. Determine os valores de *m* e *k*, de modo que seja possível e indeterminado o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-mz=-1 \\ 3x-y+z=4 \\ -2x+4y-2z=k \end{cases} \quad m = \frac{3}{4} \text{ e } k = -6$$

53. Obtenha *m* para que o sistema abaixo seja impossível:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=m \\ mx+y=2 \end{cases} \quad m \neq 1 \text{ e } m \neq -2$$

54. Discuta, em função de *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x+2y+mz=2 \\ x-y+z=1 \\ y+3z=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} m \neq 10 \to \text{SPD} \\ m = 10 \to \text{SI} \end{matrix}$$

Regra de Cramer

Os determinantes também podem ser utilizados para resolver e discutir um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas, ou seja, $m = n$. Esse método, divulgado pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704 - 1752) é chamado de **Regra de Cramer**.

Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} aex + bey = ce \\ -dbx + eby = -fb \end{cases} \Rightarrow (ae - db)x = ce - fb \Rightarrow x = \frac{ce - fb}{ae - db}, \text{ com } ae - db \neq 0.$$

Substituindo x por $\frac{ce - fb}{ae - db}$ em uma das equações do sistema, obtemos: $y = \frac{af - dc}{ae - db}$.

Vamos considerar os seguintes determinantes obtidos do sistema:

- determinante D da matriz dos coeficientes (matriz incompleta):

  $$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ae - db;$$

- determinante D_x, que obtemos de D substituindo a 1ª coluna, dos coeficientes de x, pela coluna dos termos independentes: $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$;

- determinante D_y, que obtemos de D substituindo a 2ª coluna, dos coeficientes de y, pela coluna dos termos independentes: $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - dc$.

Comparando as expressões dos determinantes com as expressões de x e y e $D \neq 0$, a solução do sistema é:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D}.$$

Assim, sendo S um sistema linear $n \times n$ e D, o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de S:

O sistema S será possível e determinado se, e somente se, $D \neq 0$ e a solução será:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D}.$$

Observação:

Se $D = 0$, não se aplica a regra de Cramer, e nesse caso, para saber se o sistema é indeterminado ou impossível, deve-se utilizar outro método, por exemplo, o escalonamento.

Exercício resolvido

13 Uma certa escola de Ensino Médio tem 107 alunos nos 1º e 2º anos, 74 nos 2º e 3º anos e 91 nos 1º e 3º anos. Qual o total de alunos dessa escola?

Resolução

Fazendo

x = número de alunos no 1º ano
y = número de alunos no 2º ano
z = número de alunos no 3º ano

Temos o sistema:

$$\begin{cases} x+y+0z=107 \\ 0x+y+z=74 \\ x+0y+z=91 \end{cases}$$

O determinante da matriz completa é igual a:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

O sistema é possível e determinado, pois $D \neq 0$. Assim, temos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 107 & 1 & 0 \\ 74 & 1 & 1 \\ 91 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 124$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 107 & 0 \\ 0 & 74 & 1 \\ 1 & 91 & 1 \end{vmatrix} = 90$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 107 \\ 0 & 1 & 74 \\ 1 & 0 & 91 \end{vmatrix} = 58$$

Logo, $x = \frac{Dx}{D} = \frac{124}{2} = 57$; $y = \frac{Dy}{D} = \frac{90}{2} = 45$; $z = \frac{Dz}{D} = \frac{58}{2} = 29$

O total de alunos é $x + y + z = 57 + 45 + 29 = 136$.

Portanto, a escola tem 136 alunos.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

55. Resolva os sistemas a seguir, utilizando a regra de Cramer.

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$ {(1, 2)}

b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y+3z=9 \\ 3x+3y-2z=3 \end{cases}$ {(1, 2, 3)}

56. Verifique se o sistema a seguir é possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ x+y-z=0 \\ 2x+y-2z=-1 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado.

57. Usando a regra de Cramer, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

58. (Unicamp-SP) Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (*y*) do peso em função de sua distância horizontal (*x*), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela abaixo. Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

a) Determine os valores de *a*, *b* e *c*. $a = -0{,}1$, $b = 1$ e $c = 1{,}1$

b) Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso. 11 m

59. (Unesp-SP) Dado o sistema de equações lineares *S*:

$$\begin{cases} x+2y+cz=1 \\ y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-1 \end{cases}$$

Onde $c \in \mathbb{R}$ determine:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $D_A = 6 - 3c$

a) A matriz *A* dos coeficientes de *S* e o determinante de *A*;

b) O coeficiente *c*, para que o sistema admita uma única solução. $c \neq 2$

Sistema linear homogêneo

Se o termo independente de todas as equações de um sistema linear é nulo, ou seja, se todas as equações são homogêneas, dizemos que o sistema é **homogêneo**. Veja os exemplos:

a) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+5y-6z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 4x+y+5z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

A ênupla (0, 0, ..., 0) sempre é solução de um sistema linear homogêneo. Ela é chamada **solução trivial** ou **solução nula**.

Caso o sistema homogêneo admita outra solução, ela será chamada **solução não trivial**, ou **solução não nula**. Por exemplo, o sistema do item *a* admite somente a solução trivial (0, 0), e o sistema do item **c** admite a solução trivial (0, 0, 0) e a solução não trivial (−1, −1, 1).

Como o sistema homogêneo possui ao menos a solução trivial, ele é sempre possível. Então, ele pode ser classificado da seguinte forma:

- **Possível e determinado**: possui somente a solução trivial.
- **Possível e indeterminado**: possui outras soluções, além da trivial.

Os sistemas lineares homogêneos $m \times n$, com $n \geqslant 2$, podem ser classificados também com base no determinante da matriz incompleta (dos coeficientes) como vimos na regra de Cramer que, se o determinante for nulo, o sistema será possível e indeterminado, ou seja:

$D_A = 0 \Rightarrow$ 0 sistema é SPI;

$D_A \neq 0 \Rightarrow$ 0 sistema é SPD e a solução é a trivial.

Exercícios resolvidos

14 Calcule o valor de *m* para que o sistema $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-y+mz=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ tenha somente a solução trivial.

Resolução

Para que o sistema tenha somente a solução trivial, isto é, seja determinado, é necessário que D_A (matriz formada somente pelos coeficientes do sistema) seja diferente de zero, $D_A \neq 0$. Então:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D_A = 2m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

Logo, $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq 1\}$ é o conjunto dos valores de *m* para que o sistema tenha somente a solução trivial.

15 Resolva o sistema:

$$\begin{cases} a+3b-2c+d=0 \\ 2a+2b-c-d=0 \\ a-b+c+2d=0 \\ 3a+5b+c+d=0 \end{cases}$$

Resolução

Como estudamos, para escalonar um sistema linear, ou a matriz completa de um sistema linear, devemos seguir alguns procedimentos. O primeiro passo é verificar se o coeficiente da primeira variável da primeira equação é igual a 1; se não for, buscar outra equação no sistema, se existir, em que isso ocorra e trocar as equações de lugar. Em nosso exercício, não será necessária a troca pois $a_{11} = 1$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma vez realizado esse passo, devemos multiplicar a primeira equação pelo número oposto do coeficiente da primeira incógnita $(-a_{21}, -a_{31} \text{ e } -a_{41})$ e, o resultado, devemos somar com a equação desse mesmo coeficiente.

A primeira coluna da matriz completa representa os coeficientes das primeiras incógnitas. Os elementos $a_{21} = 2$, $a_{31} = 1$ e $a_{41} = 3$ representam os primeiros coeficientes da 2ª, 3ª e 4ª equações, respectivamente. Assim, para anular os coeficientes da incógnita *a*, devemos multiplicar a primeira equação pelo oposto de cada um desses coeficientes e adicionar o resultado às suas respectivas 1ª, 2ª e 3ª equações.

Por exemplo, 1ª equação (L_1) deve ser multiplicada por (-2) e adicionada à 2ª equação (L_2), ou seja, a segunda linha da matriz equivalente será o resultado de $(-2) \cdot L_1 + L_2$. Analogamente, devemos repetir o processo em cada uma das linhas.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{(-2)L_1 + L_2} \\ \xrightarrow{(-1)L_1 + L_3} \\ \xrightarrow{(-3)L_1 + L_4} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, para anular os coeficientes a_{32} e a_{42}, devemos utilizar a 2ª equação para continuar o escalonamento.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \xrightarrow{(-1)L_2 + L_3} \\ \xrightarrow{(-1)L_1 + L_4} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que para escalonar a matriz completa devemos inverter de lugar a terceira e a quarta linhas.
Da matriz escalonada, temos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} a+3b-2c+d=0\\ -4b+3c-3d=0\\ 4c+d=0\\ 4d=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Então:

$$\begin{aligned} &4d = 0 \Rightarrow d = 0\\ &4c + d = 0 \Rightarrow 4c + 0 = 0 \Rightarrow c = 0\\ &-4b + 3c - 3d = 0 \Rightarrow -4b + 0 - 0 = 0 \Rightarrow b = 0\\ &a + 3b - 2c + d = 0 \Rightarrow a + 0 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o sistema é possível e determinado, pois possui somente a solução trivial $S = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

60. Classifique, quanto ao número de soluções, os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0\\ -6x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$ SPI

b) $\begin{cases} x+y+2z=0\\ x-y-3z=0\\ x+4z=0 \end{cases}$ SPD

61. Calcule o valor de *a* para que o sistema tenha soluções diferentes da trivial. a = 0 ou a = 1

$$\begin{cases} ax+y=0\\ ax+ay=0 \end{cases}$$

62. Determine *m* para que o sistema abaixo tenha soluções próprias. $m = \frac{3}{13}$

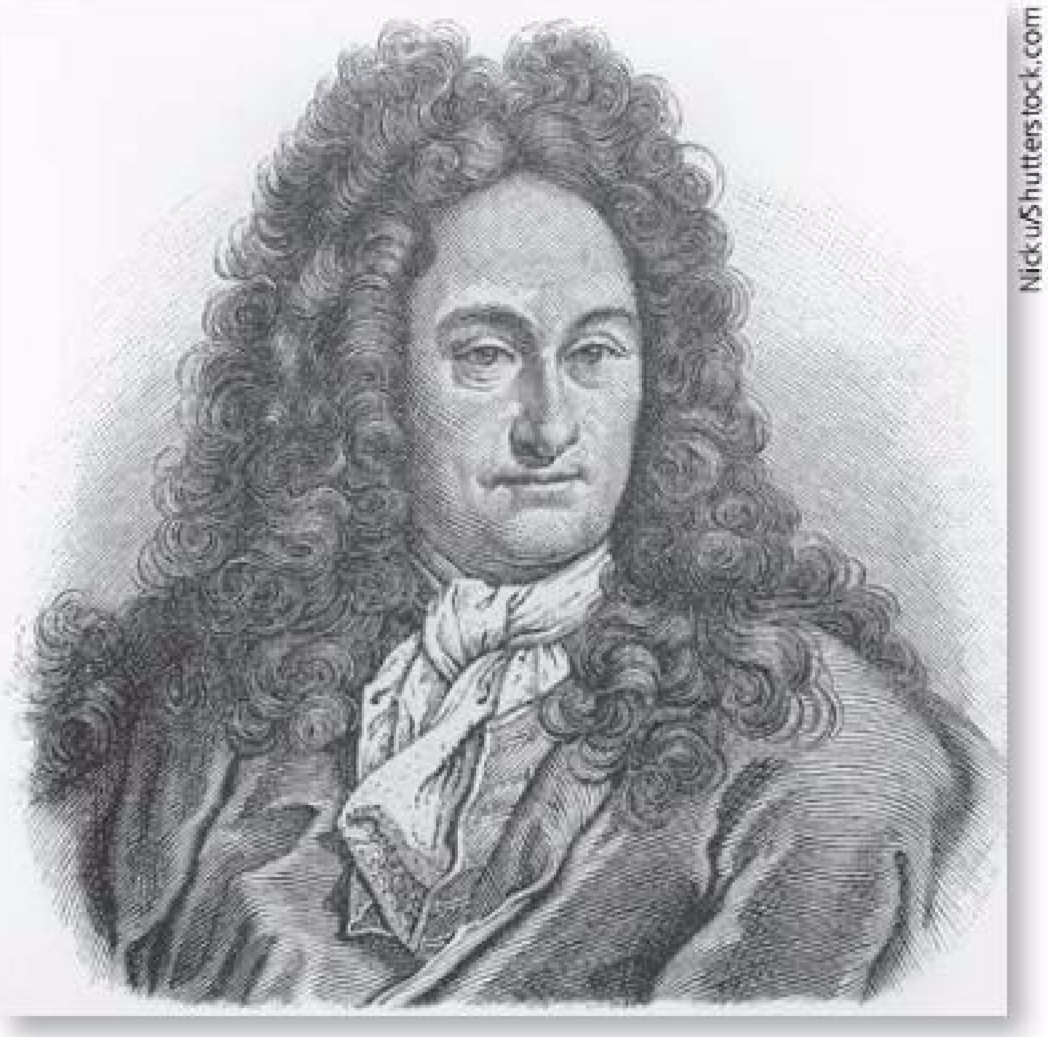
$$\begin{cases} 2y-y+3z=0\\ x+4y-5z=0\\ 3x+mz+2z=0 \end{cases}$$

63. Calcule o valor de *a* para que o sistema seja impossível.

$$\begin{cases} ax+y+2=0\\ 2x-y+z-a=0\\ 4x+y+az+5=0 \end{cases}$$ a = −4 ou a = 1

História da Matemática

A notação de Leibniz


Nicku/Shutterstock.com

Leibniz também desenvolveu trabalhos no Direito, Religião, Política, História, Literatura, Lógica, Metafísica e Filosofia.

O estudo de um sistema linear de equações como é conhecido hoje teve início em 1678, com Gottfried W. Leibniz (1646-1716). KLINE (1927:p.606) conta que, em 1693, Leibniz usou um conjunto sistemático de índices como coeficiente de um sistema de três equações lineares em duas incógnitas, *x* e *y*. Ele reescreveu as equações eliminando as incógnitas e obteve uma regra para obter o que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares.

[...] Leibniz explicou que, para resolver o problema da eliminação das incógnitas do sistema

$$\begin{cases} a + bx + cy = 0 \\ d + ex + fy = 0 \\ g + hx + ky = 0 \end{cases}$$

ele as reescreveu na forma

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

sendo o primeiro número o índice da linha da posição do coeficiente no sistema e o segundo, da coluna. Como forma de avaliar se o sistema teria solução, estabeleceu como condição necessária a igualdade

$$10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30$$

Este marco é considerado por MUIR (1890) o primeiro do desenvolvimento da teoria dos determinantes.

[...] uma das principais contribuições de Leibniz foi justamente a notação, que combinava dois números, tal como no sistema cartesiano, dando a posição, nas equações, do número ao qual se referia. [...]

Uma aplicação mais precisa e abrangente do que seria conhecido como determinante seria proposta quase 60 anos depois pelo matemático Gabriel Cramer. O trabalho, que foi bastante divulgado à época, representa um avanço no estudo de Álgebra linear e levaria ao que conhecemos hoje como Regra de Cramer.

Bibliografia: KLINE, Morris. **Mathematical thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972. MUIR, Thomas. **The Theory of Determinants in the Historical Order of Development**. London: McMillan and Co. Ltd., 1890. Versão digitalizada obtida na Universidade de Michigan (http://name.umdl.umich.edu/acm9341.0001.001).

Fonte: SANTOS, Robinson Nelson dos. **Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes**. Dissertação (Licenciatura em Matemática) – USP, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/imath/files/1/43.pdf>, Acesso em: 29 jan. 2016.

Atividades

Escreva no caderno

1. Descreva com suas palavras a regra utilizada por Leibniz para obter o determinante de um conjunto de equações lineares. Leibniz utilizou um conjunto de índices como coeficientes de um sistema de três equações lineares em duas incógnitas, *x* e *y*, reescreveu as equações eliminando essas incógnitas e obteve uma regra que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares.

2. Explique o que representam os números incluídos no sistema linear de equações $\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$, conforme presente no texto. Correspondem aos índices da linha (iniciando em 1) da posição do coeficiente no sistema e o segundo, da coluna (iniciando em 0).

3. Como escrever, utilizando a notação atual de determinantes, a condição necessária ($10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30$), proposta por Leibniz, para avaliar se um sistema de equações possui solução? det A = 0.

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (UFRJ) Uma confecção vai fabricar 3 tipos de roupa utilizando materiais diferentes. Considere a matriz $A = (a_{ij})$, em que a_{ij} representa quantas unidades do material *j* serão empregadas para fabricar uma roupa do tipo *i*.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas na confecção de uma roupa do tipo 2? 3

b) Calcule o total de unidades do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3. 33

2. (Efei-MG) Encontre a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $A = \begin{bmatrix} i^2 & 2i \\ -j & 2j \end{bmatrix}$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Determine a transposta da matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = \text{sen}\left(i\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(j\dfrac{\pi}{6}\right)$. $A^t = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

4. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, com $a_{ij} = 2i - j^2$, e $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, com $b_{ij} = a_{ij} + 1$, encontre a matriz *X* de modo que: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $X - A + B = 0$

b) $X - A^t + B^t = 0$

c) $-A - X = -B$

5. (Udesc-SC) Sejam *X* e *Y* matrizes de ordem dois por dois tais que $X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $X - Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$; logo a soma dos elementos da diagonal principal da matriz *X* é:

a) 14 b) 7 c) 9 d) 16 [✓ e) 8]

6. (UFSC) Sejam $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C? 94

7. (Udesc-SC) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$ duas matrizes e *I* a matriz identidade de ordem dois. Encontre a matriz *X* tal que $AX + I = B$. $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

8. (Vunesp-SP) Considere as matrizes 2 × 2 do tipo $A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\ \text{sen}\, x & \cos x \end{bmatrix}$. a) $A(x) \cdot A(x) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}\, 2x \\ \text{sen}\, 2x & 1 \end{bmatrix}$ b) $x = 0$ e $x = 2\pi$.

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$.

b) Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

9. (FGV-SP) *A*, *B* e *C* são matrizes de mesma ordem. Sabendo-se que o sistema de equações a seguir (cuja incógnita é a matriz *X*) tem solução única, obtenha o valor da matriz *X*: a) $X = A^{-1} \cdot (C - B)$ b) $X = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$

a) $AX + B = C$ b) $XA - X + B = C$

10. (UFC-CE) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine os seguintes produtos matriciais: a) $P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $P \cdot A^6 \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 4\,096 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) $P \cdot A \cdot P^{-1}$ b) $P \cdot A^6 \cdot P^{-1}$

11. (Unimep-SP) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} e^x & \log 1 \\ \log 10 & e^{-x} \end{bmatrix}$ é igual a:

a) −1 b) $2 \cdot e^x$ c) log 1 [✓ d) 1] e) $e^x \cdot \log 10$

12. (UFRN) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$ $S = \{5\}$

13. (Fatec-SP) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resolver a equação $\det(A - x \cdot B) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$. $S = \{0, 5\}$

14. (EEM-SP) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & \cos x & \text{sen}\, x \\ 1 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0$ no intervalo $0 \leq x < 2\pi$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

15. (Ufop-MG) Determinar o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13 & 3^x & -3^{-x} \\ 27 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 10$. $S = \{0, 2\}$

16. (Efei-MG) Sendo $A \cdot B$ o produto das matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, calcule o valor (ou valores) de $x \in \mathbb{R}$ para que o determinante de $A \cdot B$ seja nulo. −2, 0 ou 2

17. (Vunesp-SP) Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de ordem 3. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e *B* é tal que $B^{-1} = 2A$, o determinante de *B* será:

a) 24 b) 6 c) 3 d) $\frac{1}{6}$ [✓ e) $\frac{1}{24}$]

18. (UFPA) O valor de um determinante é 12. Se dividirmos a 1ª linha por 6 e multiplicarmos a 3ª coluna por 4, o novo determinante valerá:

[✓ a) 8] b) 18 c) 24 d) 36 e) 48

19. (Unifei-SP) Sendo $a > 0$ e $a \neq 0$, encontre o valor de *x* que verifica a equação: $\begin{vmatrix} a^x & a^x & 1 \\ a^x & a^{-x} & 0 \\ 0 & a^{-x} & 1 \end{vmatrix} = 2 - a^8$. $x = 4$

20. Determine duas soluções de cada uma das equações:

a) $-x + \frac{1}{2}y = 0$ Exemplos de resposta: (0, 0); (1, 2)

b) $x + y - 2z = 0$ (1, −1, 0); (2, 0, 1)

21. Calcule *a*, de modo que $(-1, a + 1, 2)$ não seja solução da equação $2x + 4y + z = 0$. $a \neq -1$

22. (Fuvest-SP) Determine *a* e *b*, de modo que sejam equivalentes os sistemas: $a = 0$ e $b = 1$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

23. (Faap-SP) Ache dois números reais cuja soma é 9 e cuja diferença é 29. $x = 19$ e $y = -10$

24. (Unitau-SP) Resolva o sistema de equações algébricas: $S = \{(-1, 1)\}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

25. (FESP) Uma pessoa alimenta seu cão combinando o conteúdo de duas marcas de rações preparadas pelos fabricantes *X* e *Y*. A tabela abaixo discrimina a quantidade de unidades de vitaminas e de sais minerais em cada saco de ração e a quantidade mínima de unidades que o cão deve consumir:

	RAÇÃO *X*	RAÇÃO *Y*	MÍNIMO
Vitaminas	40	20	200
Sais minerais	20	40	200

Se o saco da ração *X* custa R$ 10,00 e o da *Y* R$ 15,00, determine o inteiro mais próximo do total de sacos a serem comprados de modo a minimizar os custos e satisfazer as quantidades mínimas requeridas. 7

26. (UFRGS-RS) O sistema de equações

$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$ possui:

a) nenhuma solução.
[✓ b) uma solução.]
c) duas soluções.
d) três soluções.
e) infinitas soluções.

27. (Mack-SP) Para que a equação matricial

$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, tenha pelo menos uma solução $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, um possível valor de *k* é:

a) 2 c) 5 [✓ e) 8]
b) 4 d) 6

28. (Ufop-MG) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} mx + 3y - z = 2 \\ x + my + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Os valores de *m* para os quais a solução seja única são:

a) $m = -2$ ou $m = 5$ [✓ c) $m \neq -2$ e $m \neq 5$]
b) $m = 2$ ou $m = -5$ d) $m \neq 2$ e $m \neq -5$

29. (UFABC-SP) Duas bicicletas desenvolvem movimentos retilíneos e uniformes sobre a mesma trajetória, com suas grandezas em unidades do Sistema Internacional. Suas funções horárias estão representadas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Nessas condições, as duas bicicletas se encontrarão no instante:

a) 1,0 s b) 1,4 s [✓ c) 2,0 s] d) 3,5 s e) 5,0 s

30. (UA-AM) Em relação ao sistema $x + y + z = 15$ e $y = 12$, pode-se afirmar que:

a) é um sistema impossível.
b) é um sistema possível e determinado.
c) (7, 2, 6) é solução do sistema.
d) se (α, β, γ) é uma solução do sistema. Então α, β, γ não formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.
[✓ e) (1, 12, 2) é uma solução do sistema.]

31. Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -5y+5z=2 \end{cases}$$ SPI; $S=\left\{\left(\lambda+\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}+\lambda, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

32. Resolva a equação matricial abaixo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ $S=\left\{\left(-\frac{\lambda}{2}, 4+\lambda, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

33. (Faap-SP) Determine os valores reais de *x*, *y* e *z* que satisfazem o sistema. $S=\{(2, 1, -3)\}$

$$\begin{cases} x-3y+z=-4 \\ 2x+y-2z=11 \\ -x+2y-5z=15 \end{cases}$$

34. (UCSal-BA) Xisto, Yuri e Zoltan tinham, juntos, 97 figurinhas. Xisto deu a metade de suas figurinhas a Yuri e este ficou com 13 figurinhas a mais que Zoltan. Em seguida, Zoltan deu a metade de suas figurinhas a Xisto, que ficou então com 9 figurinhas a menos que Yuri. O número de figurinhas que Yuri tinha inicialmente era:

a) 18 X b) 25 c) 32 d) 35 e) 40

35. (Mack-SP) A solução única do sistema

$$\begin{cases} 3x+2y=-19 \\ -x+3y=-12 \\ 2x-y=m \end{cases}$$ ocorre para *m* igual a:

X a) −1 b) 1 c) 0 d) 2 e) −2

36. (Vunesp-SP) Em relação ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+my=10 \end{cases}$$

a) resolva o sistema para $m = 4$; $S=\left\{\left(\frac{13}{4}, \frac{7}{8}\right)\right\}$

b) encontre o conjunto de valores de *m*, em relação aos reais, para que o sistema seja possível e determinado. $m \neq -\frac{4}{3}$

37. (EsPCEx-SP) Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x+y=5 \\ ax+2y=b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é:

a) −1 b) 4 c) 9 X d) 14 e) 19

38. (UEPG-PR) Considerando indeterminado o sistema

$$\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ 4x+3y+z=m \\ x+py+z=3 \end{cases}$$, assinale o que for correto.

X 01) $m > 0$

X 02) $p < 0$

04) $m - p = 0$

08) $m \cdot p = 6$

39. (Fuvest-SP) Para quais valores de *a* o sistema linear abaixo admite solução? $a=-2$ ou $a=1$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=a \\ -y-2z=a^2 \end{cases}$$

40. (UERJ) Para enviar mensagens sigilosas substituindo letras por números, foi utilizado um sistema no qual cada letra do alfabeto está associada a um único número *n*, formando a sequência de 26 números ilustrada na tabela:

Letra	A	B	C	D	E	...	W	X	Y	Z
Número *n*	1	2	3	4	5	...	23	24	25	26

Para utilizar o sistema, cada número *n*, correspondente a uma determinada letra, é transformado em um número f(n), de acordo com a seguinte função:

$$f(n)=\begin{cases} 2n+3, \text{ se } 1 \leqslant n \leqslant 10 \\ 50-n, \text{ se } 11 \leqslant n \leqslant 26 \end{cases} \quad \text{na qual } n \in \mathbb{N}$$

As letras do nome ANA, por exemplo, são associadas aos números [1 14 1]. Ao se utilizar o sistema, obtém-se a nova matriz [f(1) f(14) f(1)], gerando a matriz código [5 36 5].

Considere a destinatária de uma mensagem cujo nome corresponde à seguinte matriz código: [7 13 5 30 32 21 24]. Indique esse nome. Beatriz

41. Considere a matriz de números reais:

$$A=\begin{pmatrix} x^2-9x+25 & 9 \\ x^2-3x-4 & \log_y(5y-8) \end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule *x* e *y* para que A = B. $x = 4$ e $y = 2$

42. (UECE) Se *x* é um ângulo tal que $\cos x = \frac{1}{4}$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} \text{sen}2x & 2\cos^2 x \\ -\cos x & \text{sen}x \end{vmatrix}$ é:

a) 1. b) 0. X c) $\frac{1}{2}$. d) $-\frac{1}{2}$.

43. (UFV-MG) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} \log x & \log 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, onde *x* é um número real positivo. Se det A = 1, então o valor de *x* é:

X a) $2\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $5\sqrt{2}$

e) $4\sqrt{5}$

44. (UFRJ) Os números reais *a*, *b*, *c* e *d* formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Calcule o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{pmatrix}$. 0

45. (ITA-SP) Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases},$$

com *a*, *b*, *c*, *d*, *p* e *q* reais, $abcd \neq 0$, $a + b = m$ e $d = nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p + q$ é:

a) m
x d) mn
b) $\dfrac{m}{n}$
e) m + n
c) $m^2 - n^2$

46. (Unicamp -SP) Considere a matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde *a*, *b* e *c* são números reais.

a) Encontre os valores de *a*, *b* e *c* de modo que $A^T = -A$. a = 0, b = 2 e c = −1

b) Dados a = 1 e b = −1, para que valores de *c* e *d* o sistema linear $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ tem infinitas soluções? c = 0 e d = −4

47. (UEL-PR) Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de 1 m² de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

Número de samambaias por quadrante

$$A_{7\times1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Número de quadrantes

$$B_{7\times1}=\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} da matriz *A* corresponde ao elemento b_{ij} da matriz *B*, por exemplo, 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes *A* e *B*, que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

x a) $A^t \times B$
c) $A \times B$
e) $A + B$
b) $B^t \times A^t$
d) $A^t + B^t$

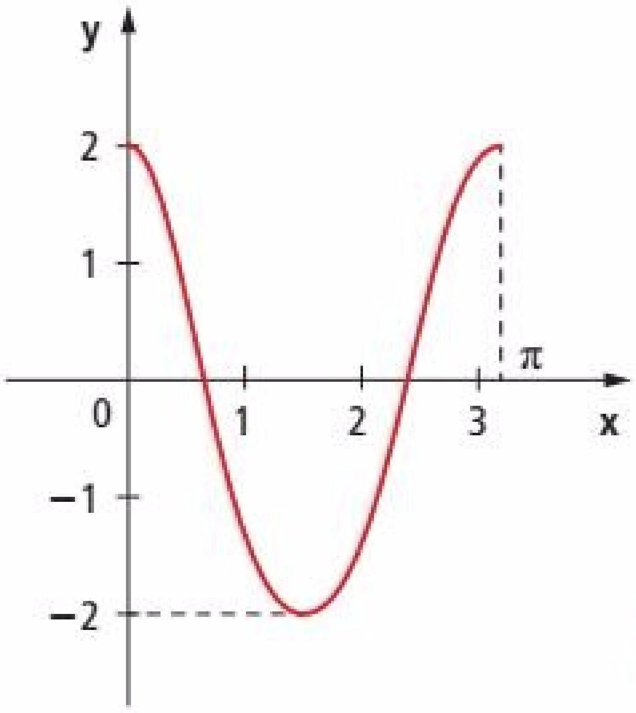
48. (Efoa-MG) Seja a matriz $A=\begin{pmatrix} 3^x & 9^y \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x & \left(\frac{1}{3}\right)^y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Se det A = 0, então é correto afirmar que $\dfrac{y}{x}$ é igual a:

x a) 1
c) 3
e) −2
b) 2
d) −1

49. (UERJ) Considere a função real *f*, de variável real *x*, definida pelo seguinte determinante:

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2\cos(x) & 2 \\ 1 & 2\cos(x) \end{vmatrix} \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Observe o gráfico da função *f*.



Editoria de arte

$S=\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

Determine os valores de *x* para os quais f(x) = 1.

50. (FESP) Determine os valores reais de *m* para que o sistema abaixo tenha solução diferente da solução x = y = z = 0. m = 2 ou m = −1

$$\begin{cases} x + my + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y + mz = 0 \end{cases}$$

51. (UnB-DF) Para qual valor inteiro de λ o sistema seguinte admite solução própria (não nula)? λ = 2

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda z = 0 \\ (\lambda + 1)x + y - z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

52. (AFA-SP) Irão participar de EPEMM, Encontro Pedagógico do Ensino Militar, um Congresso de professores das Escolas Militares, 87 professores das disciplinas de Matemática, Física e Química. Sabe-se que cada professor leciona apenas uma dessas três disciplinas e que o número de professores de Física é o triplo do número de professores de Química.

Pode-se afirmar que:

a) se o número de professores de Química for 16, os professores de Matemática serão a metade dos de Física.

b) se o número possível de professores de Química é igual a 3.

x c) o número de professores de Química será no máximo 21.

d) o número de professores de Química será maior do que o de Matemática, se o de Química for em quantidade maior ou igual a 17.

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade você conheceu um pouco mais as informações nutricionais contidas nos rótulos de embalagens de produtos alimentícios. Essas informações, auxiliam na avaliação dos alimentos mais adequados a uma dieta saudável e balanceada.

Observe a tabela nutricional com as quantidades de carboidratos, proteínas e gorduras totais, obtidas a partir de 100 gramas de três produtos diferentes, *A*, *B* e *C*, e os valores diários de referência dos nutrientes (em grama), que se deve consumir diariamente, com base em uma dieta de 2000 kcal ou 8400 kJ. Por exemplo, em uma dieta de 2000 kcal diárias, deve-se consumir 300 g de carboidratos de acordo com a Anvisa.

Quantidades (em grama) fornecidas por 100 g de cada produto				
Nutriente	**A**	**B**	**C**	**Valores diários de referência**
Carboidrato	55	76	84	300
Proteína	7	12,4	3,6	75
Gorduras totais	8	2,6	0	55

Fonte: Dados obtidos em: BRASIL. Ministério da Saúde. Rotulagem nutricional obrigatória. Anvisa, 2005. Disponível em: <http://portal.anvisa.gov.br/wps/wcm/connect/5f53be80474583c58ee8de3fbc4c6735/manual_industria.pdf?MOD=AJPERES>. Acesso em: 29 abr. 2016.

1. Siga os passos a seguir para determinar, se possível, uma combinação entre os produtos *A*, *B* e *C*, a fim de obter os valores diários de referência de proteínas, carboidratos e gorduras totais, fornecidos pela Anvisa, em um dia.

a) Escreva um sistema linear de equações que represente a situação proposta.

b) Escreva o sistema obtido no item **a**, na forma de uma matriz completa

Veja o Manual do Professor.

c) Sabendo que o escalonamento da matriz obtida no item **b** é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5{,}59 \\ 0 & 1 & 0 & 3{,}96 \\ 0 & 0 & 1 & -3{,}67 \end{bmatrix}$. O que podemos afirmar a respeito da discussão das soluções desse sistema? Justifique.

Trata-se de um sistema possível e determinado, pois os dois últimos elementos da última linha são diferentes de 0.

2. Nesta atividade você colherá informações sobre sua alimentação diária. Siga os passos abaixo:

- Faça um levantamento dos alimentos ingeridos por você em um dia comum. Registre essas informações durante uma semana.
- Após esse levantamento, analise as informações e defina qual é a composição da sua alimentação diária. O que podemos definir como um dia normal de sua alimentação, sua dieta diária.
- Registre a composição e as informações nutricionais de cada alimento da sua dieta diária.
- Analise e compare com os valores de referência que uma pessoa deve ingerir.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos consigam perceber quais alimentos prejudicam mais uma dieta equilibrada. E discutam em sala se a pesquisa pode ajudá-los a alterar algo em seus hábitos alimentares.

Unidade 3

Geometria plana e espacial

Joka Madruga/Futura Press

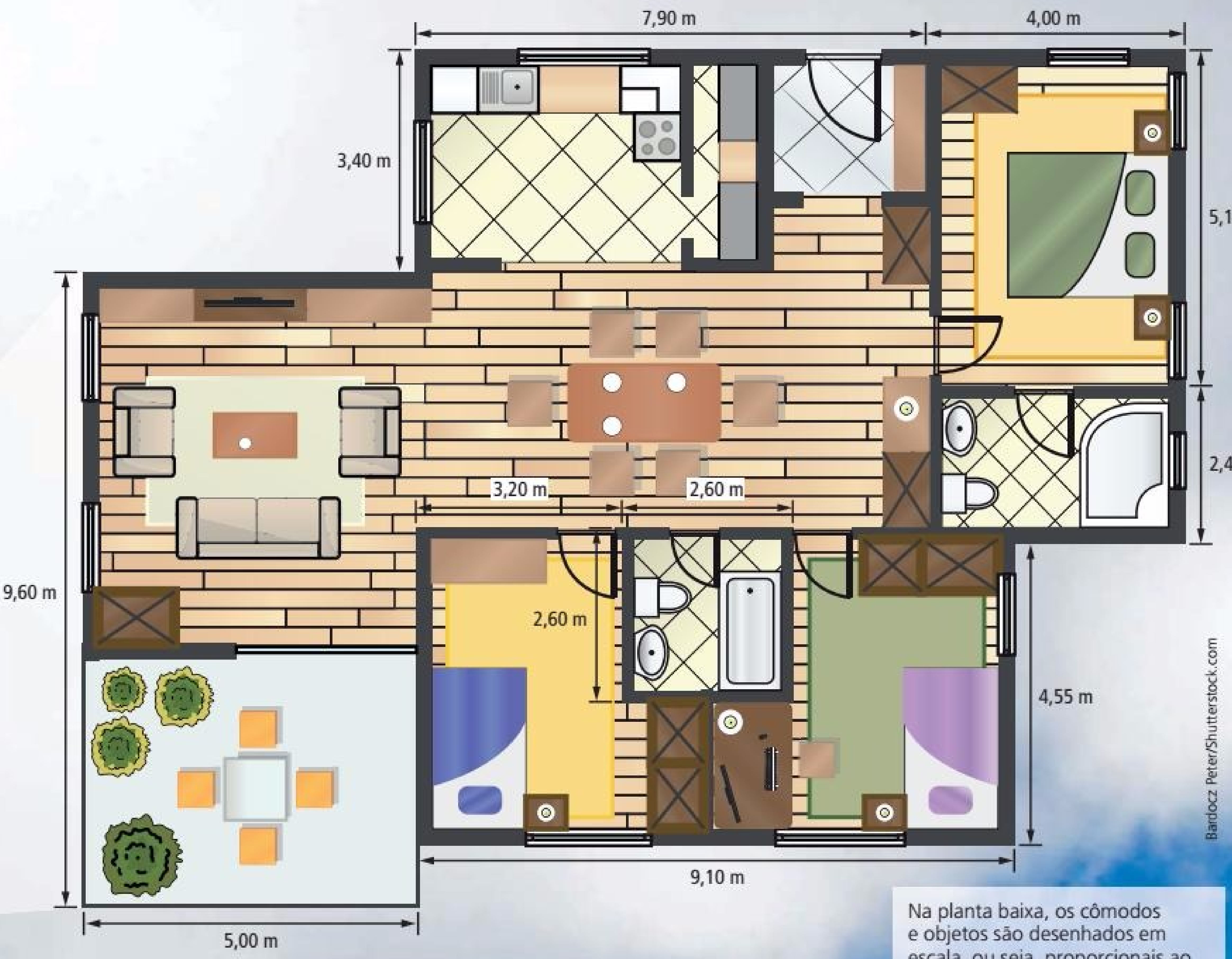
O ramo da construção civil envolve diversos profissionais, entre eles os das áreas da engenharia civil e da arquitetura, que participam da elaboração do projeto e acompanham a execução das obras de edifícios, pontes, viadutos, estradas, entre outros.

Um dos documentos necessários durante o processo de construção de um edifício é a planta baixa. Ela é uma representação esquemática feita a partir de um corte horizontal a 1,5 metro do chão e paralelo a ele. Nela é possível observar os ambientes em vista superior e mostrar as dimensões da edificação em escala. A planta baixa também apresenta componentes como portas, janelas, pias, chuveiros etc.

Geralmente, para a divulgação e a venda de imóveis, essas plantas apresentam móveis com o intuito de mostrar sua integração com o ambiente e propiciar uma melhor ideia do tamanho real da construção que a planta representa.

Com o auxílio da planta baixa, são elaborados os projetos estruturais e complementares à construção, como: hidráulicos, elétricos, sanitários, telefônicos, de segurança, entre outros.

Com o desenvolvimento urbano das cidades, muitos edifícios foram construídos, aquecendo o setor da construção civil.



Bardocz Peter/Shutterstock.com

Na planta baixa, os cômodos e objetos são desenhados em escala, ou seja, proporcionais ao tamanho real do imóvel.

1. Você já conhecia esse tipo de representação de edificações e sua denominação? Converse com os colegas a respeito da importância desse tipo de representação. Veja o Manual do Professor.

2. Pesquise em livros e na internet o que é uma maquete. Em seguida, explique a diferença entre planta baixa e maquete.

3. Abaixo estão indicadas algumas etapas da construção de um imóvel. Reúna-se com mais dois colegas, pesquise, converse e ordene estas etapas em ordem cronológica de realização. Reflita sobre as etapas, de forma que a sequência possa ser executada.

▨ Nivelamento do terreno 2
▨ Projeto e documentação 1
▨ Alicerce e alvenaria 4
▨ Cobertura/Telhado 5
▨ Fundação 3
▨ Instalações de esquadrias, portas, pias e cerâmica 7
▨ Pintura 8
▨ Instalações elétricas 6

Escreva no caderno

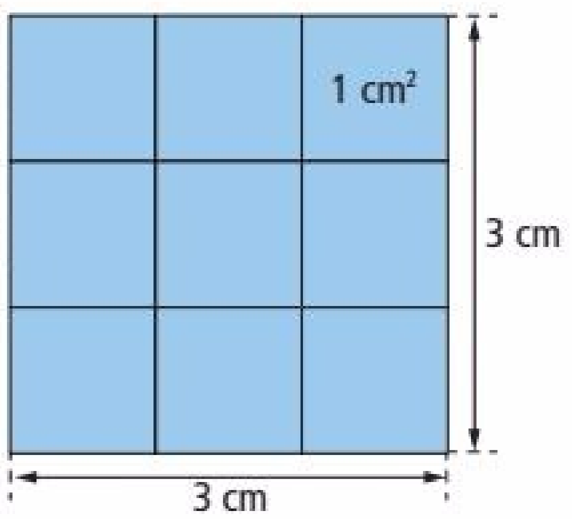
CAPÍTULO 6

Áreas

Neste capítulo, vamos retomar e aprofundar o cálculo de áreas de figuras planas que você provavelmente já estudou no Ensino Fundamental. Também abordaremos polígonos regulares e razão entre áreas de figuras planas semelhantes.

A ideia de área

Ilustrações: Editoria de arte



Para medir a extensão de uma superfície plana, precisamos compará-la com uma unidade de medida de área e estabelecer quantas vezes esta última está contida na primeira. O número real *S* positivo, obtido por essa comparação, é chamado de área da superfície.

Vamos considerar como unidade de medida padrão um quadrado cujo lado mede 1 u.c. (unidade de comprimento), conhecido como quadrado unitário. Assim, a área desse quadrado unitário é de 1 (u.c.)² ou 1 u.a. (unidade de área).

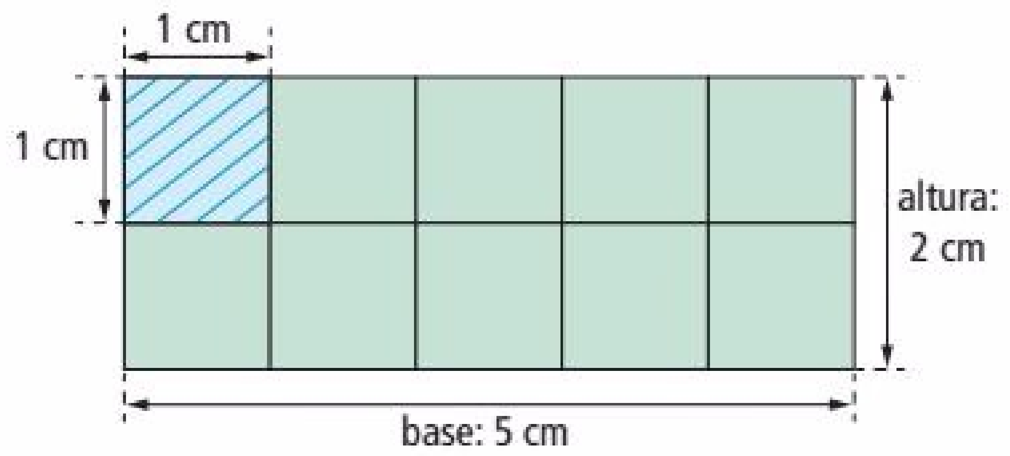
Por exemplo, a figura ao lado representa um quadrado de lado de medida 3 cm. Em seu interior, cabem 9 quadrados menores de lado de medida 1 cm, cuja área é igual a 1 cm². Então, a área do quadrado de lado de medida 3 cm é 9 cm².

Área de polígonos

Área do retângulo

Vamos retomar como determinar a área de um retângulo que tem 2 cm de altura e 5 cm de base, como mostra a figura ao lado.

Podemos dividir o retângulo em quadrados de 1 cm de lado, ou seja, com área de 1 cm^2. O cálculo do número de quadrados que compõe esse retângulo pode ser feito da seguinte maneira:



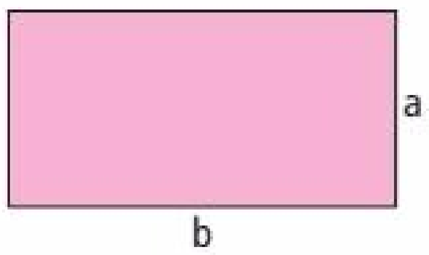
$$5 \times 2 = 2 \times 5 = 10$$

número que expressa a medida da altura

número que expressa a medida da base

Ou seja, a área do retângulo pode ser calculada pelo produto da medida da base pela medida da altura.

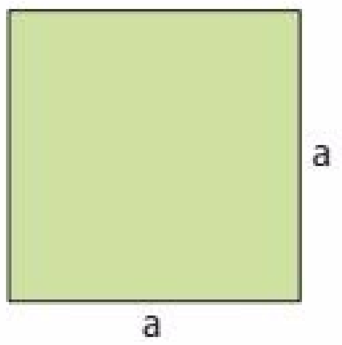
É possível provar que a área *S* de um retângulo de lados de medidas *a* e *b*, com *a* e *b* reais, é dada pelo produto da medida da base *b* pela medida da altura *a*.



$$S = a \cdot b$$

Área do quadrado

Como todo quadrado é um retângulo, utilizamos a mesma ideia para calcular sua área, considerando lados de medidas iguais. Logo, a área *S* de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados (*a*).



$$S = a^2$$

Área do paralelogramo

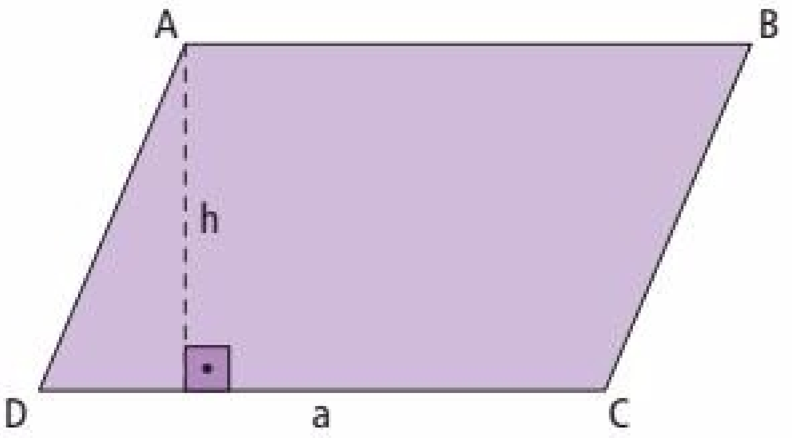
Vamos considerar um paralelogramo ABCD cujas base e altura medem *a* e *h*, respectivamente, como mostra a figura ao lado.

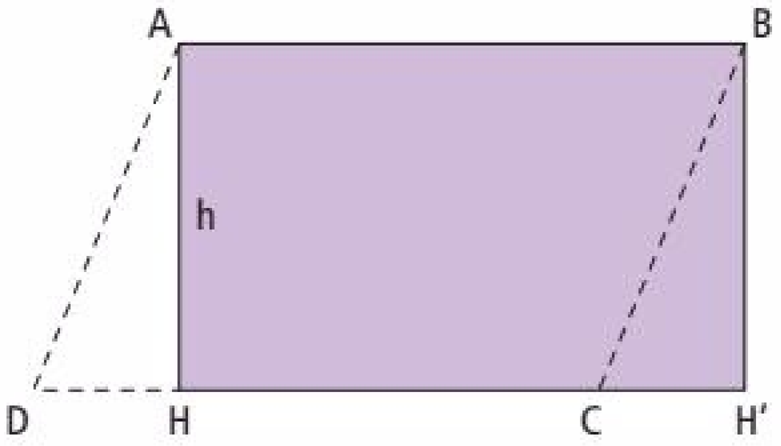
Projetando os vértices *A* e *B* desse paralelogramo sobre a reta DC, obtemos os pontos *H* e *H'*, respectivamente, determinando, assim, o retângulo ABH'H. Os triângulos AHD e BH'C são congruentes; então, eles têm a mesma área.

Logo, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo ABH'H.

$$\boxed{S = a \cdot h}$$

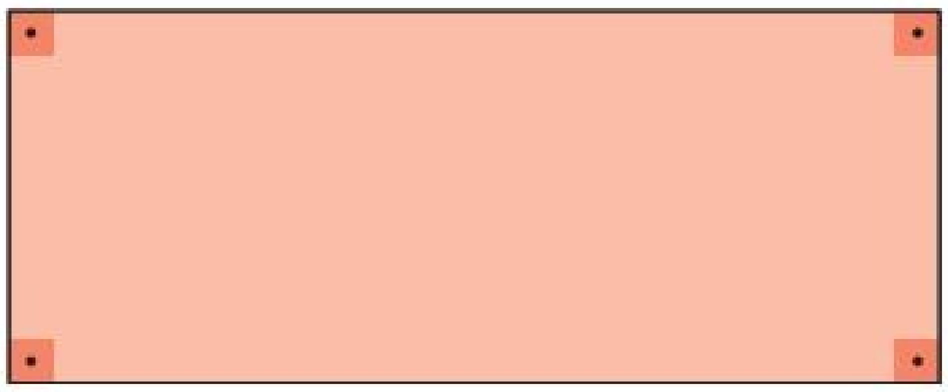
O resultado obtido independe do lado escolhido para ser a base. Caso tivéssemos escolhido outro lado do paralelogramo como base e sua respectiva altura, o resultado seria o mesmo.





Exercícios resolvidos

1 A figura representa um terreno de forma retangular e área de 1 000 m².



Sabendo que as medidas do comprimento e da largura são diretamente proporcionais a 5 e 2, respectivamente, calcule a medida do comprimento desse terreno.

Resolução

Representando a medida do comprimento por 5x e da largura por 2x, com $x > 0$, temos:

$2x \cdot 5x = 1000 \Rightarrow 10x^2 = 1000 \Rightarrow x^2 = 100$

Resolvendo a equação, vem:

$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ ou $x = -10$ (não satisfaz)

Logo, $x = 10$.

Assim, as medidas dos lados são:

Comprimento: $5x = 5 \cdot 10 = 50$

Largura: $2x = 2 \cdot 10 = 20$

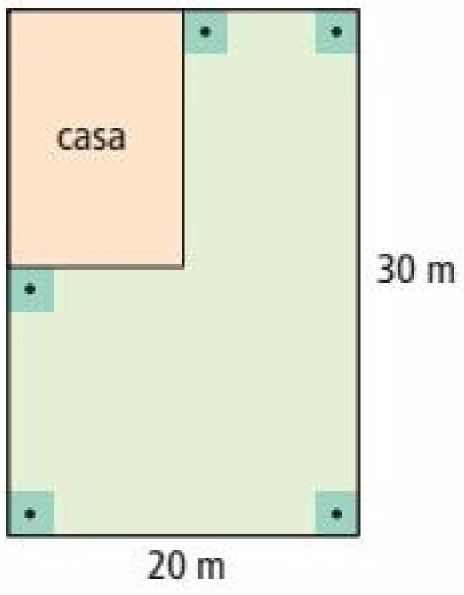
Portanto, o comprimento do terreno mede 50 m.

2 Uma casa ocupa a quarta parte de um terreno, como representa a figura ao lado.

O restante do terreno é usado como quintal.

a) Qual é a área total do terreno?

b) Certo piso é comprado em caixas que comportam 1,5 m² de material em cada uma. Quantas caixas deverão ser compradas para pavimentar o quintal deste terreno?



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

a) Da figura, temos que o terreno é retangular e tem 20 m de frente por 30 m de fundo.

Para calcular a área, fazemos:

$S = 20 \cdot 30 = 600$

Logo, a área total do terreno é de 600 m².

b) Se a casa ocupa a quarta parte do terreno, sua área é igual a:

$$S_{casa} = \frac{1}{4}S \Rightarrow S_{casa} = \frac{600}{4} = 150$$

Portanto, $S_{casa} = 150$ m².

A área do quintal é igual a:

$S_{quintal} = S_{terreno} - S_{casa} \Rightarrow S_{quintal} = 600 - 150 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{quintal} = 450$

Portanto, $S_{quintal} = 450$ m².

Sabendo que com cada caixa de piso se recobre 1,5 m² do quintal, a quantidade de caixas para pavimentar o quintal todo é igual a: $\frac{450}{1{,}5} = 300$

Logo, serão necessárias 300 caixas de piso.

3 O que ocorre com a área de um quadrado se duplicarmos a medida de seu lado?

Resolução

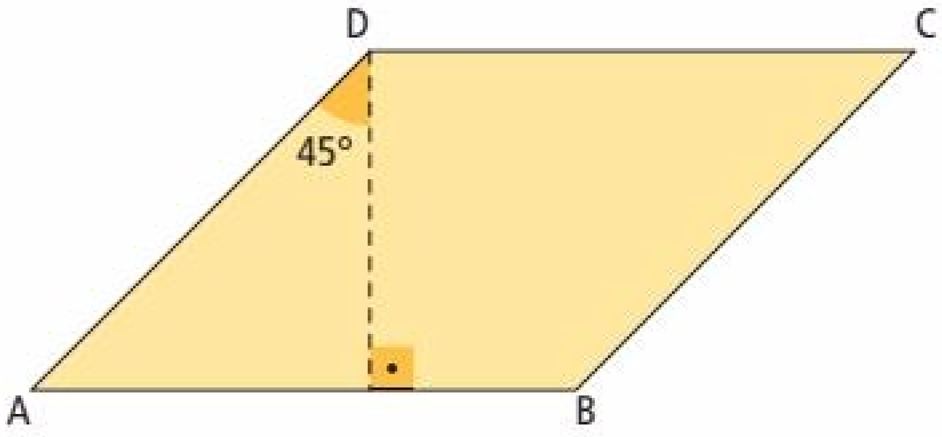
Supondo que a medida inicial do lado do quadrado seja ℓ, sua área é dada por: $A_1 = \ell^2$.

Duplicando a medida do lado, ela passa a ser 2ℓ. A área A_2 desse novo quadrado é dada por $A_2 = (2\ell)^2 = 4\ell^2$. Comparando as duas áreas, temos:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\ell^2}{\ell^2} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 4 \Rightarrow A_2 = 4A_1$$

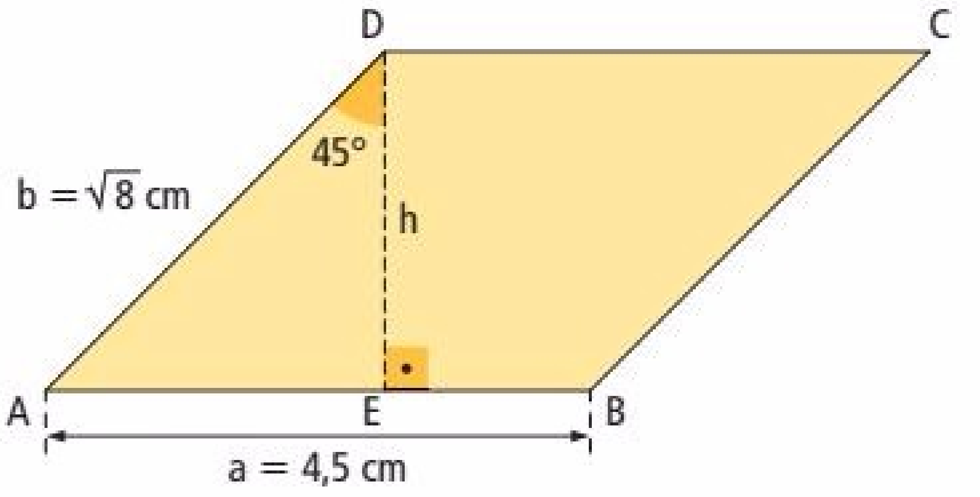
Assim, a área do quadrado aumenta 4 vezes, ou seja, quadruplica.

4 No paralelogramo ABCD, $AB = 4{,}5$ cm e $AD = \sqrt{8}$ cm. Calcule a área desse polígono.



Resolução

Para usar a fórmula da área de um paralelogramo, primeiro precisamos determinar a medida da altura desse paralelogramo.



Ilustrações: Editoria de arte

Da figura, temos:

$$\cos 45° = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{\sqrt{8}} \Rightarrow h = 2$$

Assim, esse paralelogramo tem 2 cm de altura.

Logo, a área do paralelogramo é:

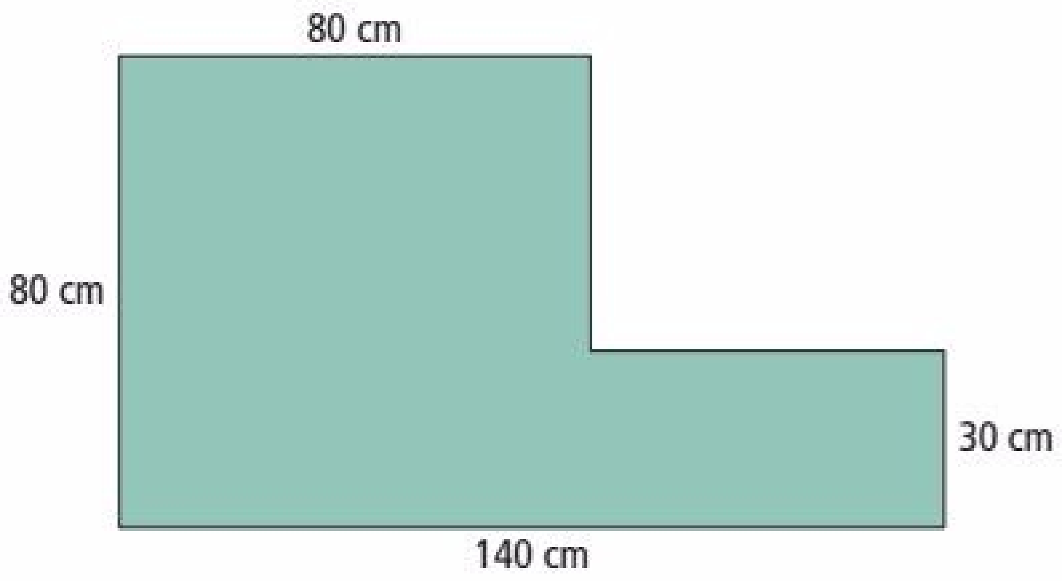
$S = a \cdot h \Rightarrow S = 4{,}5 \cdot 2 \Rightarrow S = 9$

Logo, $S = 9\ \text{cm}^2$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Determine a área total da figura a seguir. $8\,200\ \text{cm}^2$

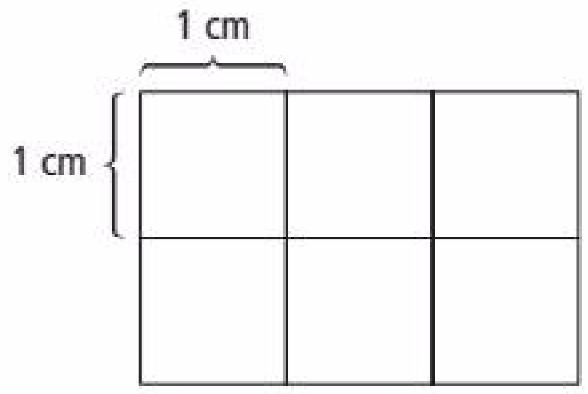


2. Determine a área de um retângulo, sabendo que a diagonal mede 10 m e o perímetro é igual a 28 m. $48\ \text{m}^2$

3. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm, são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede? 11 azulejos

4. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em $56\ \text{cm}^2$. Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial? $5\sqrt{2}$ cm

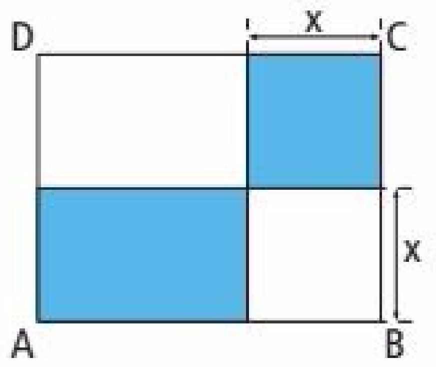
5. A malha quadriculada representada a seguir é composta de 6 quadradinhos de 1 cm de lado cada um.



Qual é a soma das áreas de todos os possíveis retângulos que podem ser obtidos por essa malha? $32\ \text{cm}^2$

6. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado? Aumenta 44%.

7. A figura abaixo representa um retângulo ABCD.



Sabendo que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja máxima. 12

8. (PUC-RS) A área ocupada pela arena do Grêmio, no bairro Humaitá, em Porto Alegre, é de $200\,000\ \text{m}^2$, e o gramado do campo de futebol propriamente dito tem dimensões de 105 m por 68 m. A área de terreno que excede à do campo é, aproximadamente, de _______ m².

a) 7 000
b) 70000
c) 130 000
[✓ d) 193 000]
e) 207 000

9. (Enem/MEC) A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8
b) 80
c) 800
d) 8 000
[✓ e) 80 000]

Desmatamento da Mata Atlântica

10. A Mata Atlântica, bioma que abrange grande parte da costa brasileira, sofre com o desmatamento desde o descobrimento do Brasil, iniciado pela extração do pau-brasil. Sua área era equivalente a 1 315 460 km²; hoje, há cerca de 8,5% de remanescentes florestais. Leia o texto a seguir sobre esse assunto e faça o que se pede.

Desmatamento da Mata Atlântica cai 24%

Novos dados do Atlas dos Remanescentes Florestais da Mata Atlântica apontaram uma queda de 24% no desmatamento da região. Baseado na análise de imagens de satélites, o estudo registrou, no período de 2013 a 2014, desmatamento de 18267 hectares (ha), ou 183 quilômetros quadrados (km²), nos 17 estados do bioma. O período de análise anterior (2012-2013) registrou 23948 ha.

Dos 17 estados da Mata Atlântica, nove apresentaram desmatamentos menores do que 100 hectares, o equivalente a 1 km². São Paulo teve desmatamento de 61 hectares. Em seguida vem Rio Grande do Sul (40 ha), Pernambuco (32 ha), Goiás (25 ha), Espírito Santo (20 ha), Alagoas (14 ha), Rio de Janeiro (12 ha), Sergipe (10 ha) e Paraíba (6 ha).

Paraná, Santa Catarina e Mato Grosso do Sul, que em outras edições do Atlas já lideraram o *ranking* dos maiores desmatadores da Mata Atlântica, apresentaram melhores resultados no atual levantamento, mas ainda merecem atenção.

Quarto do *ranking* deste ano, o Paraná perdeu 921 ha de florestas nativas no período 2013-2014, queda de 57% em relação ao ano anterior, quando foram desmatados 2126 ha. Os principais focos de desmate aconteceram na região centro-sul e também na divisa com Santa Catarina, quinto lugar no *ranking*, com 692 ha de áreas desmatadas.

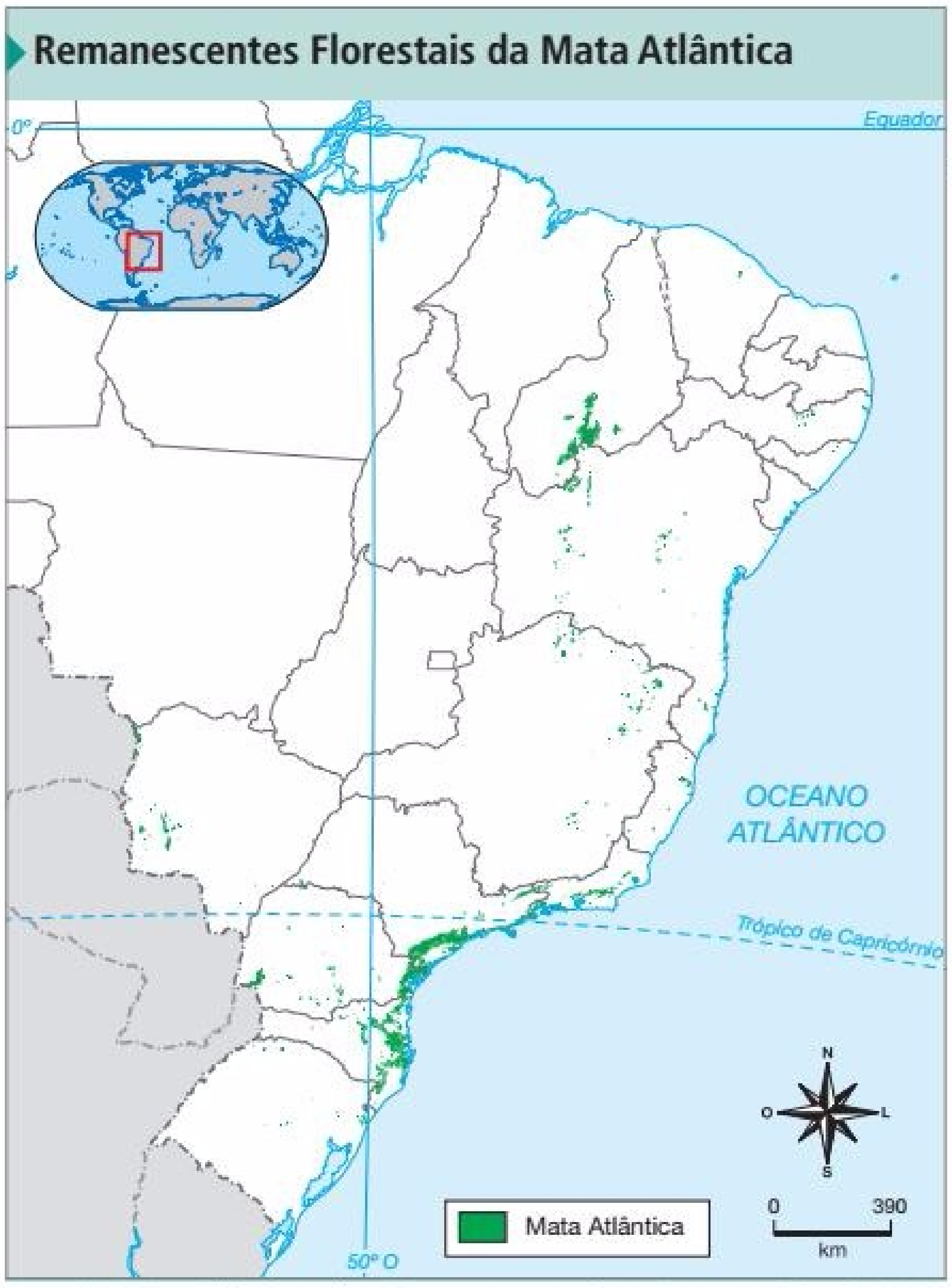
Já Mato Grosso do Sul, importante produtor agrícola, ficou em sétimo lugar, com 527 ha desmatados.

Campeão de desmatamento

Nesta edição do estudo, Piauí foi o Estado campeão de desmatamento, com 5626 ha. Um único município piauiense, Eliseu Martins, foi responsável por 23% do total dos desflorestamentos observados no período, com 4287 ha. É o segundo ano consecutivo em que o Atlas observa padrão de desmatamento nos municípios ao sul do Piauí. No período anterior, entre 2012 e 2013, foram desmatados 6633 ha em municípios da mesma região, com destaque para Manoel Emídio (3164 ha) e Alvorada do Gurgueia (2460 ha). [...]

Fonte: BRASIL. Portal Brasil. **Desmatamento da Mata Atlântica cai 24%.** Brasília, 29 maio 2015. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/meio-ambiente/2015/05/desmatamento-da-mata-atlantica-cai-24>. Acesso em: 18 mar. 2016.

Atlas dos Remanescentes Florestais da Mata Atlântica
Ferramenta de análise criada em 1990, com o objetivo de mapear e monitorar a situação da Mata Atlântica e seus ecossistemas associados. Os dados são produzidos pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), com apoio da iniciativa privada.


Remanescentes Florestais da Mata Atlântica

Allmaps

Fonte: SOS Mata Atlântica. <http://www.sosma.org.br>. Acesso em: 13 maio 2016.

a) Utilizando as informações obtidas no texto e no mapa, responda: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

i) Pode-se afirmar que a área remanescente da Mata Atlântica está aumentando?

ii) Qual é o estado brasileiro com maior remanescente da Mata Atlântica?

b) Um recurso bastante utilizado ao se produzir um texto que apresenta dados com valores muito altos, ou muito baixos, é a mudança da unidade de medida usando objetos como tal, pois algumas vezes esses números dificultam a compreensão do leitor sobre a magnitude desses valores. Com base nessa informação, no texto e em seus conhecimentos, responda:

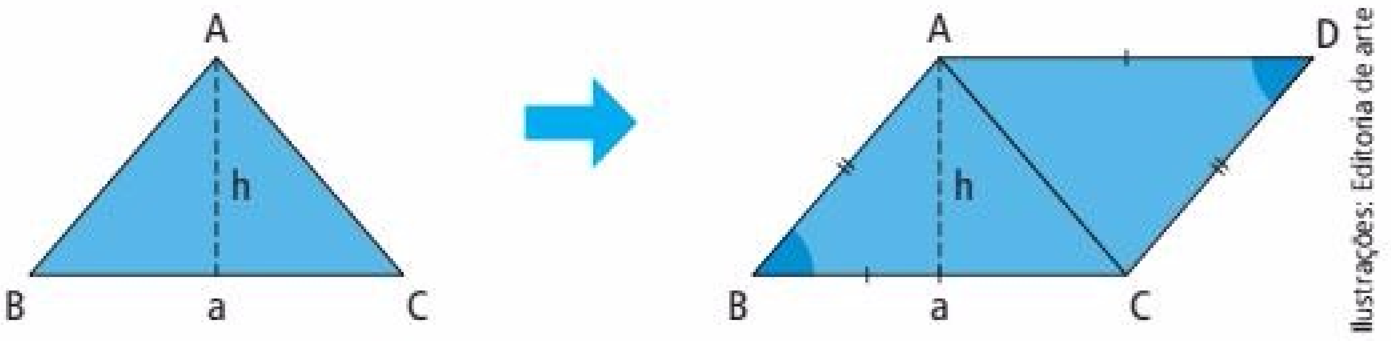
i) O recurso citado no enunciado pode ser aplicado ao texto lido? Justifique sua resposta.

ii) Conforme presente no texto, no período de 2013 a 2014, houve desmatamento de 18 267 hectares (ha), ou 183 quilômetros quadrados (km²), nos 17 estados do bioma da Mata Atlântica. Se um campo de futebol oficial tem medidas máximas de 120 m × 90 m, determine a quantidade aproximada de campos de futebol, com medidas máximas, equivalente à área desmatada no período indicado.

Área do triângulo

Vamos considerar um triângulo ABC cuja base BC mede *a*, e a altura relativa à base mede *h*.

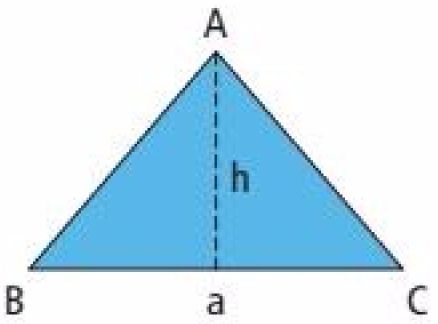
Observe que, traçando por *A* uma paralela ao lado BC e por *C* uma paralela ao lado AB, determinamos um ponto *D* e um paralelogramo ABCD.



Ilustrações: Editoria de arte

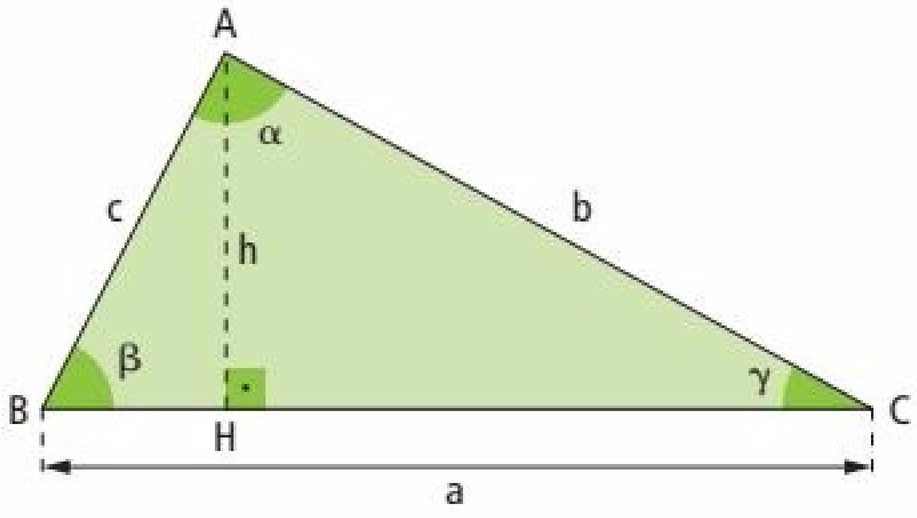
Pelo caso de congruência de triângulos LAL, temos que os triângulos BAC e DCA são congruentes, e, portanto, suas áreas são iguais.

Assim, a área *S* do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo ABCD.



$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

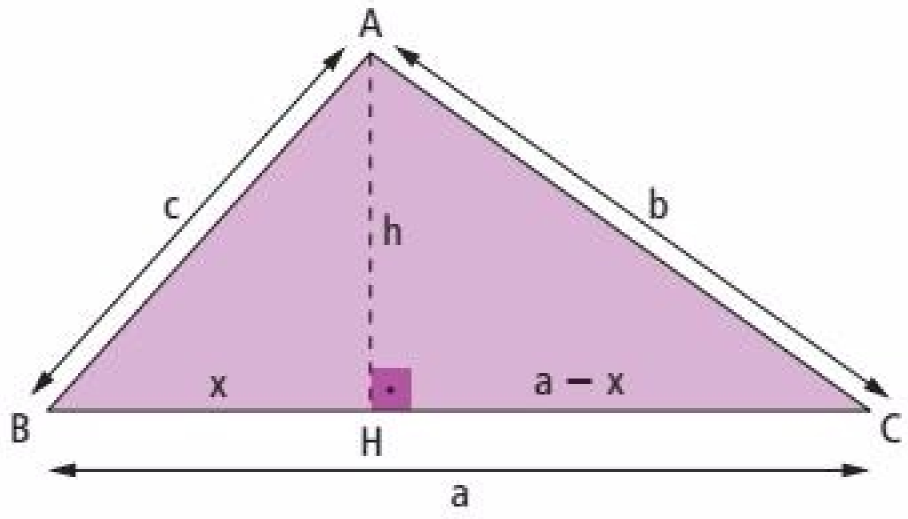
No volume 1 desta coleção estudamos como calcular a área de um triângulo qualquer sabendo a medida de dois dos lados e o seno do ângulo formado por esses lados. Vamos retomar essas fórmulas:



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2} \qquad S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} \qquad S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta}{2}$$

Outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer é a partir da medida de seus três lados.

Seja um triângulo ABC em que *a*, *b* e *c* são, respectivamente, as medidas dos lados BC, AC e AB e *h* é a medida da altura AH relativa ao lado BC, como mostra a figura ao lado.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AHB e AHC temos:

$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2$ Ⓘ

$b^2 = h^2 + (a - x)^2$ Ⓘⓘ

Substituindo Ⓘ em Ⓘⓘ, temos:

$b^2 = c^2 - x^2 + (a - x)^2$

Desenvolvendo a expressão, obtemos: $x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$. Substituindo a expressão obtida em Ⓘ, temos:

$$h^2 = c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2} \quad \text{(III)}$$

Mas a área de um triângulo pode ser expressa por $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$. Elevando a expressão ao quadrado obtemos $S^2 = \dfrac{a^2 \cdot h^2}{4}$. Substituindo (III) na expressão da área ao quadrado, temos:

$$S^2 = \frac{a^2 \cdot \left(4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2\right)}{16a^2} = \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{16} = \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{16}$$

Fatorando e manipulando algebricamente o lado direito da igualdade, obtemos:

$$S^2 = \left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - c\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - a\right)$$

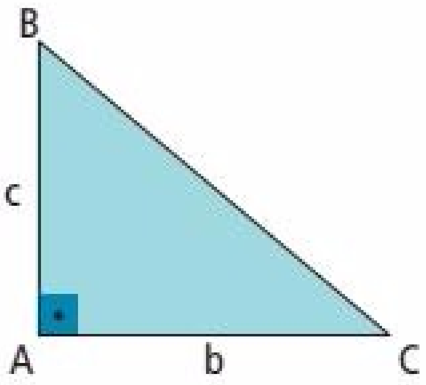
Sendo $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ o semiperímetro do triângulo e substituindo na igualdade, temos:

$$S^2 = p \cdot (p - b) \cdot (p - c) \cdot (p - a) \Rightarrow S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Essa fórmula é denominada fórmula de Heron.

Casos particulares

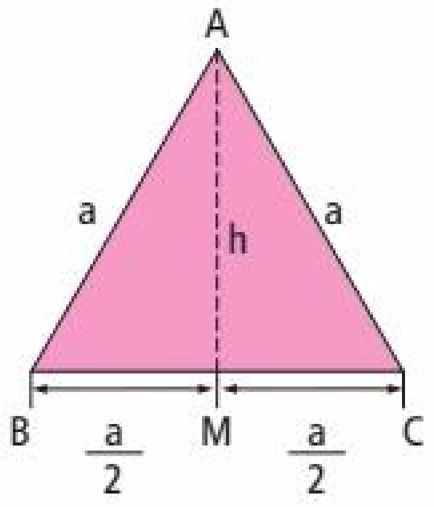
Área do triângulo retângulo



Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AB é a altura relativa ao lado AC. Assim, sendo AB = c, AC = b e *S* a área do triângulo retângulo ABC, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Área do triângulo equilátero



Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também bissetriz e mediana.

Vamos considerar um triângulo equilátero ABC de lado *a* e altura *h* como mostra a figura ao lado.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AMB, temos:

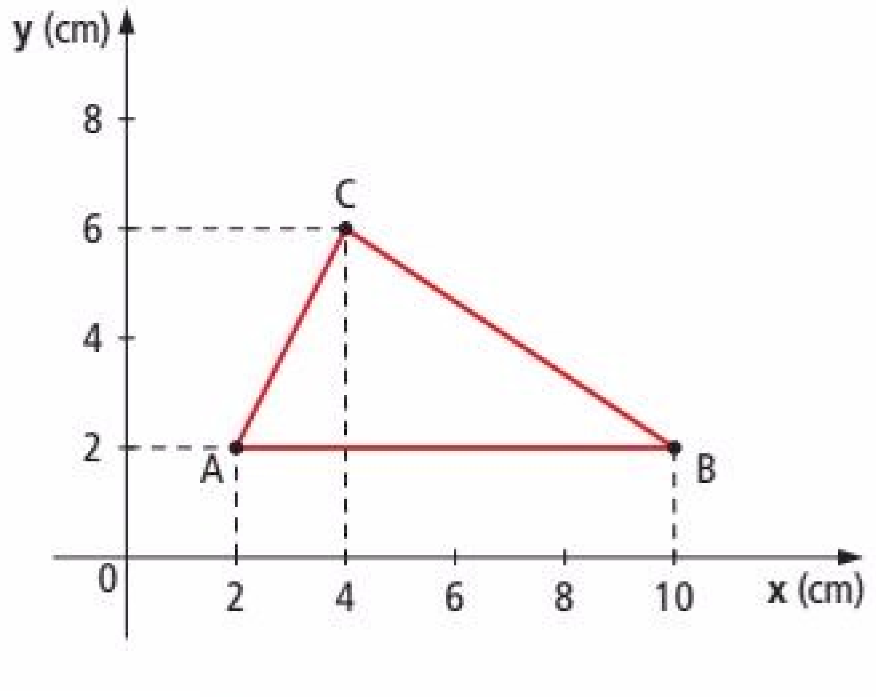
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, sendo *S* a área do triângulo equilátero ABC, temos:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

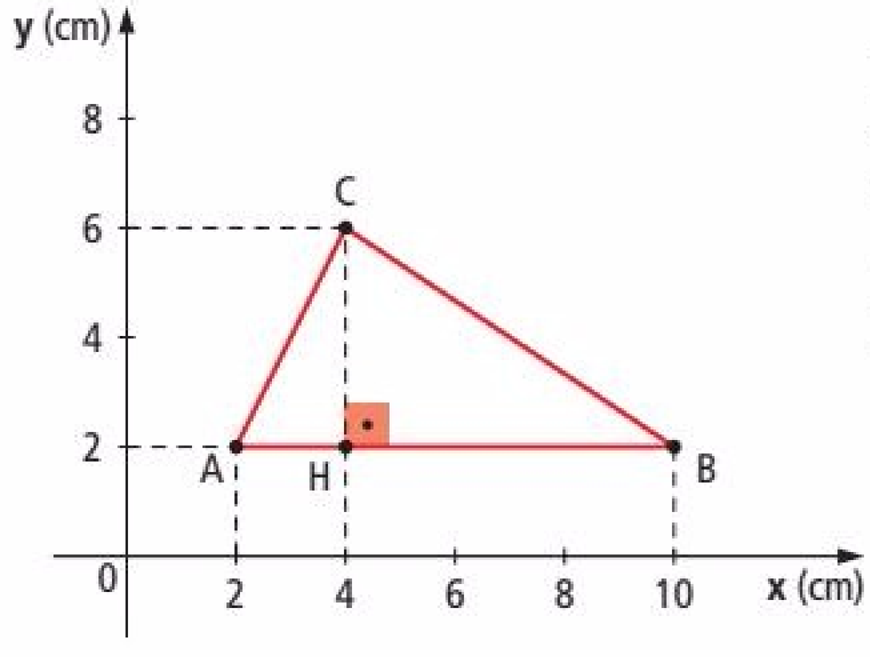
Exercícios resolvidos

5 Calcule a área do triângulo ABC representado a seguir:



Resolução

Completando a figura, temos a figura a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

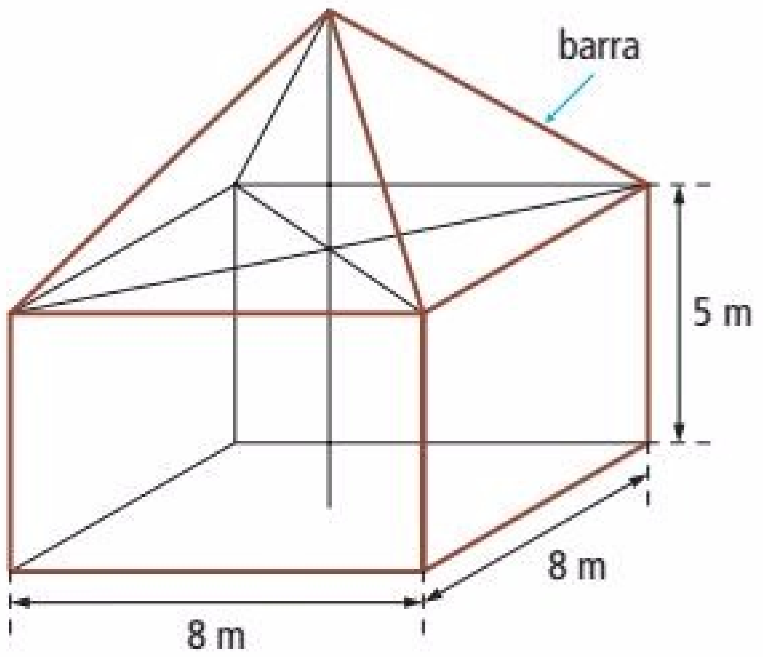
A base do triângulo mede 10 cm − 2 cm = 8 cm, e a altura, 6 cm − 2 cm = 4 cm.

Logo:

$$A = \frac{bh}{2} \Rightarrow A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Assim, a área do triângulo ABC é 16 cm².

6 Um quiosque tem a forma representada na figura abaixo. Seu telhado será revestido com manta de alumínio para evitar aquecimento. Determine a área que será protegida com essa manta, sabendo que as barras que sustentam o telhado medem 8 metros cada uma. (Dado: $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$.)



Resolução

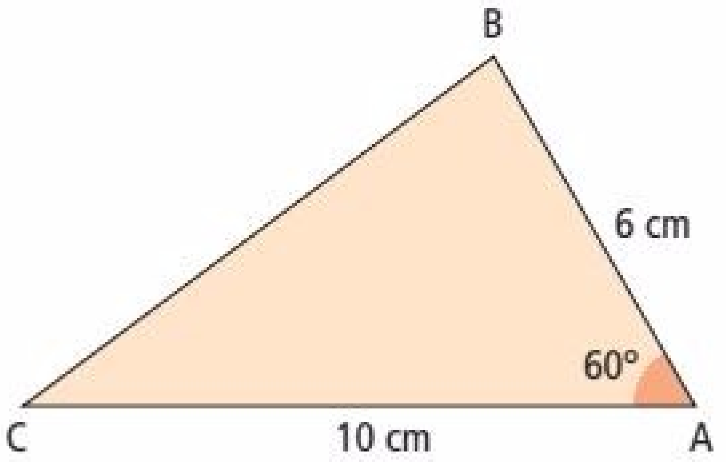
Pelo enunciado e pela figura, verificamos que o telhado é composto por quatro triângulos equiláteros de lado 8 m.

Assim, sua área total é dada por:

$$A = \cancel{4} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} \Rightarrow A = 8^2\sqrt{3} \Rightarrow A = 64 \cdot 1{,}732 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \simeq 110{,}85, \text{ ou seja, } A = 110{,}85 \text{ m}^2.$$

7 Calcule a área do triângulo representado abaixo:



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

Como os lados medem 10 cm e 6 cm, e o ângulo entre eles mede 60°, temos:

$$A = \frac{10 \cdot 6 \cdot \text{sen}\, 60°}{2} \Rightarrow A = \frac{10 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 15\sqrt{3}$$

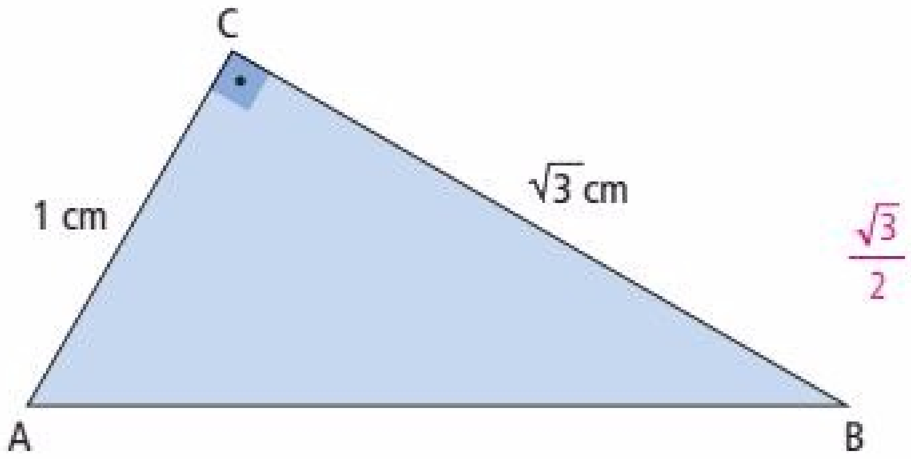
Portanto, $A = 15\sqrt{3}$ cm².

Exercícios propostos

Escreva no caderno

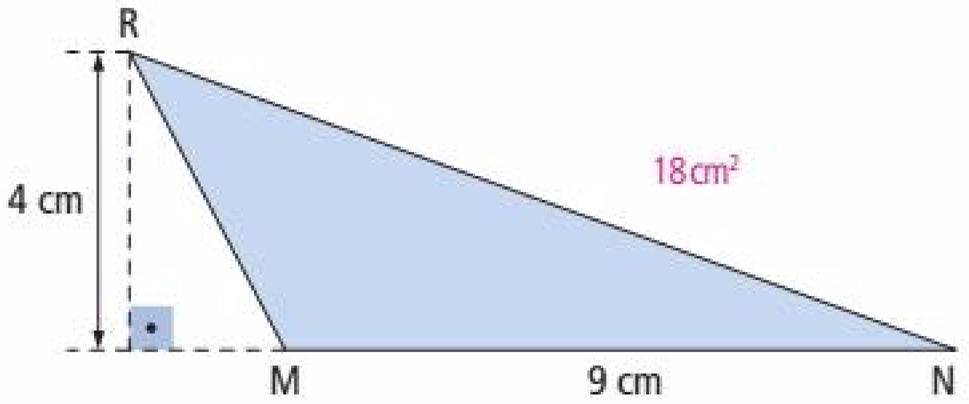
11. Calcule a área dos triângulos representados abaixo.

a)



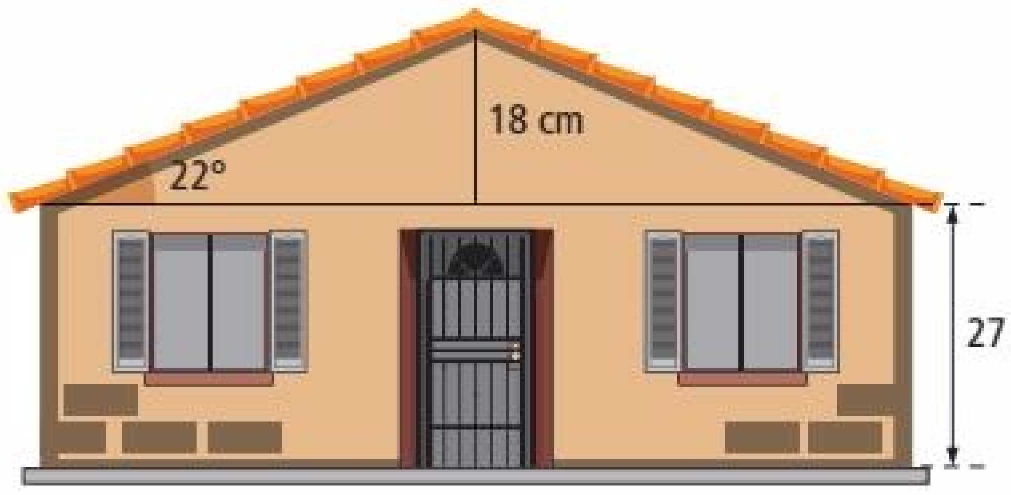
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm²

b)



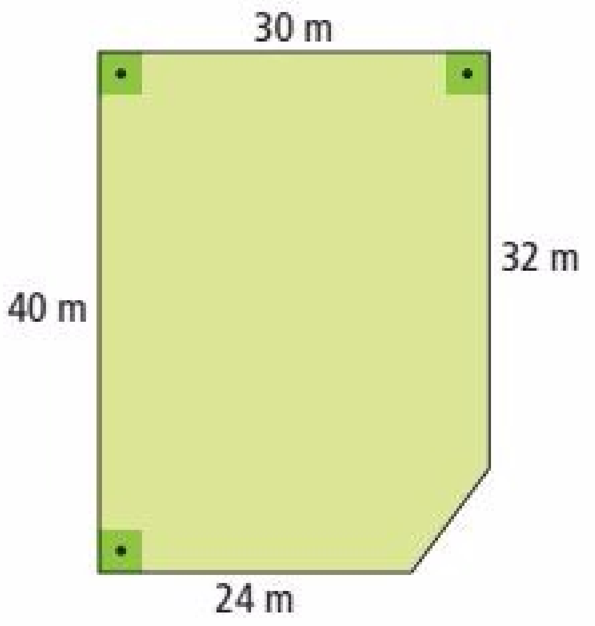
18 cm²

12. Qual é a área da fachada desta casa?



(Dados: escala 1 : 10 e tg 22° ≃ 0,40.) 32,4 m²

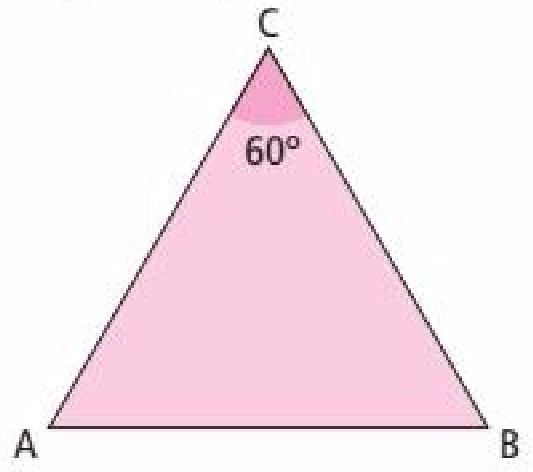
13. A figura representa as dimensões de um terreno.



Sabendo que o preço do metro quadrado é R$ 160,00, qual é o valor do terreno? R$ 188 160,00

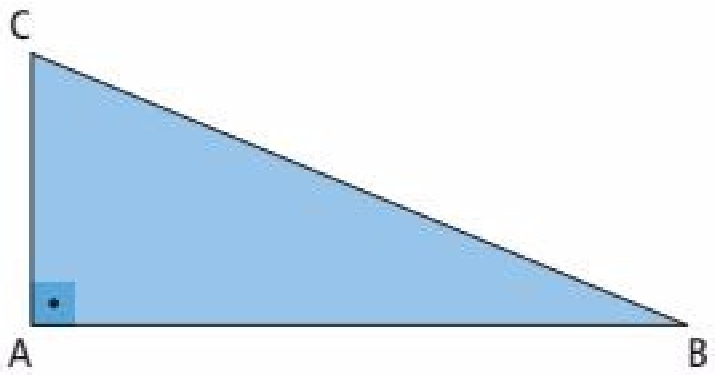
14. Determine a área de um triângulo equilátero cujo perímetro é igual a 45 dm. $S = \frac{225\sqrt{3}}{4}$ dm²

15. Considere o triângulo representado abaixo:



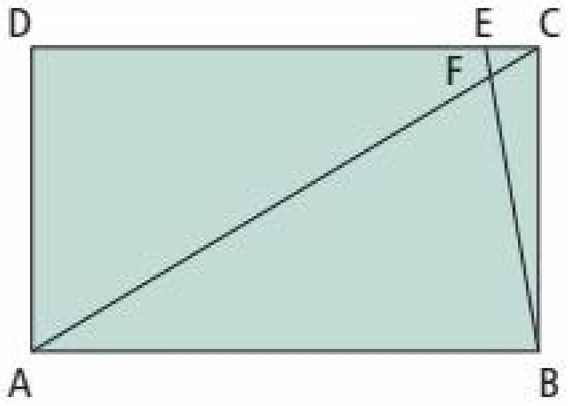
Sabendo que AC = BC e AB = 10 cm, calcule a área do triângulo ABC. $25\sqrt{3}$ cm²

16. A área do triângulo retângulo representado na figura abaixo é 25 dm^2.



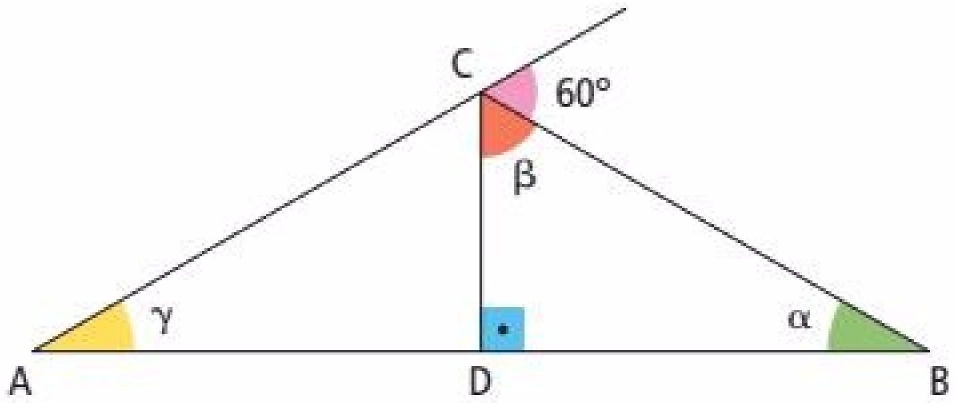
Sabendo que um dos catetos é $\frac{2}{5}$ do outro, qual é a medida da hipotenusa desse triângulo? $\sqrt{145}$ dm

17. Considere o retângulo ABCD representado ao lado.



Sabendo que AB = 10 cm, AD = 6 cm e CE = 1 cm, calcule a área do triângulo BCF. $\frac{30}{11}$ cm^2

18. Na figura abaixo, CD = 1 cm e BD = $\sqrt{3}$ cm.



Calcule:

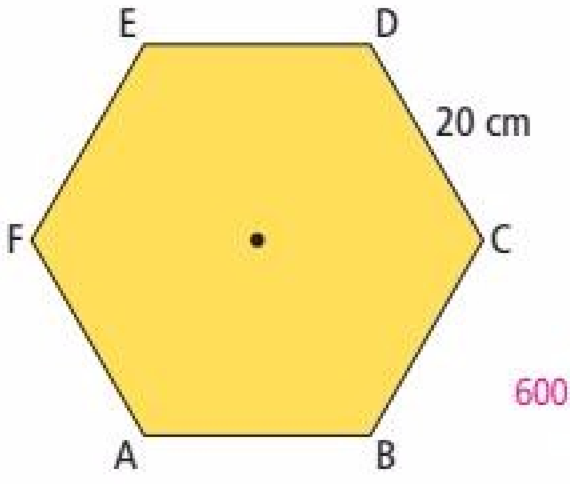
a) A medida do lado CB. 2 cm

b) As medidas dos ângulos α, β e γ. 30°; 60°; 30°

c) A medida do lado AD. $\sqrt{3}$ cm

d) A área do triângulo ABC. $\sqrt{3}$ cm^2

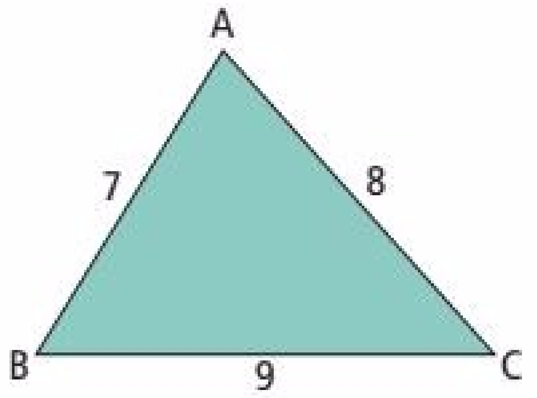
19. Calcule a área do hexágono regular da figura.



$600\sqrt{3}$ cm^2

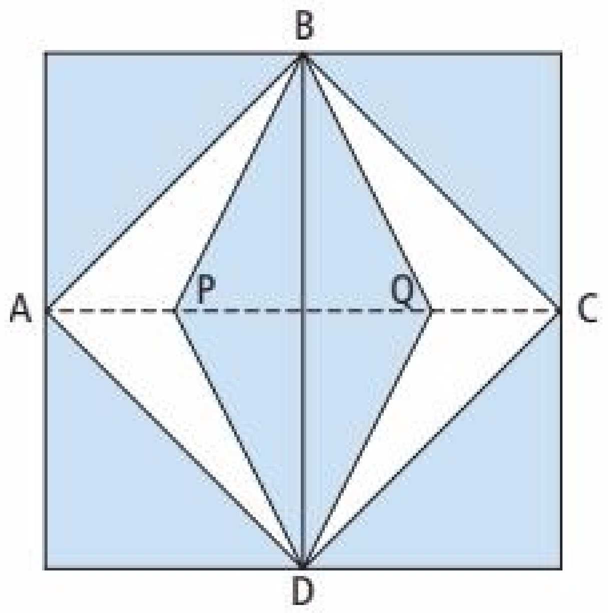
20. O lado de um hexágono regular mede 8 cm. Qual é sua área? $96\sqrt{3}$ cm^2

21. Calcule a área do triângulo ABC da figura em que as medidas estão indicadas em centímetros.



$12\sqrt{5}$ cm^2

22. (Enem/MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50

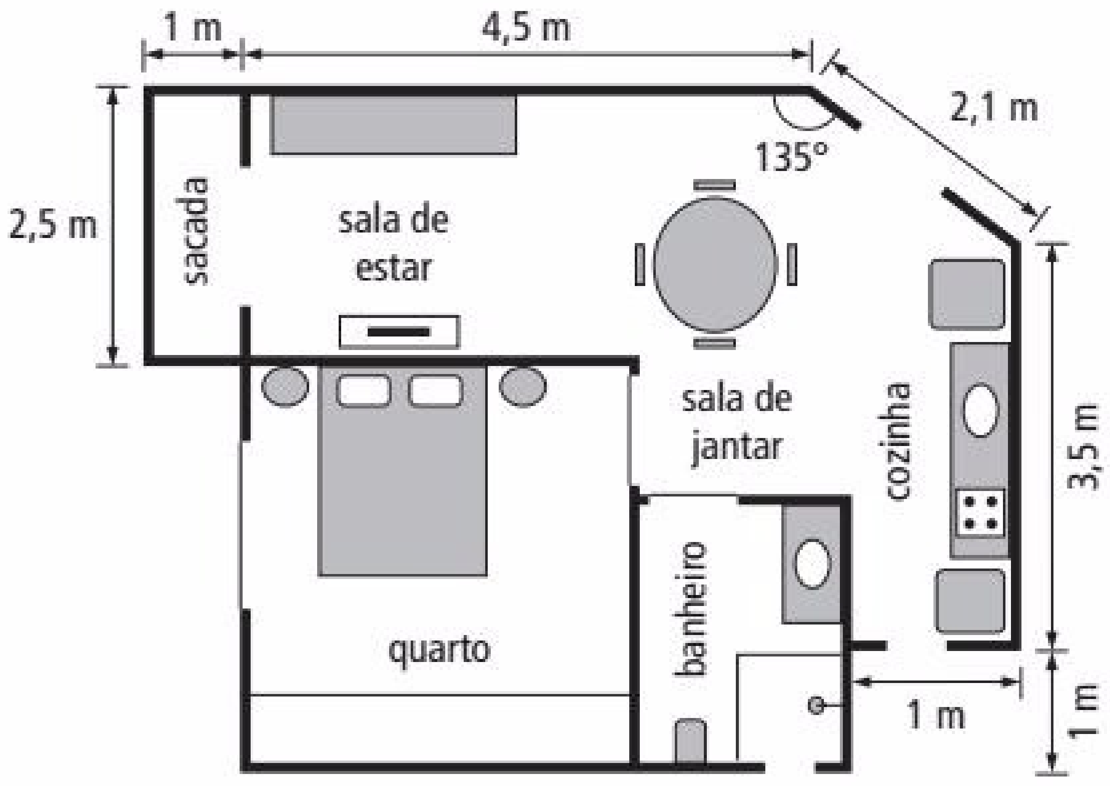
X b) R$ 35,00

c) R$ 40,00

d) R$ 42,50

e) R$ 45,00

23. (Udesc-SC) Maria precisa comprar piso para seu apartamento cuja planta baixa pode ser vista na figura. Devido aos recortes necessários para a colocação do piso, o mestre de obras solicitou 10% a mais da metragem total do apartamento.



De acordo com as instruções do mestre de obras, Maria deve comprar aproximadamente:

a) 38 m^2

b) 37 m^2

X c) 40 m^2

d) 39 m^2

e) 42 m^2

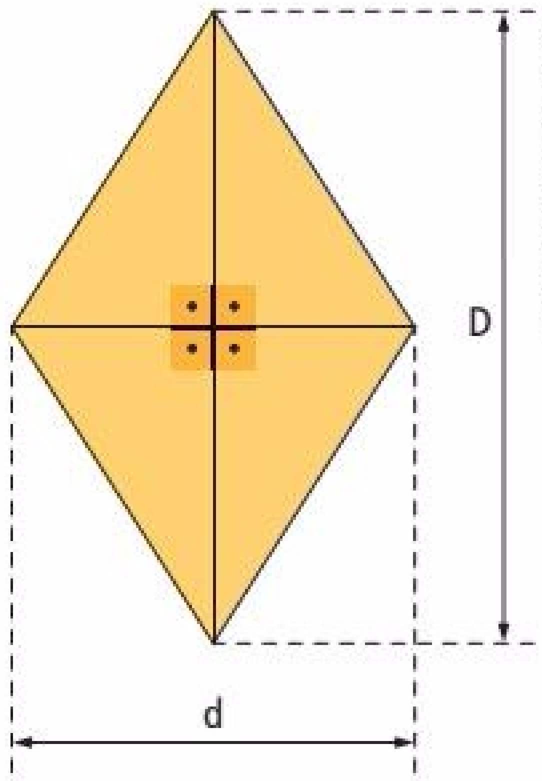
Área do losango

Todo losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais, e as diagonais são perpendiculares entre si.

Observe que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes de mesma área. Assim, sua área S é a soma das áreas desses quatro triângulos:

$$S = 4 \cdot S_{\triangle} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Portanto, a área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.



Ilustrações: Editoria de arte

Propriedades

- Em um losango, os ângulos opostos são congruentes.
- Em um losango, as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos.

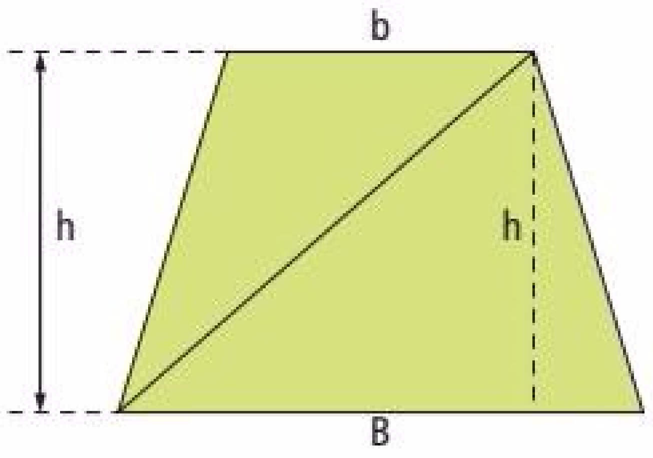
Área do trapézio

Vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem *B*, *b* e *h*, respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, nós o dividimos em dois triângulos: um de base *B* e altura *h* e outro de base *b* e altura *h*, como mostra a figura ao lado.

A área *S* do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$S = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow S = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

Portanto, a área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.



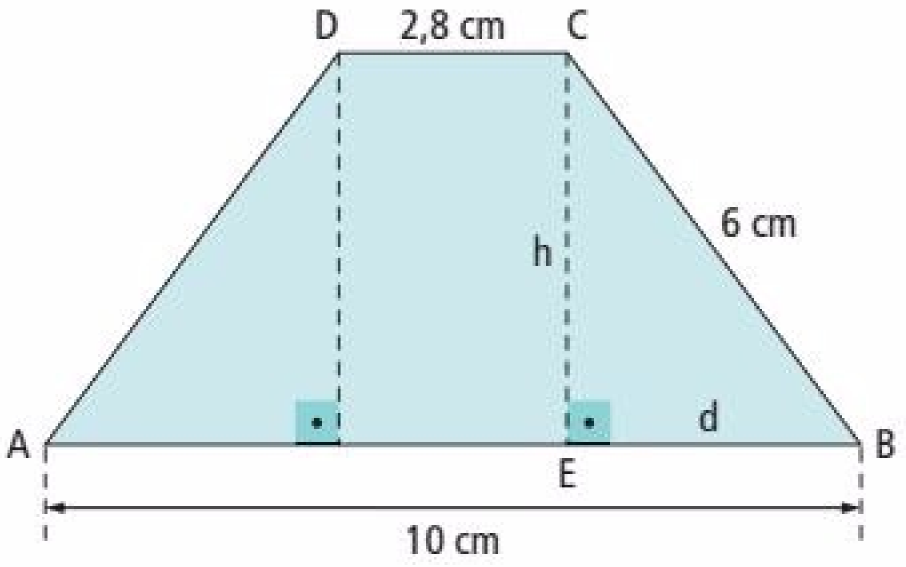
Exercícios resolvidos

8 As bases de um trapézio medem, respectivamente, 10 cm e 2,8 cm. Se a medida de cada um dos outros dois lados é 6 cm, qual é a área desse trapézio?

Resolução

Como os lados não paralelos têm medidas iguais, o trapézio é isósceles.

Fazendo uma figura, temos:



Vamos calcular a medida d no $\triangle BEC$ para podermos encontrar a altura do trapézio, aplicando a relação de Pitágoras.

$$d = \frac{10 - 2{,}8}{2} = \frac{7{,}2}{2} \Rightarrow d = 3{,}6 \text{ cm}$$

Aplicando a relação de Pitágoras no $\triangle BEC$, vem:

$$h^2 + 3{,}6^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 23{,}04$$

Logo, $h = 4{,}8$ cm.

- Cálculo da área do trapézio

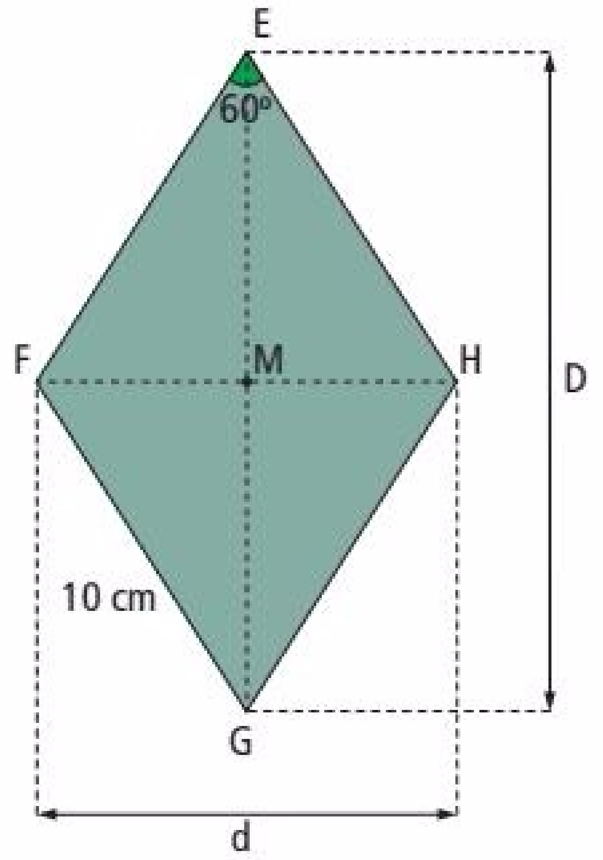
$$S = \frac{(10 + 2{,}8) \cdot 4{,}8}{2} \Rightarrow S = \frac{(12{,}8 \cdot 4{,}8)}{2} = 30{,}72$$

Portanto, $S = 30{,}72$ cm².

9 Determine a área de um losango cujo lado mede 10 cm, e um dos ângulos internos mede 60°.

Resolução

Seja EFGH o losango de lado 10 cm e diagonais *D* e *d*.



Em um losango, temos a propriedade: os ângulos opostos são congruentes.

Se $\hat{E}$ mede 60°, temos $\hat{G} = 60°$.

Logo, $\hat{F} = \hat{H} = 120°$, pois $\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360°$.

Além disso, as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos; logo, med (FÊM) = 30°.

Destacando o triângulo EFM, vem:

$$\cos 30° = \frac{\frac{D}{2}}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{D}{20} \Rightarrow D = 10\sqrt{3}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{d}{2}}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{20} \Rightarrow d = 10$$

Portanto, a área do losango EFGH é:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \frac{10\sqrt{3} \cdot 10}{2} \Rightarrow A = 50\sqrt{3}$$

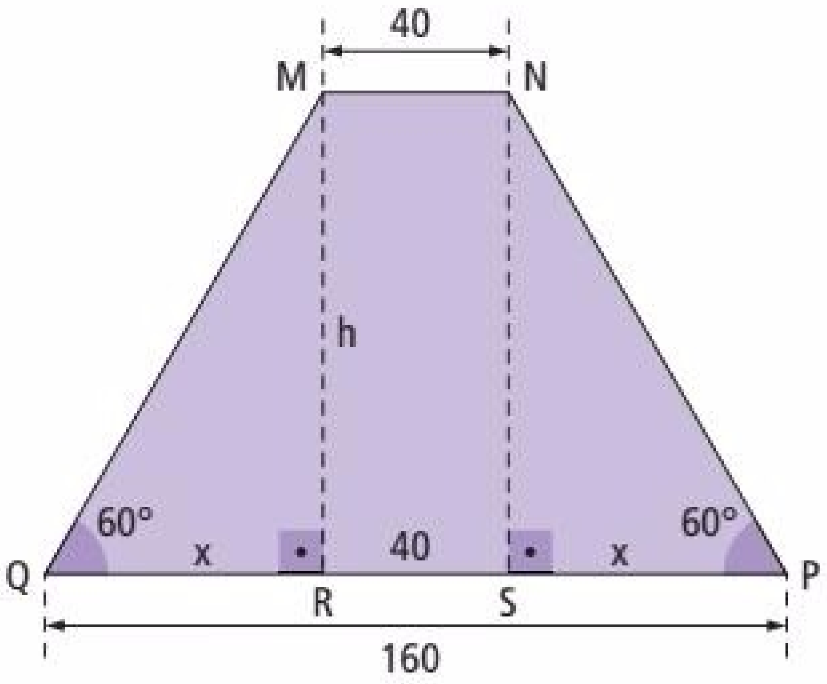
Portanto, $A = 50\sqrt{3}$ cm^2.

10 Um terreno tem a forma de um trapézio isósceles, em que a base maior mede 160 m, a base menor mede 40 m e os ângulos da base medem 60°. Qual é a área desse terreno? Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

Resolução

Como o trapézio é isósceles, NP = MQ e QR = SP. Logo:

$QR + RS + SP = 160 \Rightarrow x + 40 + x = 160 \Rightarrow x = 60$



No triângulo retângulo QRM, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{60} \Rightarrow h = 60\sqrt{3}$$

Assim, a área do terreno será:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(160 + 40)}{2} \cdot 60\sqrt{3} = 10\,200$$

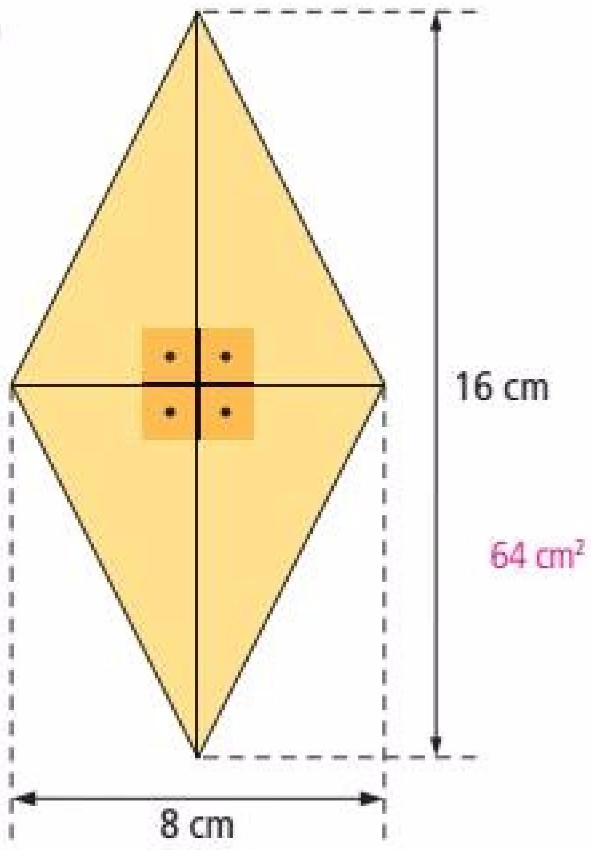
Portanto, $A = 10\,200$ m^2.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

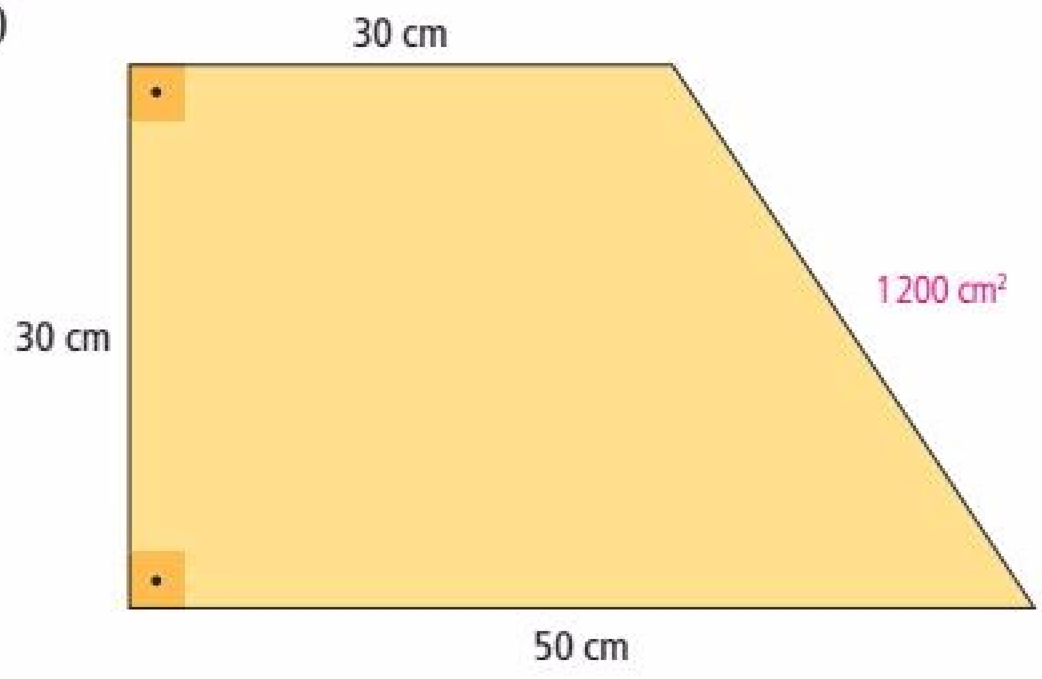
24. Calcule a área das figuras representadas abaixo.

a)



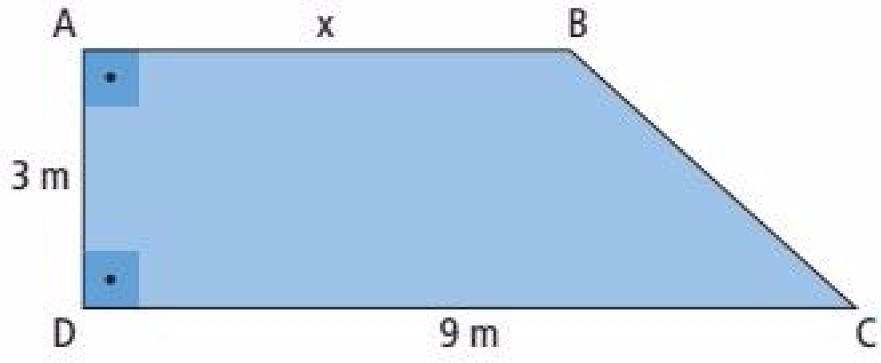
64 cm²

b)



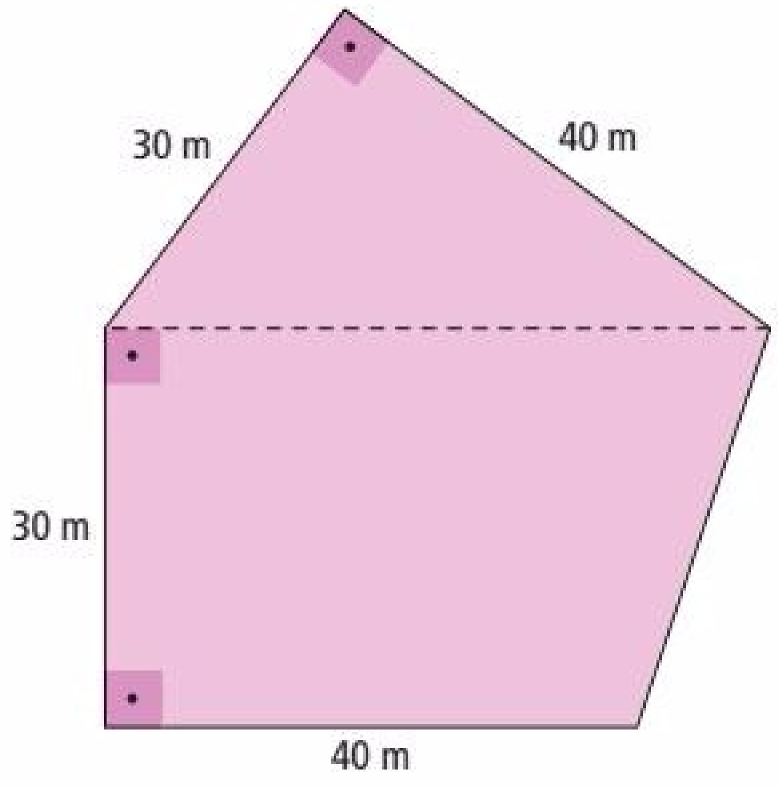
1200 cm²

25. A área do trapézio representado a seguir é igual a 22 m². Calcule o valor de *x*.



$x = \frac{17}{3}$ m

26. Veja as medidas de um terreno pentagonal representado abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

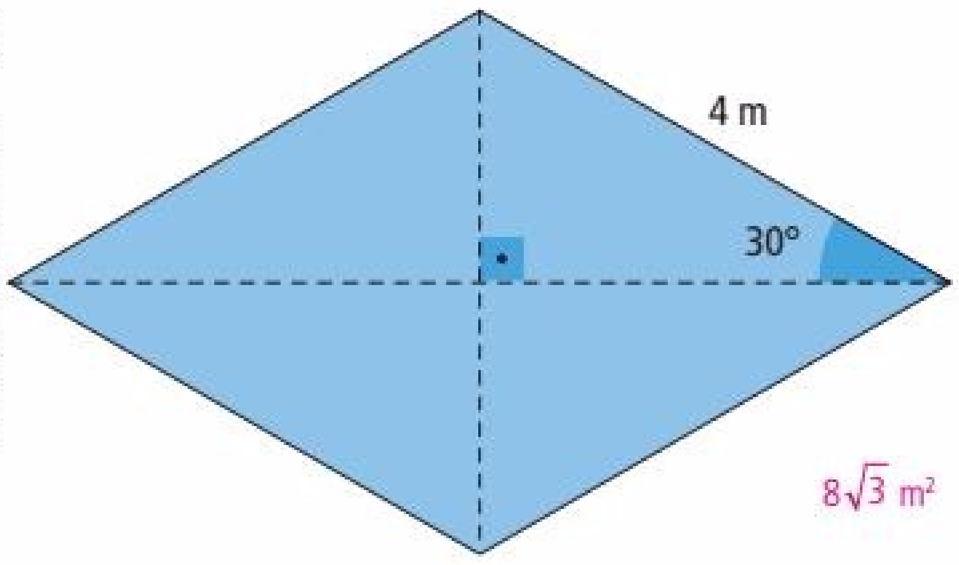
a) Determine a área da superfície desse terreno.

b) Calcule o preço do terreno, considerando que o metro quadrado custe R$ 3 000,00.

a) 1950 m²
b) R$ 5850000,00

27. Determine a área das figuras representadas a seguir.

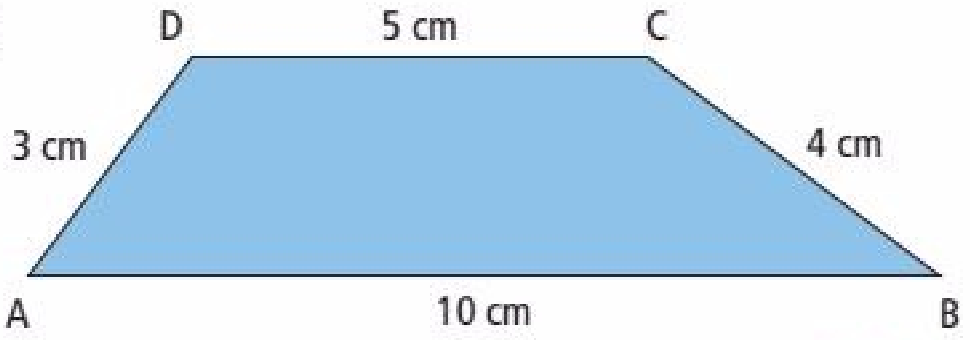
a)



Ilustrações: Editoria de arte

$8\sqrt{3}$ m²

b)



Em que: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

18 cm²

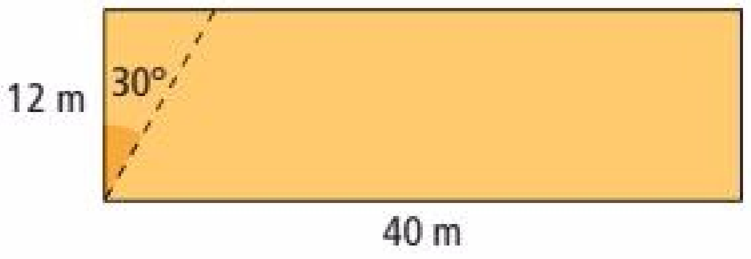
28. Um losango é interno a uma circunferência de 6 cm de raio, de maneira que a diagonal maior do losango coincide com o diâmetro da circunferência. Sabendo que um dos ângulos internos do losango mede 60°, calcule a área do losango. $S = 24\sqrt{3}$ cm²

29. Considere os pontos: A(0, 0), B(0, 2), C(4, 2), D(4, 6), E(10, 6) e F(14, 0).

a) Represente geometricamente no plano cartesiano o hexágono ABCDEF. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Se a unidade de medida é dada em centímetros, qual é a área do hexágono ABCDEF? 56 cm²

30. A figura representa um terreno retangular repartido em duas partes: uma na forma de triângulo e a outra na de trapézio.



Qual é a área da parte na forma de trapézio? Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$. 439,2 m²

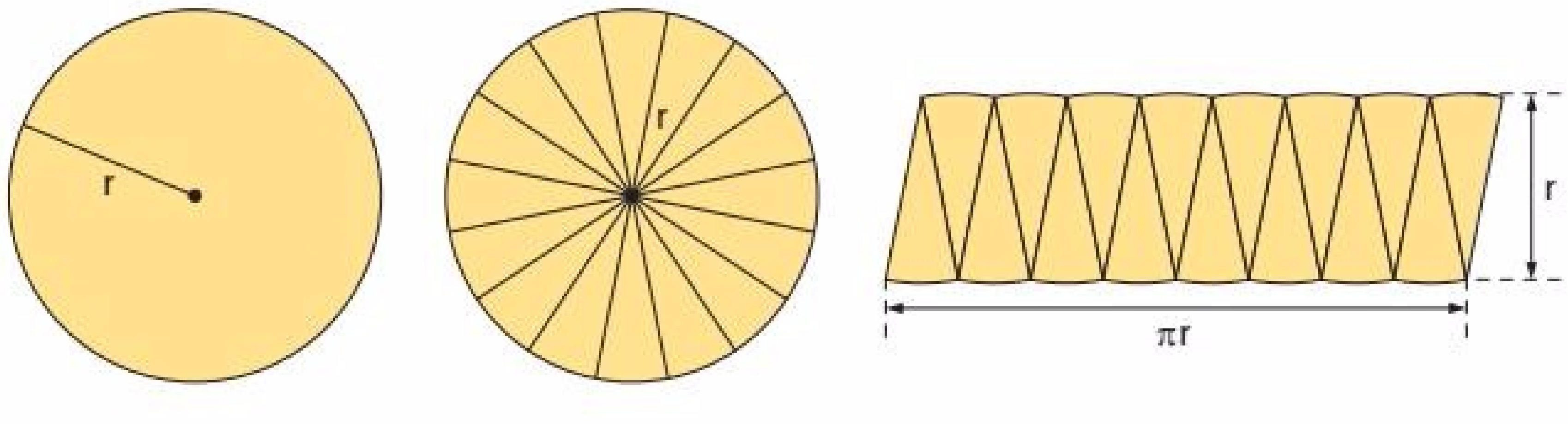
31. Um trapézio retângulo tem altura de 56 cm e área igual a 2 464 cm². Qual é o perímetro desse trapézio, sabendo que a medida da base menor é $\frac{3}{5}$ da medida da base maior? $(144 + 2\sqrt{905})$ cm

32. Qual é a área de um paralelogramo que possui dois lados consecutivos de 40 cm e 24 cm e o ângulo entre eles igual a 60°? $480\sqrt{3}$ cm²

Área do círculo e de suas partes

Área do círculo

Vamos considerar um círculo cujo raio mede *r*. Dividindo-o em um número par de partes iguais como mostra a figura, podemos observar que essas partes podem formar uma figura que lembra um paralelogramo. Sua base mede aproximadamente a metade do comprimento da circunferência, ou seja, πr.



Assim, sendo *S* a área dessa figura, que também é a área do círculo, temos:

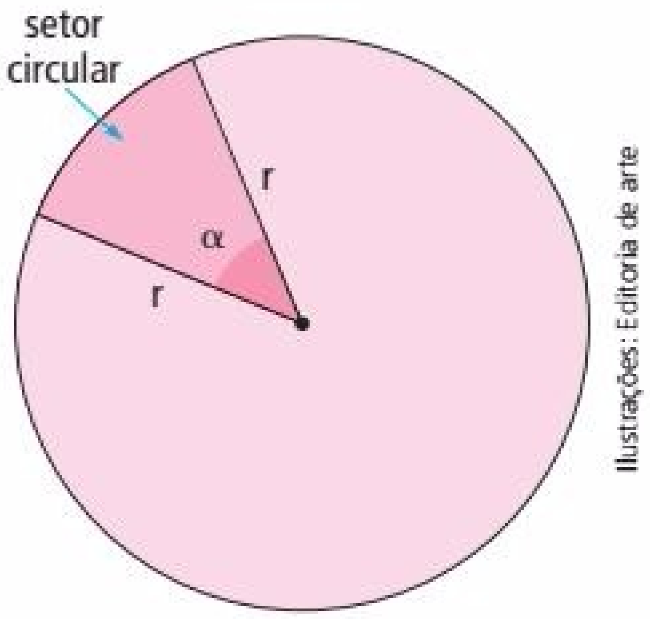
$$S = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

De maneira geral, podemos calcular a área de um círculo de raio *r* pela fórmula:

$$\boxed{S = \pi r^2}$$

Área do setor circular

Denominamos **setor circular** a região do círculo delimitada por um dos seus ângulos centrais.



Ilustrações: Editoria de arte

Vamos calcular a área de um setor circular, montando uma regra de três simples que relacione a medida do ângulo central e a área:

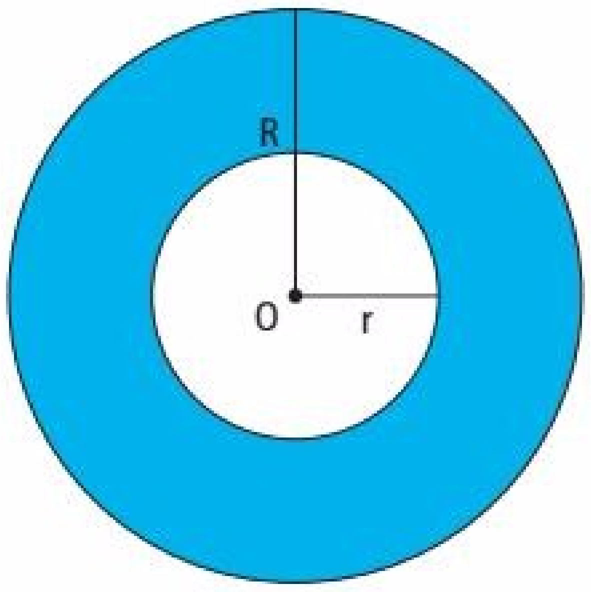
$$\begin{array}{rcl} 360° & \text{———} & \pi r^2 \\ \alpha & \text{———} & S \end{array}$$

Assim:

$$\boxed{S = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360°}}$$

Área da coroa circular

A **coroa circular** é a região compreendida entre duas circunferências concêntricas (de mesmo centro), que estão em um mesmo plano e têm as medidas de seus raios diferentes.



A área *S* de uma coroa circular é igual à diferença entre a área do círculo maior e a do círculo menor cujos raios medem *R* e *r*.

$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

$$\boxed{S = \pi(R^2 - r^2)}$$

Exercícios resolvidos

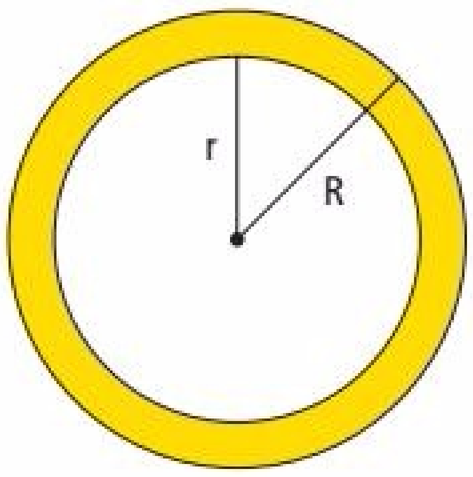
11 Uma piscina circular tem diâmetro interno de 9 m. Qual é a área do fundo dessa piscina? Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

Resolução

Se o diâmetro é 9 m, o raio é igual a: $d = 2r \Rightarrow 9 = 2 \cdot r \Rightarrow r = 4{,}5$ m.

A área do fundo da piscina é igual a: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \Rightarrow A = 63{,}585$ m².

12 Dois círculos concêntricos têm raios iguais a $R = 50$ cm e $r = 40$ cm, conforme indica a figura. Calcule a área da superfície colorida de amarelo. Considere $\pi \simeq 3$.



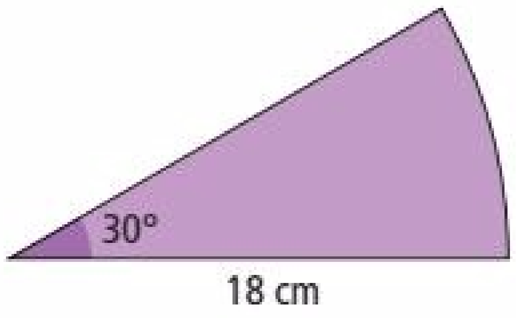
Resolução

A área da coroa circular é igual a:

$A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow A = 3(50^2 - 40^2) \Rightarrow A = 3(2\,500 - 1\,600) = 2\,700$

Portanto, $A = 2\,700$ cm².

13 Determine a área do setor circular da figura.



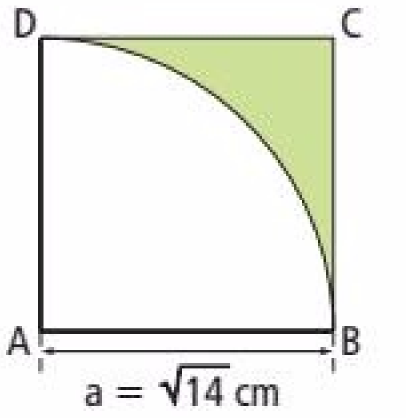
Resolução

Aplicando a fórmula $S = \dfrac{\alpha\pi R^2}{360°}$, com α em graus, temos:

$$S = \frac{30 \cdot \pi \cdot 18^2}{360}$$

Logo, $S = 27\pi\ \text{cm}^2$.

14 Na figura, ABCD é um quadrado e $\widehat{BD}$ é um arco de circunferência de centro *A*. Qual é a área da parte colorida de verde? Considere $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

A área da parte colorida de verde é igual à área do quadrado ABCD menos a quarta parte da área do círculo de raio *a*.

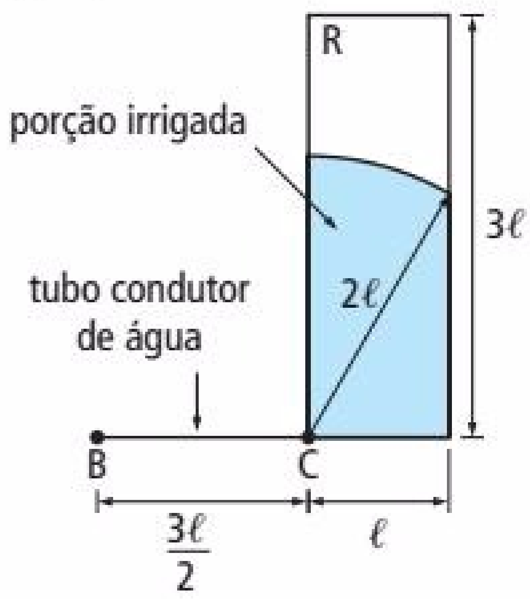
$$S_{\text{quadrado}} = a^2 \Rightarrow S_{\text{quadrado}} = \left(\sqrt{14}\right)^2 \Rightarrow S_{\text{quadrado}} = 14$$

$$\frac{S_{\text{círculo}}}{4} = \frac{\pi a^2}{4} \Rightarrow \frac{S_{\text{círculo}}}{4} = \frac{\frac{22}{7} \cdot 14}{4} \Rightarrow \frac{S_{\text{círculo}}}{4} = 11$$

$$S_{\text{fig.}} = S_{\text{quadrado}} - \frac{S_{\text{círculo}}}{4} = 14 - 11$$

Portanto, $S_{\text{fig.}} = 3\ \text{cm}^2$.

15 (UFES) Para irrigar uma região retangular *R* de dimensões $\ell \times 3\ell$, um irrigador giratório é acoplado a uma bomba hidráulica por meio de um tubo condutor de água. A bomba é instalada em um ponto *B*. Quando o irrigador é colocado no ponto *C*, a uma distância $\dfrac{3\ell}{2}$ do ponto *B*, ele irriga um círculo de centro *C* e raio 2ℓ (veja a figura).

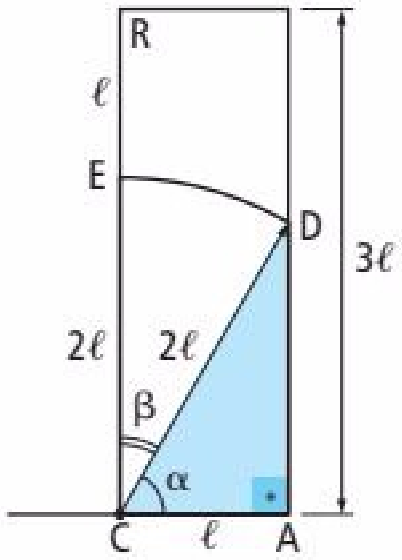


a) Calcule a área da porção irrigada de *R* quando o irrigador está no ponto *C*.

b) Admitindo que o raio da região irrigada seja inversamente proporcional à distância do irrigador até a bomba, calcule o raio da região irrigada quando o irrigador é colocado no centro da região retangular *R*.

Resolução

a)



No triângulo retângulo ACD, temos:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\ell}{2\ell} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Como $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, logo $\alpha = 60°$.

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow 60° + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 30°$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \text{sen}\,60° = \frac{AD}{2\ell} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{2\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \ell\sqrt{3}$$

A porção irrigada de *R* é formada por um setor circular de raio 2ℓ e ângulo central 30° mais um triângulo retângulo com catetos ℓ e $\ell\sqrt{3}$, ou seja:

$$A = \frac{\pi \cdot (2\ell)^2 \cdot 30°}{360°} + \frac{\ell \cdot \ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi \cdot 4\ell^2}{12} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\pi\ell^2 + 3\ell^2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{\ell^2}{6}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$$

b) Seja *r* o raio da região irrigada quando o irrigador é colocado no centro da região *R* (intersecção das diagonais). Nesse caso, a distância do irrigador até a bomba será $\dfrac{5\ell}{2}$ (hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos que medem 2ℓ e $1{,}5\ell$). Como o raio da região é inversamente proporcional à distância do irrigador até a bomba, temos:

$$r \cdot \frac{5\ell}{2} = 2\ell \cdot \frac{3\ell}{2} \Rightarrow r = \frac{6\ell}{5}$$

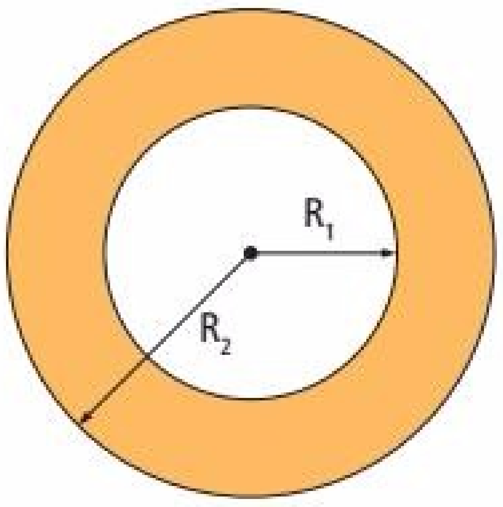
Exercícios propostos

Escreva no caderno

33. Qual é a medida do diâmetro de um círculo de área 100π dm^2? 20 dm

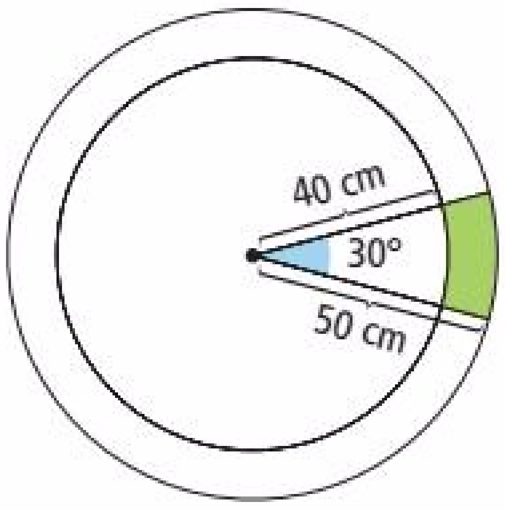
34. O jardim de uma praça no centro de uma cidade tem a forma semicircular com diâmetro medindo 15 m.
Qual é a área desse jardim? $28{,}125\pi$ m^2

35. Determine a área da região colorida de laranja da figura. (Dados: $R_1 = 3$ m, $R_2 = 5$ m.) $S = 16\pi$ m^2



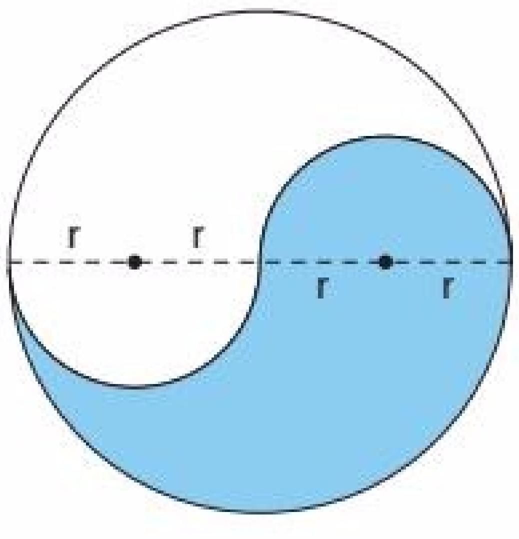
36. Dois círculos concêntricos têm raios iguais a 50 cm e 40 cm, conforme indica a figura.

Calcule a área da superfície colorida de verde. $S = 75\pi$ cm^2

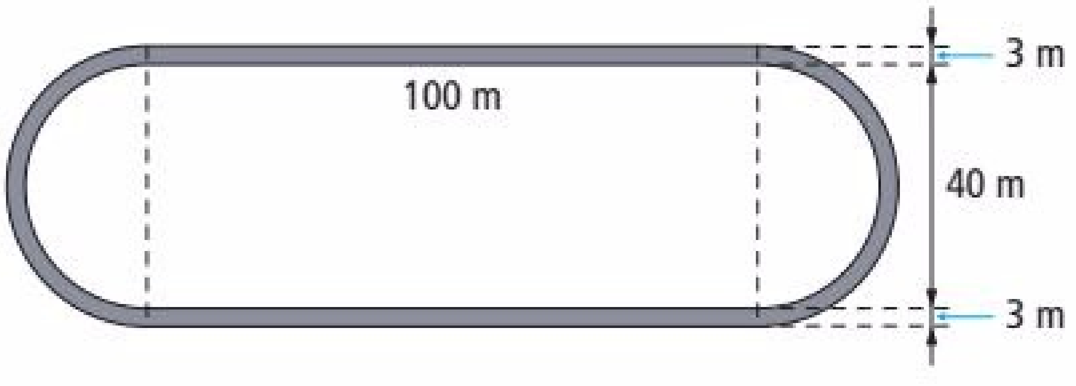


37. Calcule a área de um setor circular de amplitude 120°, em um círculo de diâmetro 30 cm. $S = 75\pi$ cm^2

38. Sabendo que $r = 10$ cm, calcule a área da região colorida de azul na figura. (Adote $\pi \simeq 3{,}14$.) $S = 628$ cm^2



39. Uma praça é formada de um retângulo de comprimento 100 m e largura 40 m e dois semicírculos com diâmetro coincidindo com o lado menor do retângulo.

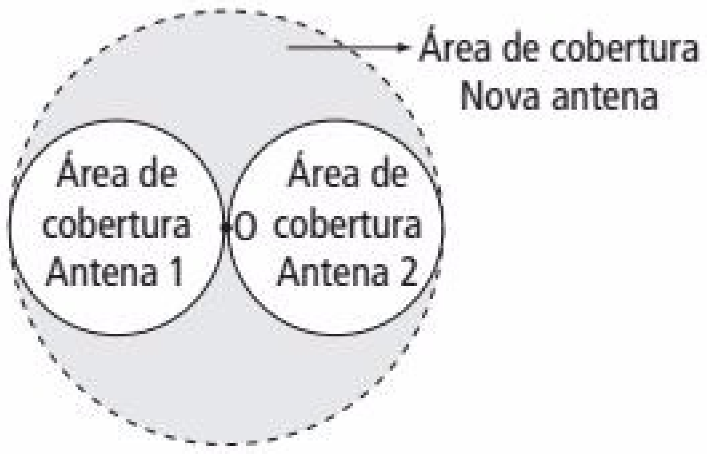


Ilustrações: Editoria de arte

Em torno da praça será construída uma calçada de 3 m de largura, cujo preço por metro quadrado é R$ 50,00. Calcule o custo total desse projeto. (Adote $\pi \simeq 3{,}14$.) R$ 50 253,00

40. Considere um triângulo equilátero inscrito em um círculo. Sabendo que as medidas do lado, da altura e da área desse triângulo formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, calcule a área desse círculo. $\frac{\pi}{3}$ unidades de área.

41. (Enem/MEC) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto *O*, como mostra a figura.



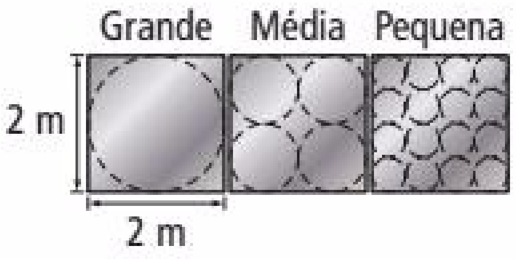
O ponto *O* indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.
Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

X a) 8π　b) 12π　c) 16π　d) 32π　e) 64π

42. (Insper-SP) Uma pizzaria vende pizzas circulares com 32 cm de diâmetro, divididas em 8 pedaços iguais. O dono do estabelecimento pensou em criar uma pizza de tamanho maior, a ser dividida em 12 pedaços iguais, de modo que a área de cada um deles seja igual à área de um pedaço da pizza menor. Para isso, o diâmetro da pizza de 12 pedaços deve ser aproximadamente igual a:

a) 36 cm　X b) 40 cm　c) 44 cm　d) 48 cm　e) 52 cm

43. (Enem/MEC) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



As sobras de material de produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II;
b) a entidade I recebe metade do material do que a entidade III;
c) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III;
d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III;
X e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

História da Matemática

Um pouco sobre a abrangência da Geometria

De uma forma simplista muitos consideram a Matemática englobando essencialmente a Geometria, a Álgebra e a Análise.

A Geometria é provavelmente a mais antiga das três áreas e surgiu, sem dúvida, da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos etc.

Análise: disciplina que engloba Álgebra e Geometria envolvendo estudo profundo de funções.

No início, pelo que se sabe, a Geometria era simplesmente uma coleção de conhecimentos práticos, como por exemplo, a fórmula aproximada da área *A* do círculo de diâmetro *d*, $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ conhecida dos egípcios desde o ano 1 500 antes de Cristo. Comparando-se com a expressão correta, $\frac{\pi d^2}{4}$ verifica-se que, essencialmente, a fórmula aproximada corresponde a adotar para π um valor da ordem de 3,16.

Os gregos realmente dispuseram-se a organizar a Geometria como uma ciência e trataram de ordenar os fatos geométricos procurando demonstrar certas proposições a partir de outras mais simples; culminaram nos anos 300 antes de Cristo com a publicação dos "Elementos" de Euclides.

Trata-se da primeira exposição dedutiva da Geometria Elementar de que se tem notícia, partindo de certos postulados ou axiomas que eram proposições simples representando uma certa evidência natural. Sobre os "Elementos", disse Einstein, numa certa ocasião: "Quem não soube entusiasmar-se por este livro em sua juventude, não nasceu para pesquisador teórico." Apesar das demonstrações de Euclides estarem cheias de apelos à intuição, utilizando postulados admitidos tacitamente, não se pode negar que seu trabalho constituiu-se, durante muitos séculos, em um modelo de apresentação matemática, com forte influência na cultura do ocidente. [...]

Fonte: OLIVA, W. M. A independência do axioma das paralelas e as Geometrias não Euclidianas. **Revista do Professor de Matemática** (RPM), São Paulo, n. 2, p. 28-31, 1 sem. 1983. Disponível em: < http://www.rpm.org.br/cdrpm/2/8.htm>. Acesso em: 4 maio 2016.

Atividades

Escreva no caderno

1. Segundo o texto, de qual necessidade prática nasceu a Geometria? Da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos etc.

2. Os egípcios conheciam uma fórmula para o cálculo aproximado da área de um círculo, desde o ano 1500 antes de Cristo. Com base nisso e em seus conhecimentos, faça no caderno o que se pede:

a) Obtenha o valor aproximado para a área de um círculo de diâmetro 3 cm, utilizando a fórmula elaborada pelos egípcios. $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(3 - \frac{3}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} \simeq 7,11 \Rightarrow A \simeq 7,11 \text{ cm}^2$

b) A expressão correta para a área do círculo em função do diâmentro é dada por $\frac{\pi d^2}{4}$. Obtenha a área do círculo em função do raio. $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (2r)^2}{4} = \pi r^2$

c) Calcule a área do círculo indicado no item **a**, utilizando a expressão correta para a área do círculo. Considere $\pi = 3,14$.

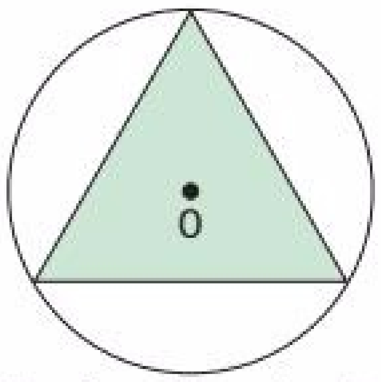
$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \simeq 7,065 \text{ cm}^2$ ou $A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \simeq 7,065 \Rightarrow A \simeq 7,065 \text{ cm}^2$

Polígonos regulares

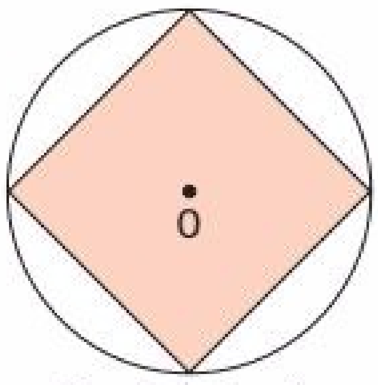
Um polígono é regular quando apresenta todos os seus lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes. Um fato bastante significativo é que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

A seguir, vamos estudar alguns polígonos regulares relacionando seus elementos com os da circunferência na qual ele está inscrito.

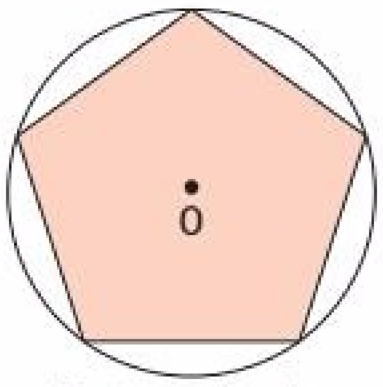
Observe, nas figuras abaixo, exemplos de polígonos regulares inscritos em circunferências.



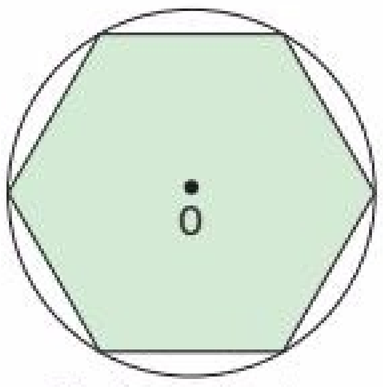
Triângulo equilátero inscrito



Quadrado inscrito



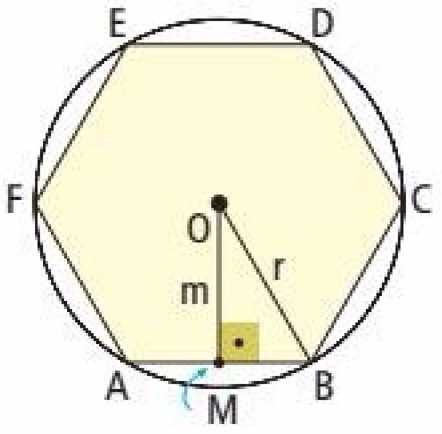
Pentágono inscrito



Hexágono inscrito

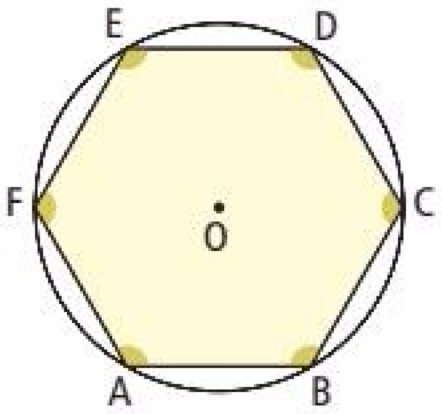
Ilustrações: Editoria de arte

Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência

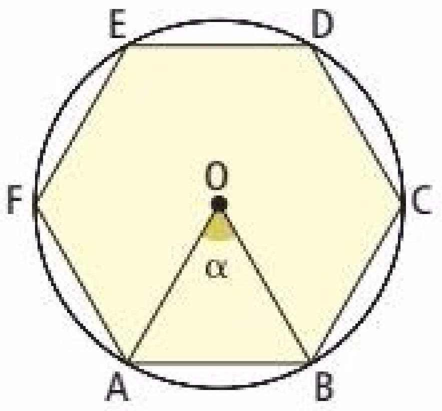


O centro *O* e o raio *r* da circunferência na qual o polígono regular está inscrito são denominados, respectivamente, **centro** e **raio** do polígono.

A distância *m* do centro *O* até o ponto médio *M* de um lado do polígono regular denomina-se **apótema** do polígono.



Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados **ângulos internos** do polígono. A medida de cada ângulo interno de um polígono de *n* lados é dada por $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.



Um ângulo α, cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono regular, é chamado **ângulo central** do polígono.

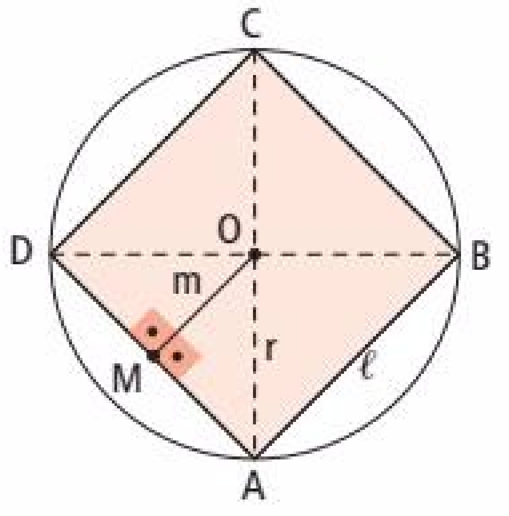
Sua medida é dada por $\frac{360°}{n}$, sendo *n* o número de lados do polígono.

Relações métricas nos polígonos regulares

Quando consideramos a medida ℓ do lado de um polígono regular, a medida *m* do apótema do mesmo polígono e a medida *r* do raio da circunferência na qual esse polígono está inscrito, podemos estabelecer relações métricas entre essas medidas.

Vamos estudar como obter essas relações no quadrado, no hexágono regular e no triângulo equilátero inscritos em uma circunferência.

Quadrado



Ilustrações: Editoria de arte

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOD, temos:

$$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \boxed{\ell = r\sqrt{2}}$$

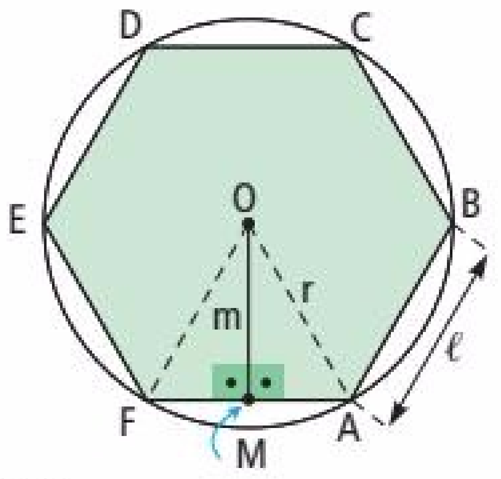
Observe na figura que:

$$m + m = \ell \Rightarrow 2m = \ell \Rightarrow m = \frac{\ell}{2}$$

Então:

$$\boxed{m = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

Hexágono regular



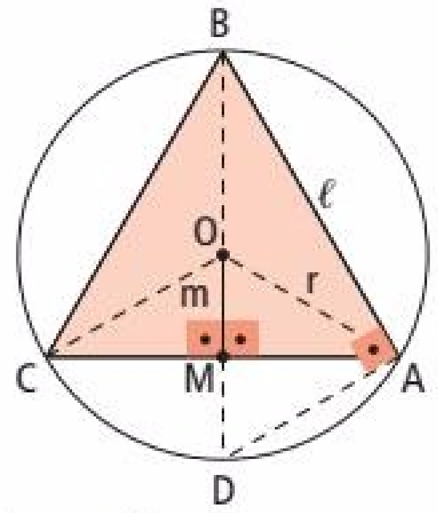
Observe que: • $F\hat{O}A = \frac{360°}{6} = 60°$ • $\overline{OA} \cong \overline{OF} \Rightarrow O\hat{F}A \cong O\hat{A}F$

Assim, $O\hat{F}A = O\hat{A}F = 60°$, pois $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$.

AOF é um triângulo equilátero, então: $\boxed{\ell = r}$

Como $\frac{FA}{2} = \frac{r}{2}$, então: $r^2 = m^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow \boxed{m = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$

Triângulo equilátero



Observe que $\overline{AD}$ é o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência, então AD = r. Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras:

$(BD)^2 = \ell^2 + (DA)^2 \Rightarrow (2r^2) = \ell^2 + r^2 \Rightarrow 4r^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \Rightarrow \boxed{\ell = r\sqrt{3}}$

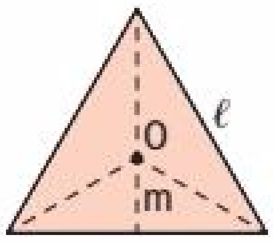
Agora, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMA, temos:

$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2 = r^2 - \frac{r^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow \boxed{m = \frac{r}{2}}$

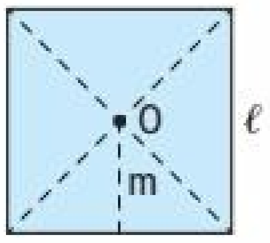
Área de um polígono regular

Vamos considerar os polígonos regulares a seguir, em que:

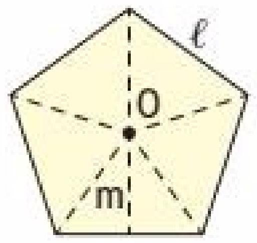
- ℓ → medida do lado;
- m → medida do apótema;
- O → centro do polígono;
- n · ℓ → perímetro (2p).



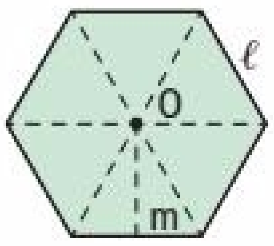
Triângulo equilátero



Quadrado



Pentágono regular



Hexágono regular

Ilustrações: Editoria de arte

Unindo o centro *O* de um polígono regular de *n* lados a cada um dos seus vértices, esse polígono fica decomposto em *n* triângulos isósceles congruentes.

Como a medida da altura de cada um desses triângulos é igual à medida do apótema do polígono, a área desse polígono é igual a *n* vezes a área do triângulo formado: $A = \frac{n \cdot \ell m}{2}$.

Como nℓ é a medida do perímetro do polígono, a área também pode ser expressa por:

$$A = \frac{2pm}{2} \Rightarrow \boxed{A = p \cdot m}$$

A área de um polígono regular de *n* lados é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema.

Exercícios resolvidos

16 Determine a área de um quadrado inscrito em uma circunferência de 5 dm de raio.

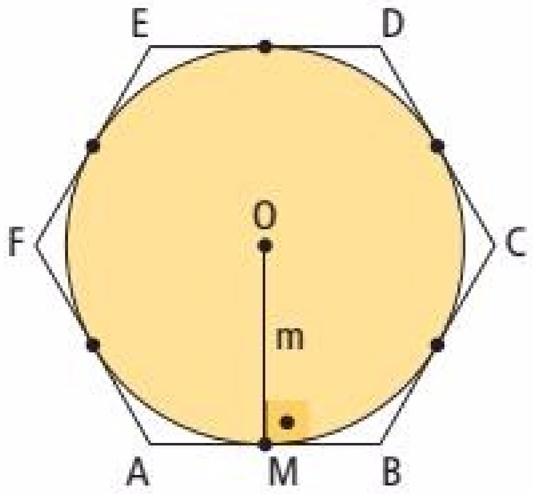
Resolução

$\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 5\sqrt{2}$ dm

$S = \ell^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$

Portanto, $S = 50$ dm².

17 Determinar o raio da circunferência inscrita no hexágono regular cujo lado mede 4 cm.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

O raio da circunferência inscrita em um polígono regular é igual à medida do apótema desse polígono.

Para o hexágono regular, temos: $\ell = r$ e $m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

De acordo com o enunciado, temos $\ell = r = 4$ cm.

$m = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Logo, o raio da circunferência inscrita mede $2\sqrt{3}$ cm.

18 Uma circunferência tem 10 cm de raio. Determine:

a) a medida do lado e a medida do apótema do quadrado inscrito na circunferência;

b) a medida do lado e a medida do apótema do hexágono regular inscrito na circunferência;

c) a medida do lado e a medida do apótema do triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Resolução

a) $\ell = r\sqrt{2}$

$\ell = 10\sqrt{2}$ cm

$m = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$

Logo, $m = 5\sqrt{2}$ cm.

b) $\ell = r \Rightarrow \ell = 10$ cm

$m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$

Logo, $m = 5\sqrt{3}$ cm.

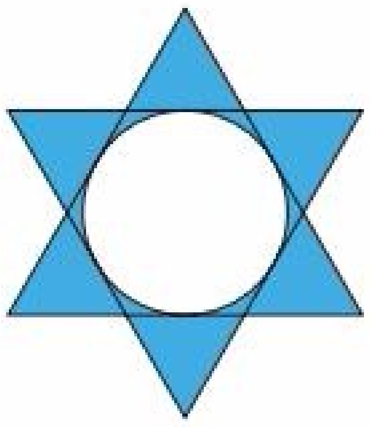
c) $\ell = r\sqrt{3}$

$\ell = 10\sqrt{3}$ cm

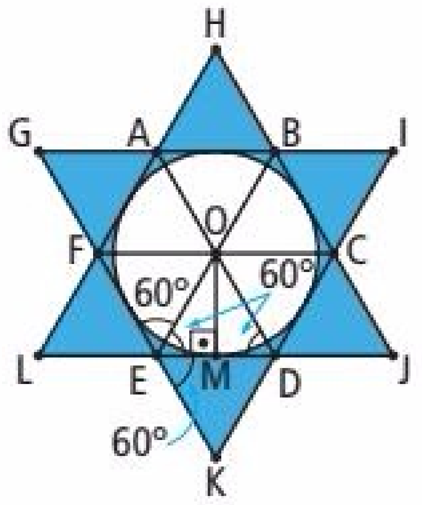
$m = \dfrac{r}{2} = \dfrac{10}{2}$

Logo, $m = 5$ cm.

19 (Mack-SP) Na figura, a circunferência está inscrita no hexágono regular de lado 2 cm. Adotando $\pi = 3$, determine a área da região sombreada.



Resolução



Com base no enunciado e observando a figura ao lado, podemos verificar a existência de 12 triângulos equiláteros, de lado 2 cm: ABH, BCI, CDJ, DEK, EFL, FAG, OAB, OBC, OCD, ODE, OEF e OFA.

Sendo *O* o centro da circunferência de raio *r* e considerando o triângulo retângulo OMD, temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{r}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{r}{2} \Rightarrow r = \sqrt{3}$

A área da região sombreada pedida pode ser obtida pela diferença entre a área dos 12 triângulos equiláteros e a área da circunferência de centro *O* e raio $\sqrt{3}$.

Logo: $A_{\text{sombreada}} = 12 \cdot A_{\text{triângulo equilátero}} - A_{\text{circunferência}} =$

$= 12 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} - \pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$

$A_{\text{sombreada}} = 12\sqrt{3} - 3\pi$

Como se adota $\pi = 3$, temos:

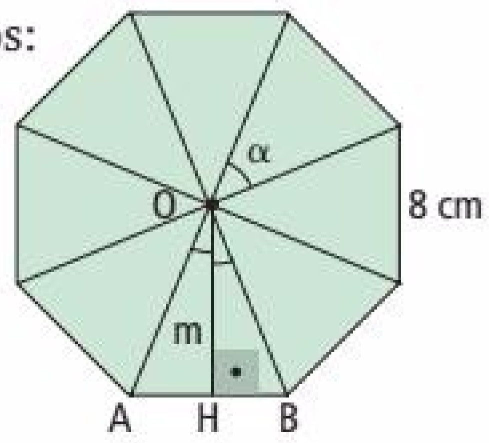
$A_{\text{sombreada}} = 12\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \Rightarrow A_{\text{sombreada}} = 12\sqrt{3} - 9$

Portanto, $A_{\text{sombreada}} = 3 \cdot \left(4\sqrt{3} - 3\right)\text{cm}^2$.

20 Calcule a área do octógono regular de lado igual a 8 cm. Use tg 22,5° = 0,4.

Resolução

Desenhando o octógono temos:



O ângulo central α mede:

$\alpha = \dfrac{360°}{8} = 45°$

Daí vem:

$\text{med}(A\hat{O}H) = \dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$

$\text{tg } 22{,}5° = \dfrac{AH}{m} \Rightarrow 0{,}4 = \dfrac{4}{m} \Rightarrow m = 10$ cm

O perímetro do octógono é igual a:

$2p = 8\ell \Rightarrow 2p = 8 \cdot 8 \Rightarrow 2p = 64 \text{ cm} \Rightarrow p = 32$ cm

Portanto, a área do octógono é igual a:

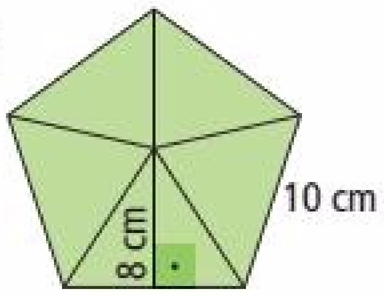
$A = p \cdot m = 32 \cdot 10 = 320$ cm²

Exercícios propostos

Escreva no caderno

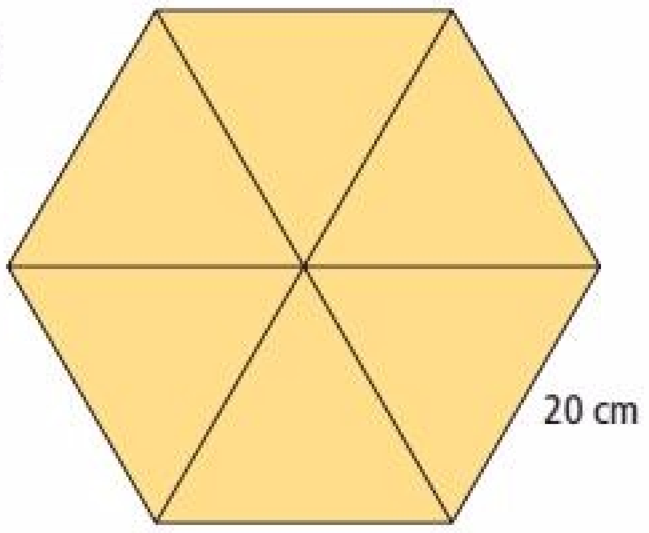
44. Calcule as áreas dos polígonos regulares representados abaixo:

a)



200 cm²

b)



$600\sqrt{3}$ cm²

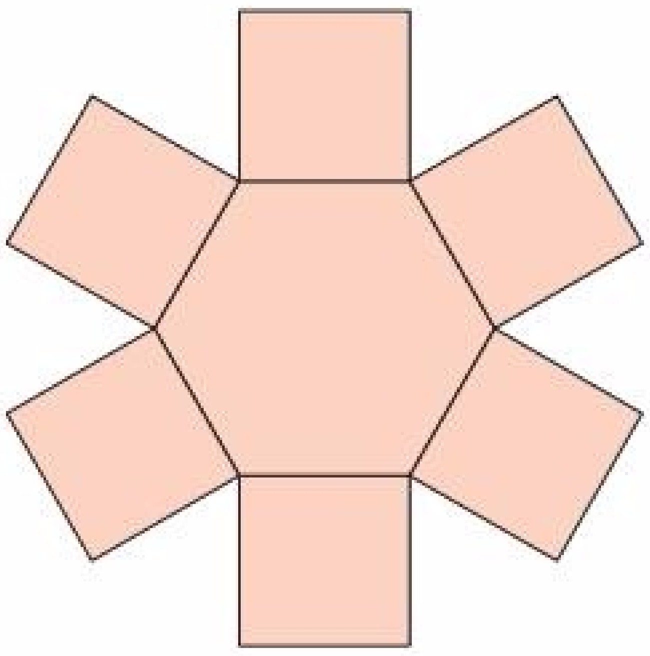
45. Um quadrado possui área igual a 225 dm². Qual é a área do pentágono regular que possui o perímetro igual ao do quadrado?

(Adote sen 36° ≃ 0,60.) 216 dm²

46. Na circunferência de raio 2 cm está inscrito um hexágono regular. Qual é a área desse polígono?

(Adote $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.) 10,38 cm²

47. A figura a seguir foi recortada de uma cartolina e é formada por um hexágono regular e seis quadrados. Cada lado do hexágono mede 10 cm.



Ilustrações: Editoria de arte

859,5 cm²

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, quantos centímetros quadrados de cartolina foram usados para fazer a figura?

48. Calcule a área de um triângulo equilátero, sabendo que seu apótema mede 3 cm. $27\sqrt{3}$ cm²

49. Dado um triângulo equilátero, cujo lado mede 6 cm, calcule:

a) o raio da circunferência circunscrita; a) $2\sqrt{3}$ cm

b) a medida do apótema. b) $\sqrt{3}$ cm

50. São dados dois quadrados: um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência. Determine a razão entre: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) os perímetros dos quadrados inscrito e circunscrito;

b) as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito. b) $\frac{1}{2}$

51. O apótema de um hexágono regular mede $6\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do seu lado; 12 cm

b) a sua área. $216\sqrt{3}$ cm²

52. Calcule a área de um hexágono regular cujo lado mede 6 cm. $54\sqrt{3}$ cm²

Razão entre áreas de figuras planas semelhantes

No volume 1 desta coleção estudamos a semelhança de triângulos e vimos algumas consequências dessa semelhança. Uma delas é que se a razão de semelhança entre dois triângulos é igual a *k*, então:

- a razão entre os perímetros também é *k*;
- a razão entre duas alturas homólogas também é *k*;
- a razão entre duas bissetrizes homólogas também é *k*;
- a razão entre as áreas é igual a k².

É possível demonstrar que essas consequências são válidas para quaisquer figuras planas semelhantes. Em especial, em relação às áreas, temos que:

A razão entre as áreas de duas figuras planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Exercício resolvido

21 Dois pentágonos regulares são tais que a medida do lado do primeiro pentágono é o dobro da medida do segundo. Sabendo que a área do primeiro pentágono é 200 cm², determine a área do segundo pentágono regular.

Resolução

Polígonos regulares de mesmo número de lados são sempre semelhantes entre si.

Sendo ℓ_1 a medida do lado do primeiro pentágono e ℓ_2 a medida do lado do segundo, temos:

$\ell_1 = 2\ell_2 \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 = k$ (razão de semelhança entre os lados)

Indicando por A_1 a área do primeiro pentágono e por A_2 a área do segundo, a razão entre as duas áreas deve ser igual ao quadrado de *k*. Logo:

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2 \Rightarrow \frac{200}{A_2} = 2^2 \Rightarrow \frac{200}{A_2} = 4 \Rightarrow A_2 = 50$$

Portanto, a área do segundo pentágono regular é igual a 50 cm².

Exercícios propostos

Escreva no caderno

53. Justifique se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:

"Se triplicarmos a medida do lado de um quadrado, então sua área também triplicará."

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

54. (Mack-SP) Um engenheiro fez a planta de um apartamento, de modo que cada centímetro do desenho corresponde a 50 centímetros reais. Então a área real de um terraço que tem 20 cm² na planta é, em metros quadrados, igual a:

a) 2

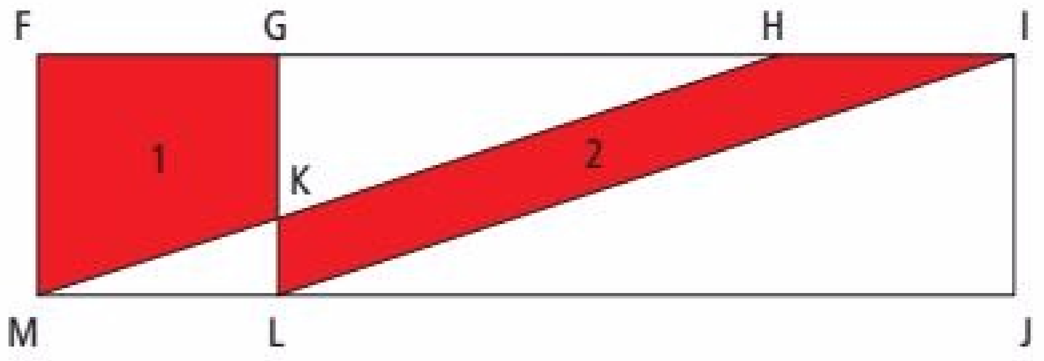
b) 4

c) 5

d) 8

x e) 10

55. (UFRN) Miguel pintará um painel retangular com motivos geométricos. As duas regiões destacadas, a região 1 (FGKM), contida no quadrado FGLM, e a região 2 (HILK), contida no paralelogramo HILM, conforme figura abaixo, serão pintadas de vermelho. Sabe-se que a tinta utilizada para pintar uma região qualquer depende proporcionalmente de sua área.



Se Miguel gastasse, na pintura da região 1, $\frac{3}{7}$ da tinta vermelha de que dispõe, poderíamos afirmar que:

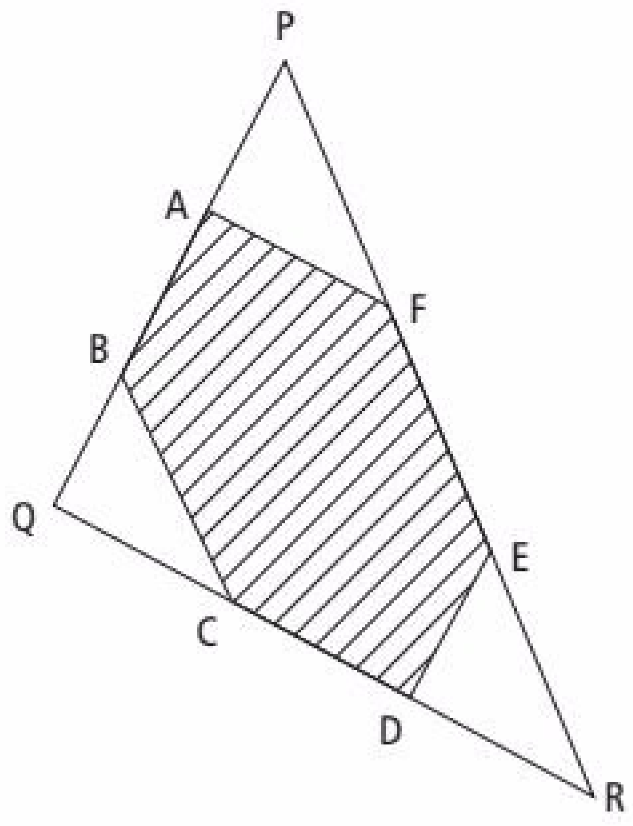
a) o restante de tinta vermelha daria, exatamente, para a pintura da região 2.

b) o restante de tinta vermelha seria insuficiente para a pintura da região 2.

c) a região 2 seria pintada e ainda sobrariam $\frac{3}{7}$ de tinta vermelha.

x d) a região 2 seria pintada e ainda sobraria $\frac{1}{7}$ de tinta vermelha.

56. (Unip-SP) PQR é um triângulo com 27 cm² de área. *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são pontos médios dos segmentos PB, AQ, QD, CR, RF e EP, respectivamente.



Ilustrações: Editoria de arte

A área da região hachurada, em centímetros quadrados, é:

a) 9

b) 12

c) 15

x d) 18

e) 21

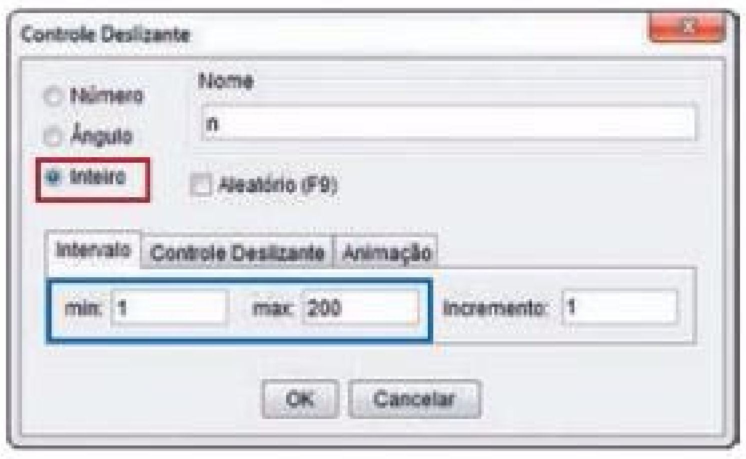
Explorando a tecnologia

Explorando polígonos inscritos na circunferência

De acordo com o que estudamos, a área de um polígono regular é o produto de seu apótema pelo semiperímetro (A = p · m). Vimos também que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

Utilizando essas informações, podemos elaborar um arquivo no GeoGebra em que é possível criar um polígono regular com tantos lados quanto desejarmos e, em seguida, o programa calcula o valor de sua área. Desse modo, podemos comparar o valor obtido com a fórmula acima. Para isso, siga o roteiro abaixo:

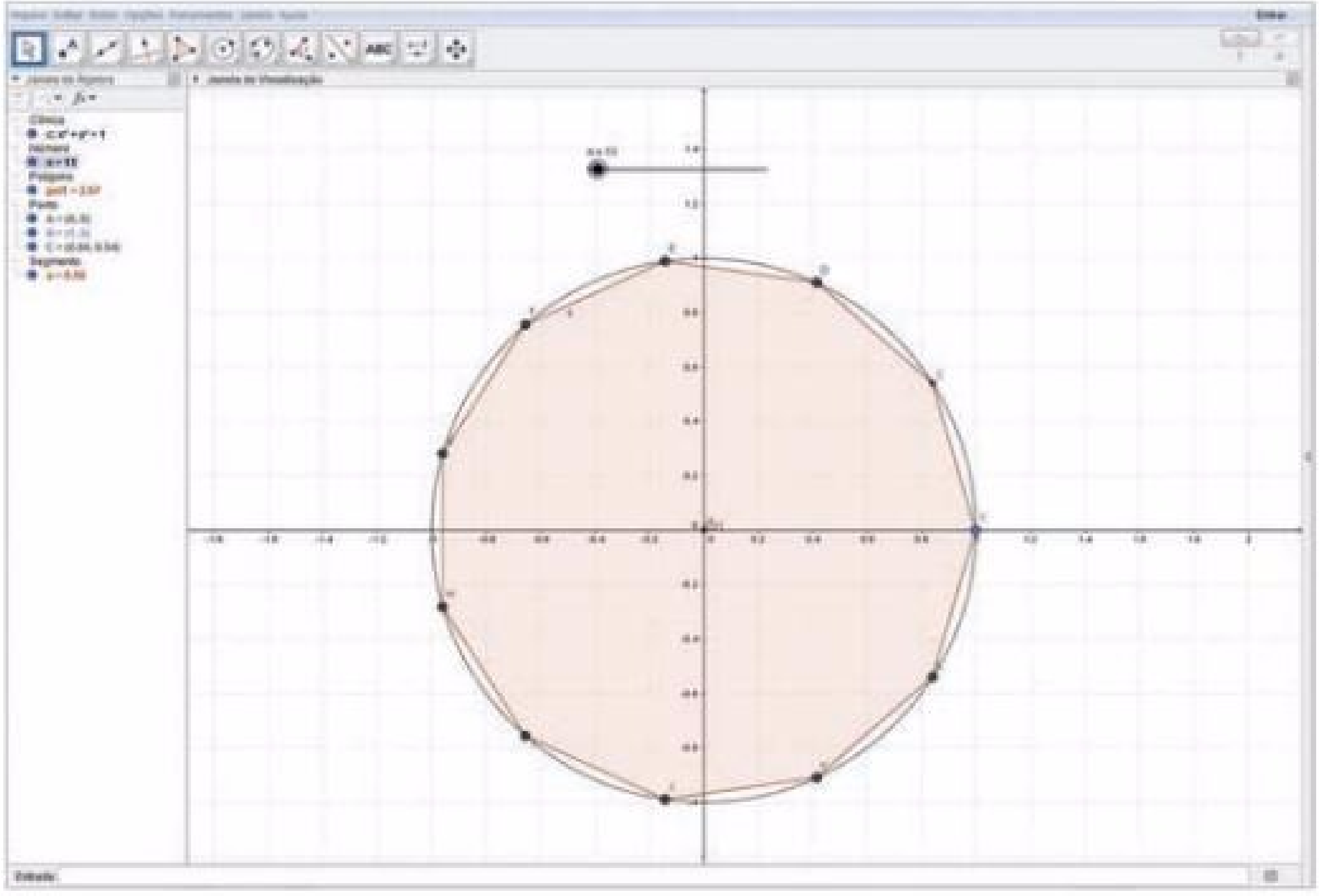
1. No **Campo de Entrada**, digite 'A=(0,0)' para criar o ponto *A*, de coordenadas (0, 0).
2. Em seguida, digite 'B=(1,0)', para criar o ponto B(1, 0).
3. Utilizando a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, , marque primeiro o ponto *A* e, depois, o ponto *B*. O programa fornecerá uma circunferência de raio 1 cujo centro é o ponto *A* e *B* é um de seus pontos.
4. Utilizando a ferramenta **Ampliar**, , clique sobre a circunferência até que ela se ajuste ao espaço disponível.
5. Crie um **Controle Deslizante** e nomeie como *n*. Na caixa de diálogo aberta, selecione a opção "Inteiro" (destaque em vermelho na Figura 1). Além disso, altere os valores "min:" e "máx" para 1 e 200, respectivamente (destaque em azul na Figura 1). Mantenha o incremento em 1. A Figura 1 ao lado indica os campos que devem ser alterados.



○ Número
○ Ângulo
● Inteiro
Nome: n
☐ Aleatório (F9)
min: 1
max: 200
Incremento: 1

6. Para evitar que o polígono fique muito grande à medida que aumentamos o valor de *n*, vamos limitar a medida do raio da circunferência em função do número de lados. Assim, digite 'C=(cos(2*pi/n),sen(2*pi/n))' no **Campo de Entrada** para criar o ponto *C*.
7. Mova o controle deslizante para n=3, de tal forma que o ponto *C* fique visível.
8. Utilizando a ferramenta **Polígono Regular**, , clique primeiro sobre o ponto *B* e, depois, em *C*. Para o número de lados, digite *n*. Assim o valor do controle deslizante *n* é que vai determinar o número de lados do polígono.

Observe que na **Janela de Álgebra** aparece um objeto chamado "pol1" e, ao lado, um número. Esse número representa a área do polígono inscrito construído.



Crédito de imagens: Geogebra

Atividades

Escreva no caderno

1. Durante a construção, definimos o intervalo do controle deslizante de 1 a 200. Explique o que acontece quando n = 1 e n = 2. Como os polígonos são definidos para n ⩾ 3 (sendo *n* o número de lados do polígono), ao colocar n = 1 ou n = 2 o programa não fornece uma construção.
2. O que acontece com o valor da área quando aumentamos o número de lados? A área também aumenta.
3. Ao definir n = 200, o polígono inscrito se parece com qual figura? O que podemos afirmar sobre o valor da área do polígono para esse caso? O polígono ficará muito parecido com um círculo. O valor da área é aproximadamente igual a 3,14, que é o valor da área do círculo de mesmo raio da circunferência construída.

CAPÍTULO 7

Geometria espacial de posição

No Ensino Fundamental você provavelmente estudou conceitos da Geometria plana e no capítulo anterior retomamos e aprofundamos alguns desses conceitos relacionados à área de figuras planas. Neste capítulo, estudaremos a Geometria espacial de posição, que é aquela que envolve elementos no espaço e suas relações.

As ideias da Geometria espacial de posição são utilizadas em diversas situações reais, por exemplo, na Engenharia e na Arquitetura, em que a elaboração de projetos estruturais envolve os conteúdos matemáticos dessa área da Matemática.

Noções primitivas

Na Geometria, as noções de **ponto**, **reta** e **plano** são aceitas sem definição e são chamadas de **noções primitivas**.

A seguir, mostramos como essas noções são representadas.

ponto A reta r plano α

Ilustrações: Editoria de arte

Essas representações são úteis para o estudo da Geometria, pois facilitam a visualização de alguns conceitos por meio de esquemas. No entanto, elas apenas dão uma ideia do que são esses conceitos geométricos uma vez que, na prática, eles não existem no mundo real. Apesar disso, alguns objetos do cotidiano lembram a forma das representações dessas noções primitivas. Assim, podemos dizer que o ponto final lembra um ponto, uma corda esticada lembra uma reta e uma folha de papel lembra um plano. Na Geometria, o ponto não tem dimensão, enquanto o ponto final tem dimensões, mesmo que pequenas. Da mesma maneira, a reta é ilimitada, ou seja, não tem começo nem fim e não tem espessura. O plano também não tem limite, ou seja, se estende em todas as direções e também não tem espessura.

Para dar nome aos pontos, usamos letras maiúsculas de nosso alfabeto; para as retas, usamos letras minúsculas; e, para os planos, letras gregas minúsculas.

Como dissemos anteriormente, as noções primitivas são aceitas sem definição. Todos os demais conceitos geométricos devem ser definidos com base nessas noções primitivas ou em outros conceitos já definidos anteriormente.

Ao longo deste capítulo, apresentaremos diversas afirmações, que podem ser divididas em três tipos:

- **Postulados** ou **axiomas**: são proposições que são aceitas sem necessidade de demonstração;
- **Definições**: são proposições feitas utilizando as noções primitivas ou definições anteriores;
- **Teoremas**: são proposições enunciadas a partir de postulados, que só têm validade se forem demonstrados, ou seja, validados com base em uma argumentação lógica.

Nesta coleção, não apresentaremos a demonstração de todos os teoremas enunciados, apenas os que julgarmos mais importantes ou cuja demonstração auxilie no entendimento de algum conteúdo.

Ainda a respeito dos teoremas, eles são usualmente constituídos de duas partes, a **hipótese** e a **tese**. A hipótese é o conjunto de afirmações que supomos verdadeiras e a tese é aquilo que queremos demonstrar como verdadeiro. A demonstração de um teorema é o raciocínio percorrido para se chegar da hipótese à tese. Geralmente, ao demonstrarmos um teorema, explicitaremos o que é a hipótese e o que é a tese.

Vamos agora iniciar os estudos da Geometria espacial, ou seja, a Geometria do espaço e, para isso, apresentamos a seguir a definição de **espaço** no contexto da Geometria.

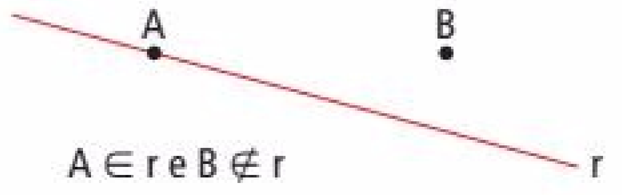
Espaço é o conjunto formado por todos os pontos.

Postulados

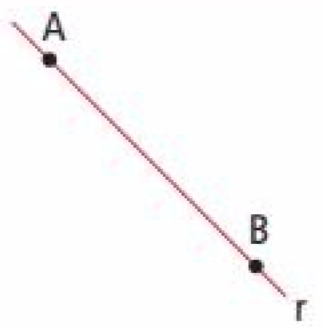
Vamos apresentar a seguir alguns postulados relacionados a pontos, retas e planos que serão utilizados no estudo da Geometria espacial.

Postulados da reta

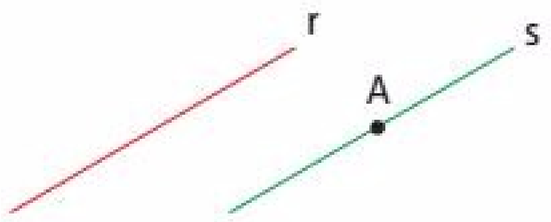
R$_1$: Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



R$_2$: Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.



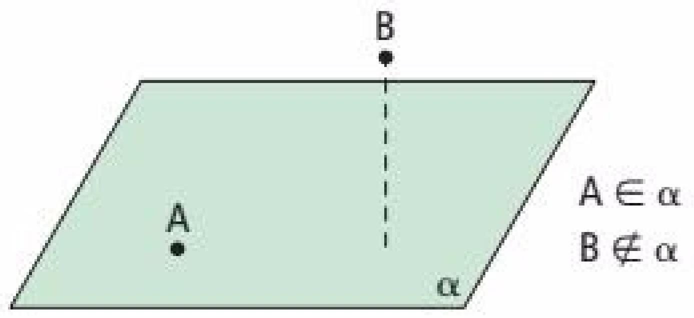
R$_3$: Por um ponto *A*, fora de uma reta *r*, passa uma única reta *s* paralela à *r*.



Esse postulado da reta Ò também é conhecido como postulado de Euclides.

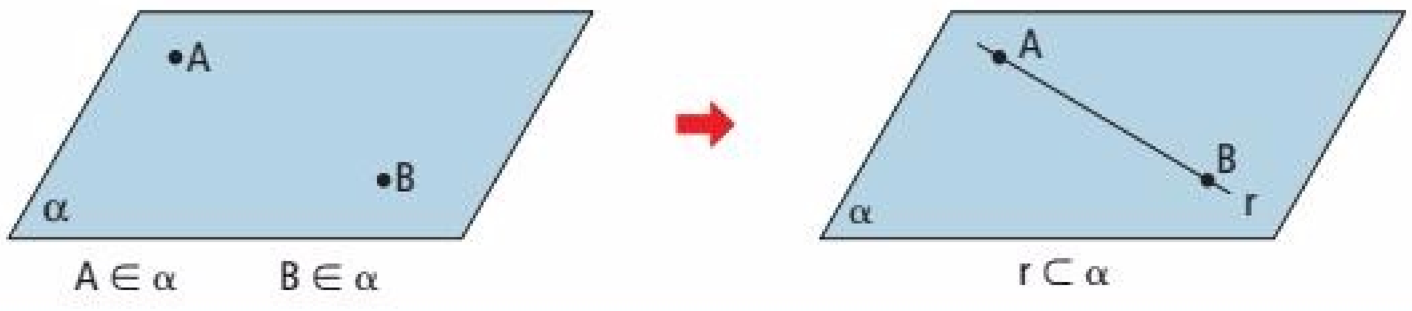
Postulados do plano

P$_1$: Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

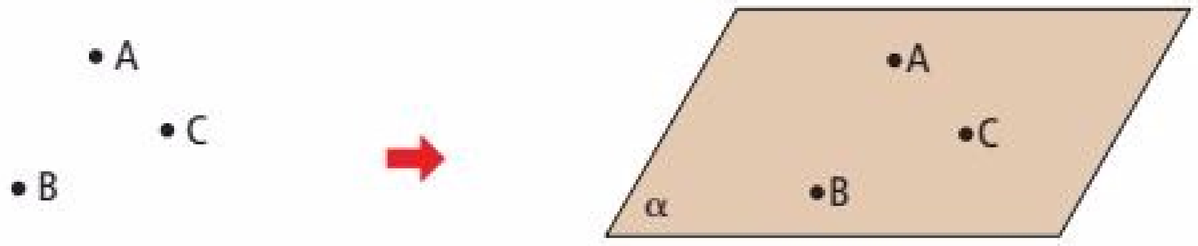


Ilustrações: Editoria de arte

P$_2$: Toda reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.



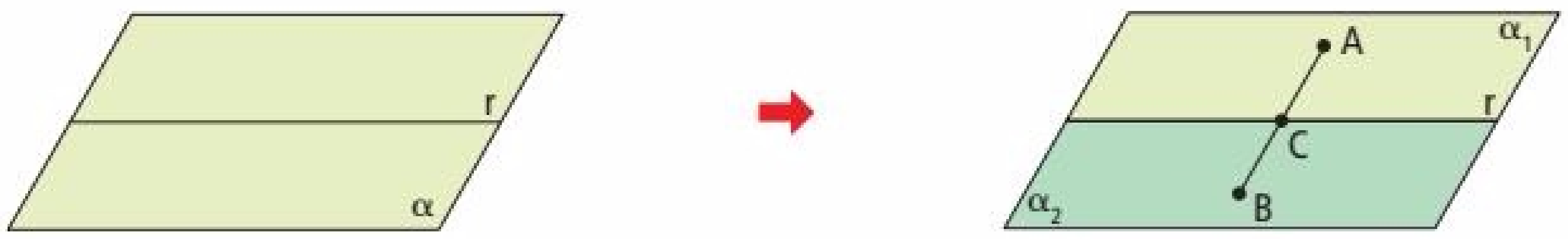
P$_3$: Três pontos não situados em uma mesma reta (não colineares) determinam um único plano.



A, *B* e *C* não colineares

plano α

P_4: Uma reta contida em um plano divide-o em duas regiões denominadas **semiplanos**.



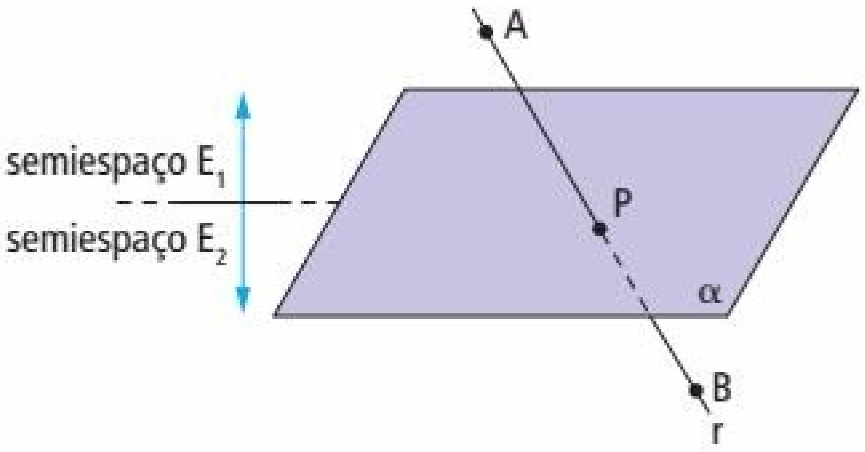
$r \subset \alpha$

α_1 e α_2: semiplanos de origem *r*

A reta *r* é considerada a **origem dos semiplanos** e os semiplanos α_1 e α_2 são ditos **opostos**.

Um segmento de reta que liga um ponto qualquer pertencente a α_1 a um ponto qualquer pertencente a α_2 tem um único ponto em comum com a reta *r*.

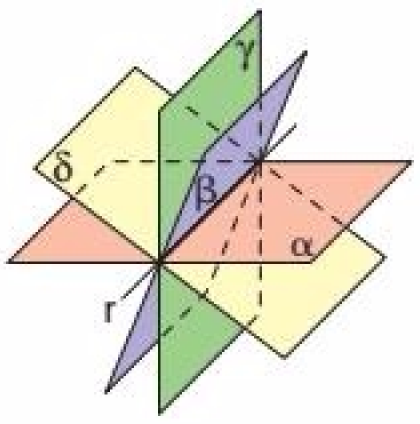
P_5: Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas **semiespaços**.



O plano α é considerado a **origem dos semiespaços**.

Uma reta determinada por dois pontos, um em cada semiespaço, intersecta necessariamente o plano.

P_6: Por uma reta passam infinitos planos.



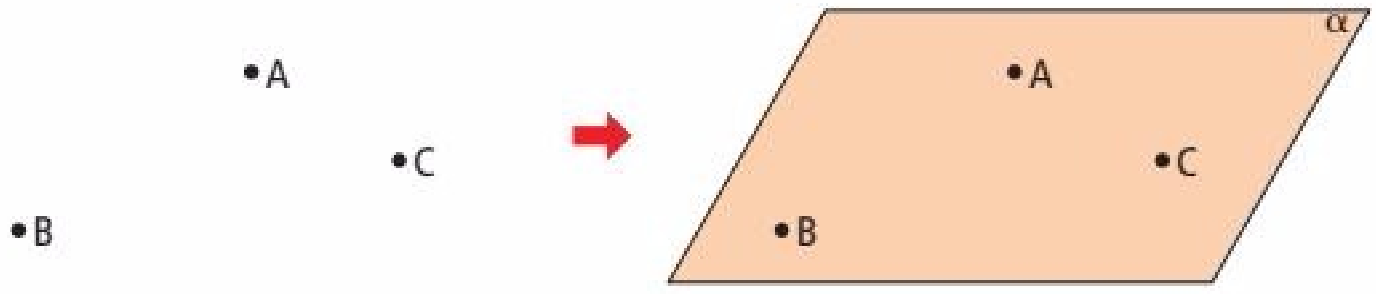
Ilustrações: Editoria de arte

Determinação do plano

Um plano pode ser determinado de quatro maneiras distintas. Acompanhe a seguir.

1ª) Pelo postulado P_3 do plano:

Três pontos distintos e não alinhados determinam um plano.



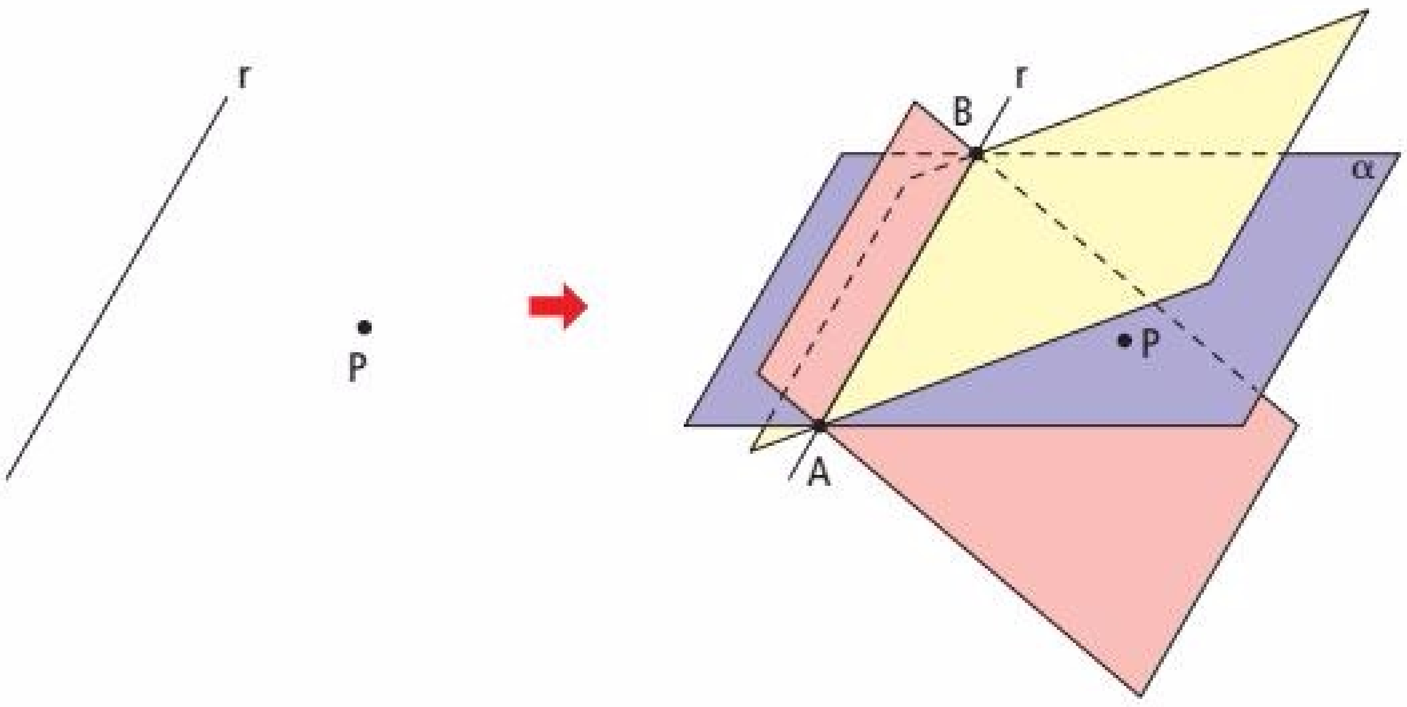
2ª) Pelo teorema a seguir:

Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

Demonstração

Sejam a reta *r* e um ponto *P* fora dela.

Pelo postulado P_6, há uma infinidade de planos que contêm a reta *r* determinada pelos pontos *A* e *B* (postulado R_2 da reta). De todos esses planos, o único que contém o ponto *P*, exterior à reta *r*, é o plano α, porque *A*, *B* e *P* são três pontos não alinhados (postulado P_3 do plano).

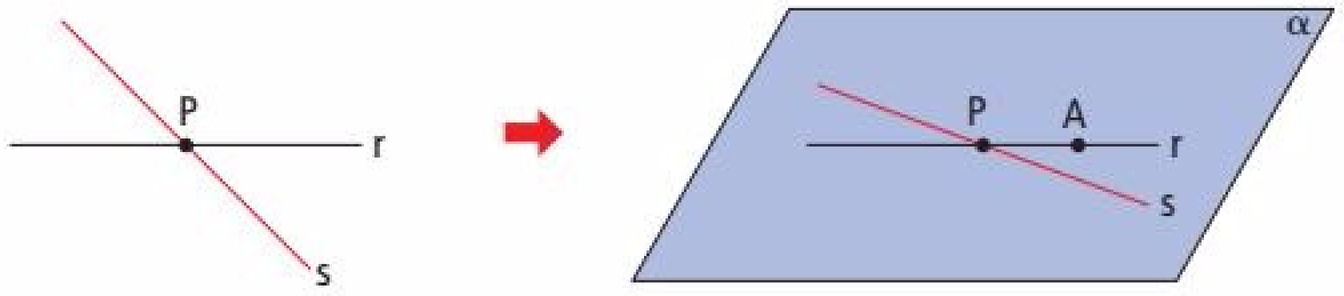


3ª) Pelo teorema a seguir:

Duas retas concorrentes determinam um plano.

Demonstração

Sejam duas retas r e s concorrentes no ponto P. Considerando um ponto A sobre a reta r, distinto do ponto P, sabemos pelo teorema anterior que a reta s e o ponto A, exterior a s, determinam um plano α. Esse plano α contém a reta r por estarem nele situados os pontos P e A da mesma reta (postulado P_2 do plano).



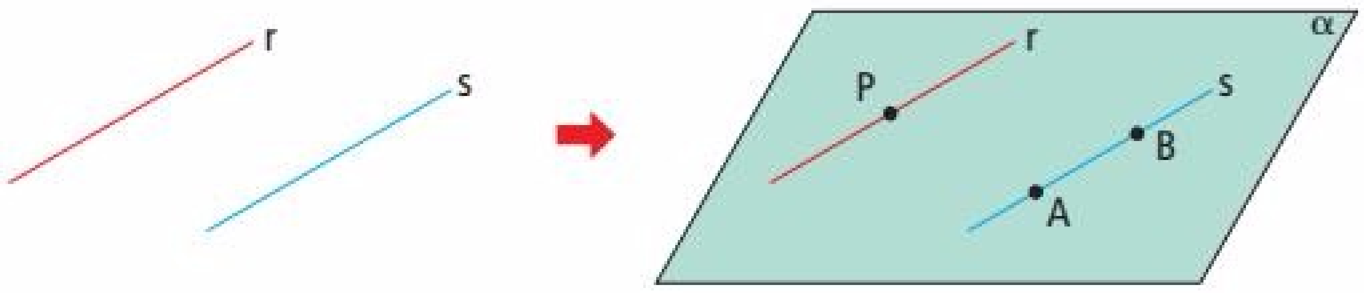
Ilustrações: Editoria de arte

4ª) Pelo teorema a seguir:

Duas retas paralelas determinam um plano.

Demonstração

Sejam as retas paralelas s e r.
Considerando um ponto P em r e dois pontos A e B distintos em s, determinamos o plano α porque P, A e B são três pontos não alinhados (postulado P_3 do plano).



Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Responda:

a) Quantas retas estão contidas em um plano? Um plano contém infinitas retas.

b) Uma reta r de um plano α divide-o em duas regiões. Como são chamadas essas regiões? Uma reta divide um plano em dois semiplanos.

c) O que é espaço? Espaço é o conjunto de todos os pontos.

d) No espaço existem quantas retas? E quantos planos? No espaço existem infinitas retas e infinitos planos.

e) Um plano α divide o espaço E em dois semiespaços, E_1 e E_2. Uma reta que passa de E_1 para E_2 intersecta necessariamente o plano α? Sim.

2. Responda:

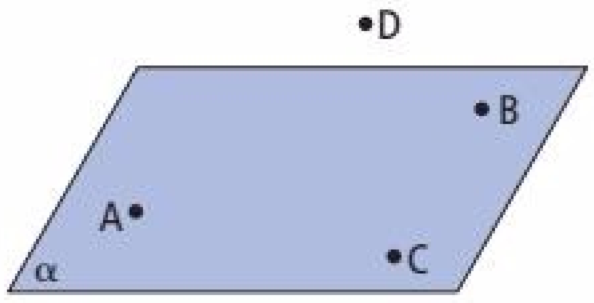
a) Quantos planos passam por uma reta? Infinitos.

b) Como podemos determinar um plano? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

c) Quando três pontos distintos determinam um plano? Quando não estiverem alinhados.

d) Três pontos que são vértices de um triângulo determinam um único plano? Sim.

e) Quantos são os planos determinados pelos pontos A, B, C e D da figura a seguir? Quatro.



3. Responda:

a) Quantos pontos existem em uma reta? E fora dela? Infinitos; infinitos.

b) Dado um ponto P, existem quantas retas que o contêm? Infinitas.

c) Dados dois pontos A e B distintos, quantas retas são determinadas por esses pontos? Uma.

d) Quantos pontos existem em um plano? E fora dele? Infinitos; infinitos.

e) Seja uma reta r que tem dois pontos distintos em um plano α. Pode-se dizer que a reta r está inteiramente contida no plano α? Sim.

4. Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas paralelas entre si? Um ou três.

5. Quantos são os planos determinados por quatro pontos, dois a dois, distintos entre si? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

6. Sabendo que, no plano, duas retas distintas são tangentes a uma mesma circunferência, classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas:

a) As retas são necessariamente concorrentes. F

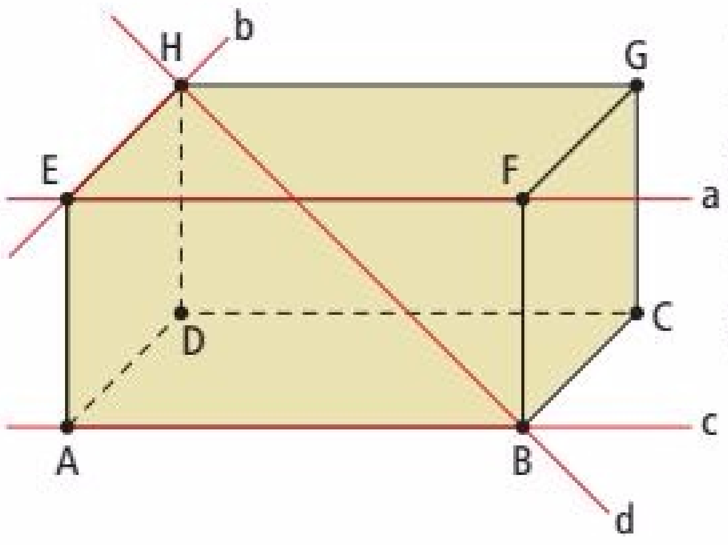
b) As retas são necessariamente paralelas. F

c) As retas não podem ser concorrentes. F

d) As retas podem ser paralelas. V

Posições relativas

Posições relativas de duas retas no espaço



Ilustrações: Editoria de arte

A figura ao lado representa um bloco retangular em que destacamos as retas *a*, *b*, *c* e *d*.

Nessa figura, podemos observar que:

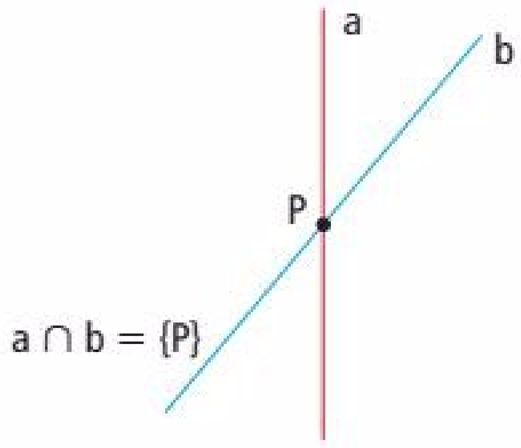
- as retas *a* e *b* estão contidas no plano determinado pelos pontos *E*, *F* e *G*;
- as retas *b* e *c* não estão contidas em um mesmo plano.

Duas retas são **coplanares** quando existe um plano que as contém. Por exemplo: *a* e *b*; *a* e *c*.

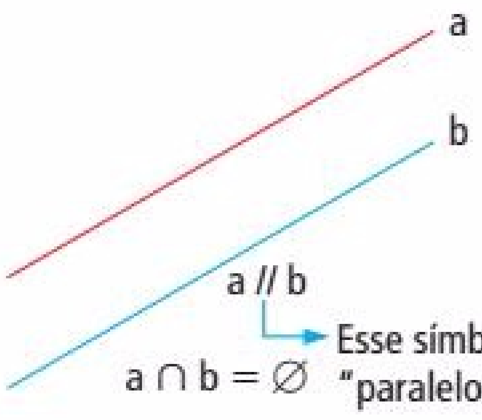
Duas retas são **reversas** quando não existe um plano que as contém. Por exemplo: *b* e *c*; *a* e *d*.

Duas retas coplanares podem ser:

- **concorrentes:** quando as retas têm apenas um ponto comum.
- **paralelas:** quando as retas não têm ponto comum.
- **coincidentes:** quando as retas têm todos os pontos comuns.

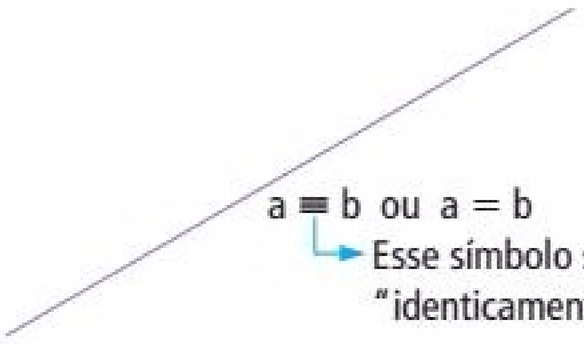


a ∩ b = {P}



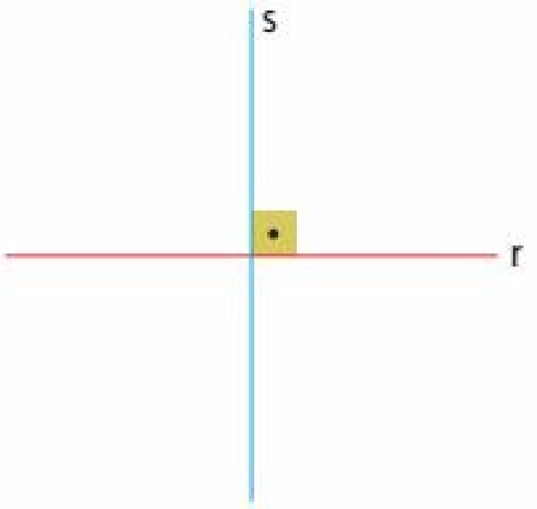
a // b → Esse símbolo significa "paralelo a".

a ∩ b = ∅

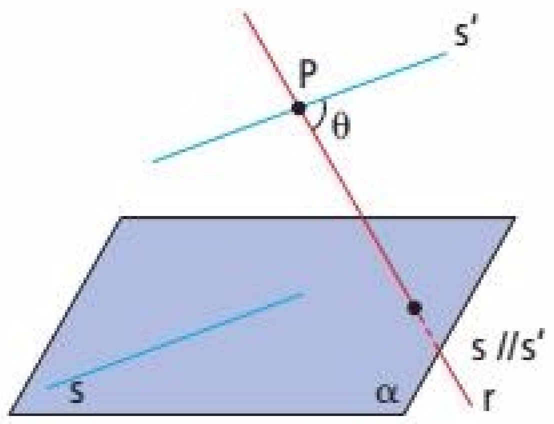


a ≡ b ou a = b → Esse símbolo significa "identicamente igual a".

Quando duas retas concorrentes formam entre si um ângulo de 90°, são chamadas de **perpendiculares**.



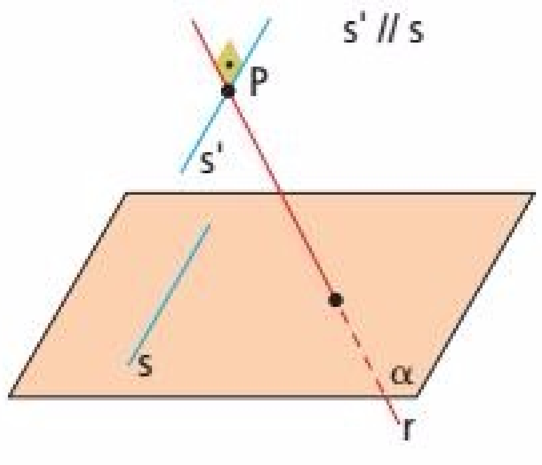
r ⊥ s → Esse símbolo significa "perpendicular a".



Quando duas retas concorrentes formam um ângulo diferente de 90°, são chamadas de **oblíquas**.

Agora vamos ver o que acontece com retas reversas. Sejam *r* e *s* duas retas reversas. Consideremos sobre a reta *r* um ponto *P* e por ele tracemos a reta *s'*, paralela à reta *s*, como mostra a figura ao lado. O ângulo θ formado pelas retas *r* e *s'* é, por definição, o ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s*. Esse ângulo não depende do ponto *P* escolhido.

Quando essas retas formam um ângulo de 90°, são chamadas **ortogonais**.

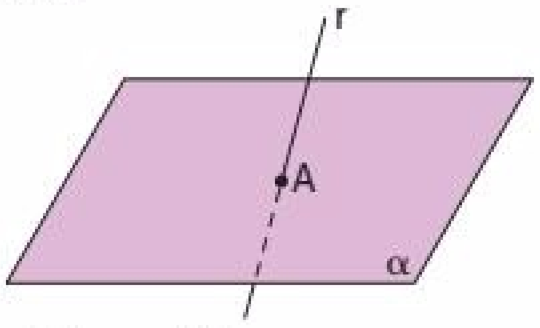


r e *s* são ortogonais

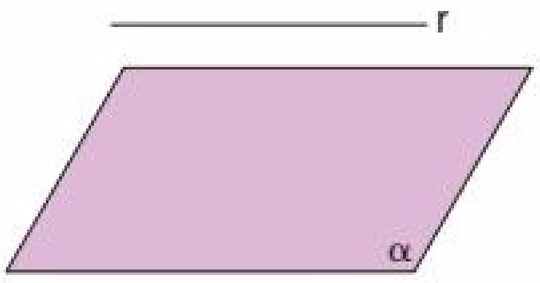
Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

Uma reta *r* e um plano α podem ocupar, no espaço, as seguintes posições relativas:

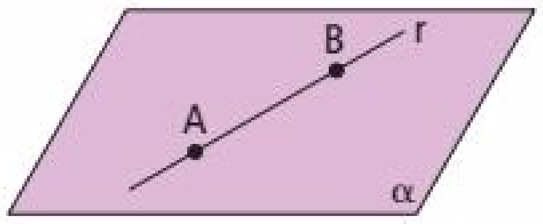
- ***r* e α são secantes ou concorrentes:** quando a reta *r* e o plano α têm um único ponto em comum.
- ***r* é paralela a α:** quando a reta *r* e o plano α não têm ponto em comum.
- ***r* está contida em α:** quando a reta *r* e o plano α têm mais de um ponto em comum.



$r \cap \alpha = \{A\}$



$r \cap \alpha = \varnothing$

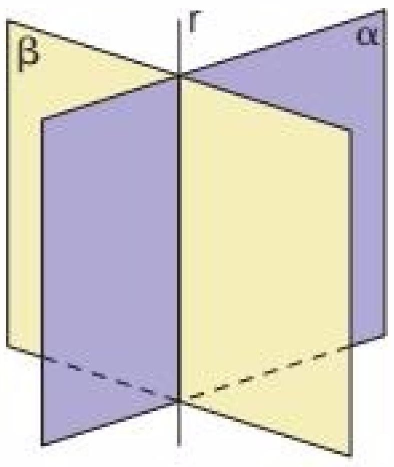


$r \subset \alpha$

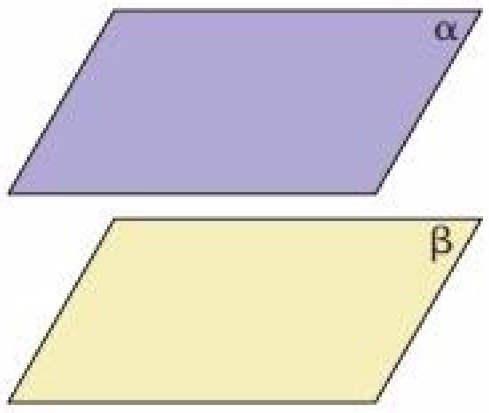
Posições relativas de dois planos no espaço

Dois planos α e β podem ocupar, no espaço, as seguintes posições relativas:

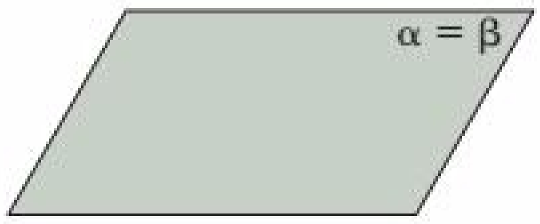
- **α e β são concorrentes ou secantes:** quando o plano α e o plano β têm uma única reta em comum.
- **α e β são paralelos:** quando o plano α e o plano β não têm ponto em comum.
- **α e β são coincidentes:** quando o plano α e o plano β têm mais de uma reta em comum (3º e 4º casos da determinação do plano).



$\alpha \cap \beta = r$



$\alpha \cap \beta = \varnothing$



$\alpha = \beta$ ou $\alpha \equiv \beta$

Podemos observar que dois planos não podem ter apenas um ponto em comum.

Exercício resolvido

1 Considere as retas *r*, *s* e *t* distintas, tais que $s \perp r$ e $t \perp r$. Relativamente às retas *s* e *t*, podemos afirmar que:

I. Elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
II. Elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
III. Elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
IV. Elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
V. Elas podem ser unicamente reversas.

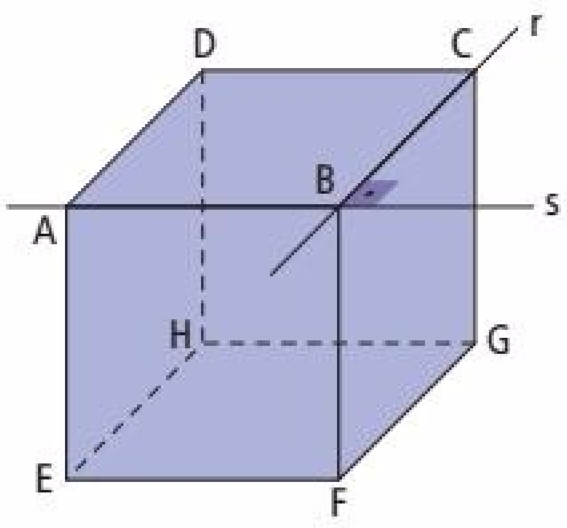
Qual dessas afirmações é verdadeira?

Resolução

No cubo ABCDEFGH, representado na figura ao lado, sejam *r* a reta que passa por *B* e *C*, que indicaremos por $\overleftrightarrow{BC}$, e *s* a reta que passa por *A* e *B*, que indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$. Note que $s \perp r$. Nas condições do enunciado, podemos ter:

- $t = \overleftrightarrow{CD}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e $s \,//\, t$.
- $t = \overleftrightarrow{BF}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e *s* e *t* são retas concorrentes.
- $t = \overleftrightarrow{CG}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e *s* e *t* são retas reversas.

Portanto, a afirmação verdadeira é a IV.

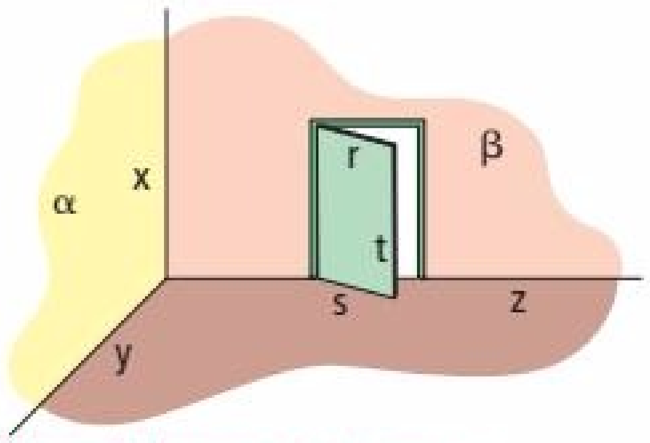


Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios propostos

Escreva no caderno

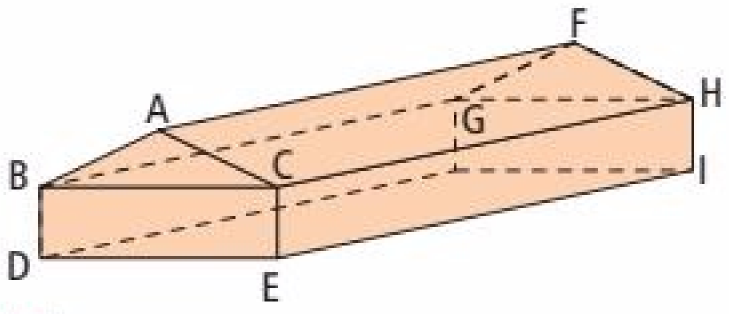
7. A figura ao lado mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



a) Que posições relativas têm as retas r e s; s e t; x e r; y e t? Paralelas; perpendiculares; reversas e reversas.

b) Que posições relativas têm a reta t e o plano α? E a reta r e o plano β? Paralelos e secantes.

8. Dada a figura, identifique:



Respostas possíveis:

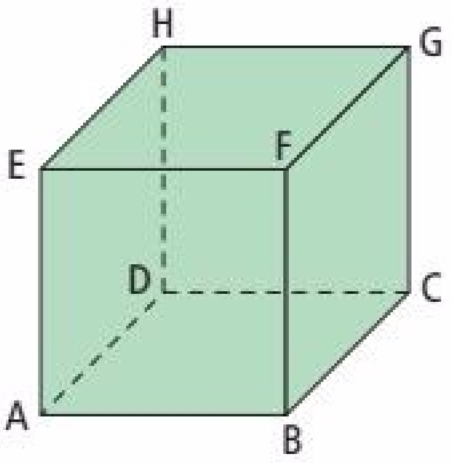
a) um par de retas reversas; $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EI}$

b) um par de retas coplanares; $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$

c) dois pares de retas concorrentes; $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

d) dois pares de retas paralelas. $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$

9. A figura a seguir representa um cubo.



Observando-a, responda:

a) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$? Perpendiculares.

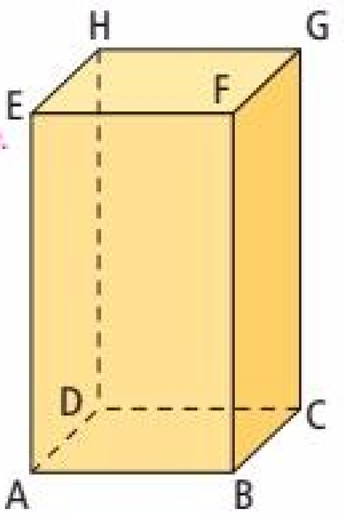
b) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$? Reversas ortogonais.

10. É possível existirem dois planos distintos com um único ponto comum? Não.

11. Considere um ponto M de um plano α e uma reta r, secante a α, que o "fura" em um ponto distinto de M. Verifique se a frase a seguir é verdadeira ou falsa.

"Existem infinitas retas contidas em α que passam pelo ponto M e pelo ponto de intersecção de r e α."
Falsa.

12. Observando a figura seguinte, responda:



a) Qual é a posição da reta BF em relação ao plano (ABC) da base? Secante.

b) Qual é a posição da reta CD em relação ao plano (ABC) da base? Está contida.

c) Qual é a posição da reta FG em relação ao plano (ABC) da base? Paralela.

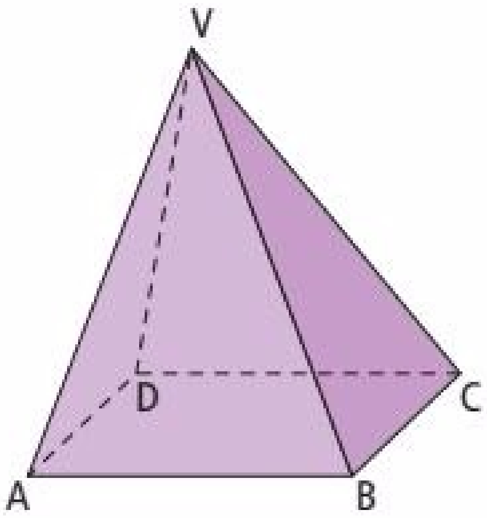
d) Qual é a posição da reta CG em relação ao plano (BCF)? Está contida.

e) Qual é a posição da reta AE em relação ao plano (EFG)? Secante.

f) Qual é a posição da reta DH em relação ao plano (ACG)? Paralela.

13. c) Não há planos paralelos na figura.

13. Observando a figura abaixo, responda:



Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual é a posição relativa entre os planos (VAB) e (VBC)? Os planos são secantes.

b) Qual é a intersecção dos planos (ABC) e (VBC)? É a reta BC.

c) Há planos paralelos na figura?

d) Qual é a posição relativa dos planos (VAD) e (VBC)? São planos secantes.

14. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas.

a) Um plano fica determinado por duas retas paralelas distintas. Verdadeira.

b) Por um ponto do espaço existe uma única reta paralela a uma reta dada. Verdadeira.

c) Toda reta não contida num plano e paralela a uma reta contida nesse plano é paralela ao plano. Verdadeira.

d) Por um ponto não pertencente a um plano existe uma única reta paralela a esse plano. Falsa.

e) Se duas retas são paralelas, então todo o plano secante a uma delas também é secante à outra. Verdadeira.

15. Indique a proposição falsa:

a) Se dois planos são paralelos distintos, então toda reta de um deles é paralela ou reversa a qualquer reta do outro.

b) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.

X c) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

d) Se duas retas concorrentes de um plano são paralelas de outro plano, então os dois planos são paralelos.

e) Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

16. Quais das proposições a seguir são corretas?

I. Dois planos que possuem três pontos em comum são coincidentes. Falsa.

II. Se duas retas, r e s, no espaço, são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas. Falsa.

III. Se dois planos, α e β, são concorrentes, então α e β têm infinitos pontos comuns. Verdadeira.

IV. Se duas retas, r e s, são paralelas a um plano α, então r e s são paralelas. Falsa.

Paralelismo no espaço

Estudamos as posições relativas de duas retas, de uma reta e um plano e de dois planos. Em alguns desses casos, falamos a respeito de paralelismo no espaço. Vamos retomar essas ideias:

- Duas retas coplanares são paralelas quando não têm ponto em comum;
- Uma reta é paralela a um plano quando não têm ponto em comum;
- Dois planos são paralelos quando não têm ponto em comum.

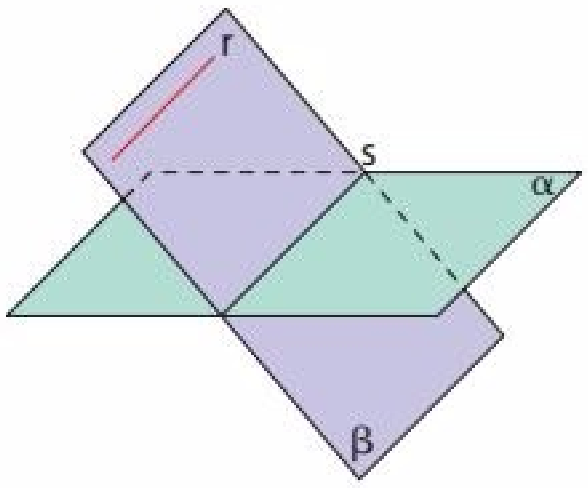
A seguir, apresentaremos alguns teoremas relacionados ao paralelismo que se destacam no estudo da Geometria espacial e suas aplicações.

Teoremas do paralelismo

Para demonstrar os teoremas a seguir, utilizaremos uma técnica denominada **demonstração por absurdo**. Ela consiste em admitir que a negação da tese é verdadeira e, utilizando argumentos lógicos, concluir algo que contraria um ou mais elementos da hipótese ou um dos postulados apresentados. Como a hipótese é o que supomos verdadeiro e os postulados são admitidos como verdadeiros, chegamos a uma contradição e temos que a negação da tese é falsa, ou seja, a tese é verdadeira e o teorema está demonstrado. A teoria matemática que valida essa técnica pertence ao campo da Lógica.

Teorema 1: Se uma reta *r* é paralela a um plano α e se um plano β contém *r* e é secante a α, segundo uma reta *s*, então as retas *r* e *s* são paralelas.

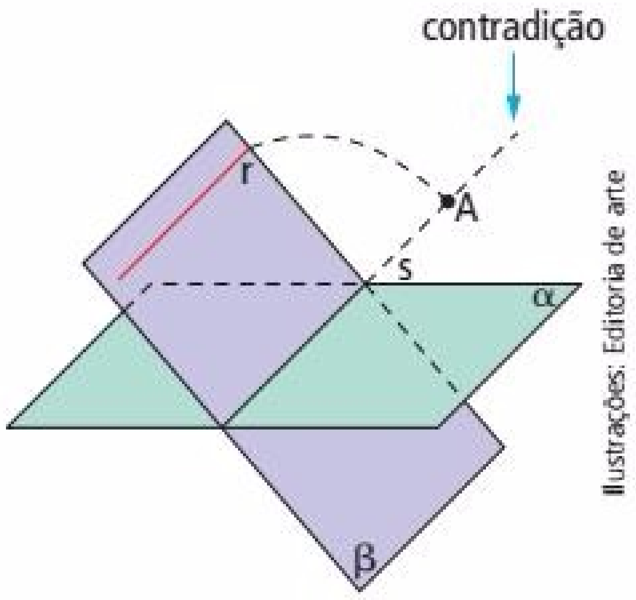
$$\textbf{Hipótese}\begin{cases} r \parallel \alpha \\ \beta \text{ contém } r \\ \alpha \cap \beta = s \end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese}\ \{ r \parallel s$$



Demonstração

Para realizar a demonstração por absurdo, vamos admitir que a negação da tese seja verdadeira, isto é, *r* não é paralela a *s*. Se isso fosse verdade, como *r* e *s* estão contidas no plano β, elas seriam retas concorrentes e teriam um ponto *A* em comum. Mas como $s \subset \alpha$, o ponto *A* pertenceria a *r* e a α, o que contraria a hipótese $r \parallel \alpha$.

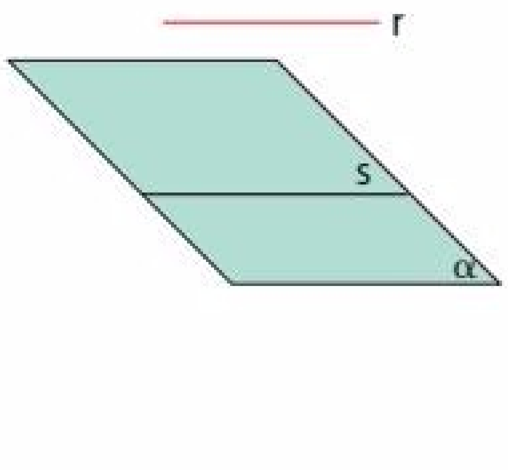
Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que *r* não é paralela a *s* é falsa. Portanto, *r* é paralela a *s*.



Ilustrações: Editoria de arte

Teorema 2: Se uma reta *r*, não contida em um plano α, é paralela a uma reta *s*, contida em α, então *r* e α são paralelos.

$$\textbf{Hipótese}\begin{cases} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \parallel s \end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese}\ \{ r \parallel \alpha$$

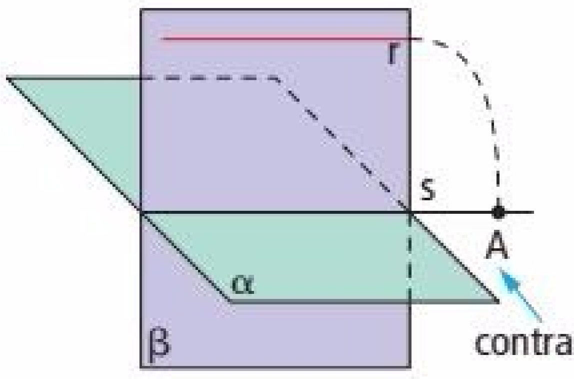


Demonstração

Vamos supor que a negação da tese seja verdadeira, isto é, *r* não é paralela a α. Então *r* e α têm um ponto *A* em comum. Pelo 4º caso de determinação do plano, as retas *r* e *s* determinam um plano β, que é secante a α segundo a reta *s*, pois $s \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

Assim, o ponto *A*, comum a *r* e a α, também pertenceria a *s*, pois $s \subset \alpha$, o que contraria a hipótese $r \,//\, s$.

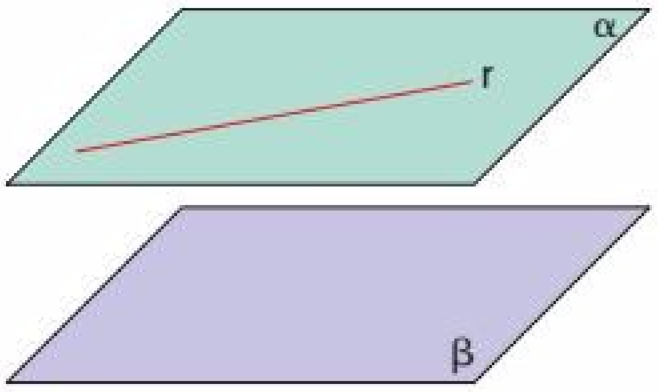
Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que *r* não é paralela a α é falsa. Portanto, *r* é paralela a α.



Ilustrações: Editoria de arte

Teorema 3: Se **α** e **β** são planos paralelos, então qualquer reta *r* contida em **α** é paralela ao plano **β**.

$$\textbf{Hipótese}\begin{cases}\alpha \cap \beta = \varnothing \\ r \subset \alpha\end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese}\ \{r \,//\, \beta$$



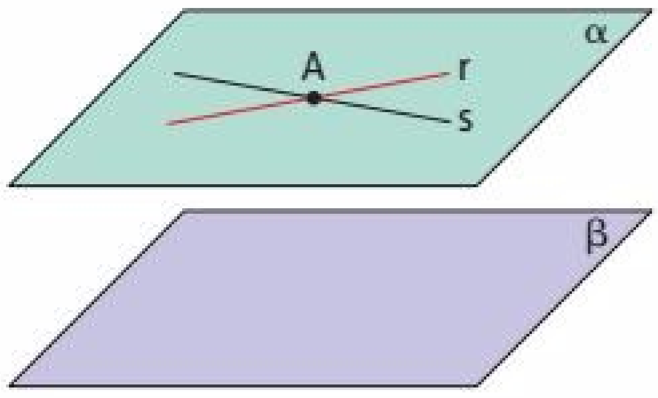
Demonstração

Vamos supor que a negação da tese seja verdadeira, isto é, *r* não é paralela a β. Então *r* e β têm um ponto *A* em comum. Se isso fosse verdade, como $r \subset \alpha$, o ponto *A* pertenceria a β e a α, o que contraria a hipótese $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que *r* não é paralela a β é falsa. Portanto, *r* é paralela a β.

Teorema 4: Se um plano **α** contém duas retas, *r* e *s*, concorrentes e ambas paralelas a outro plano, **β**, então **α** e **β** são paralelos.

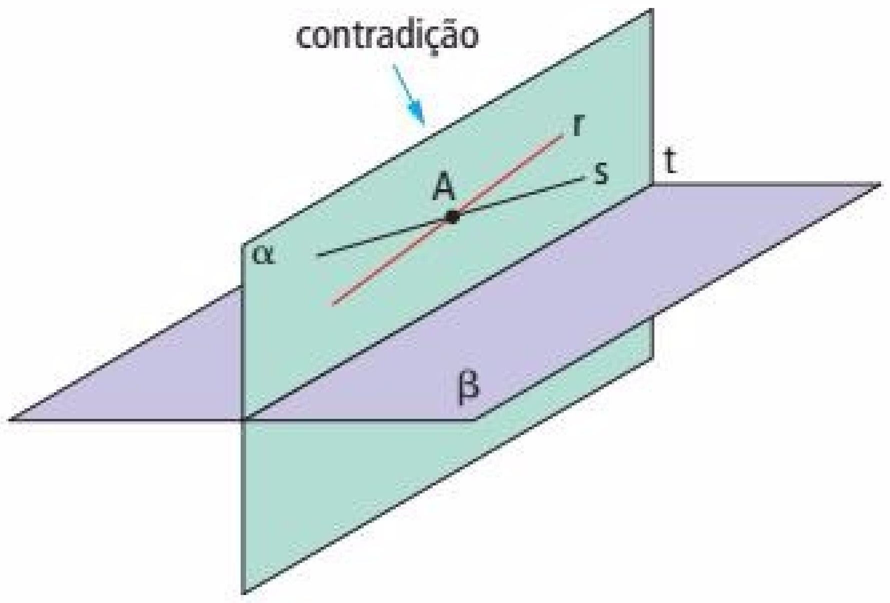
$$\textbf{Hipótese}\begin{cases}r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \\ r,\ s \text{ são concorrentes} \\ r \,//\, \beta,\ s \,//\, \beta\end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese}\ \{\alpha \,//\, \beta$$



Demonstração

Vamos supor que a negação da tese seja verdadeira, isto é, α não é paralelo a β. Então α e β se intersectam segundo uma reta *t* e, pelo teorema 1, *r* e *s* seriam paralelas à reta *t*. Mas *r* e *s* são concorrentes e então têm um ponto *A* em comum. Desse modo, teríamos duas retas paralelas a *t* passando por *A*, o que contraria o postulado R_3 de uma reta.

Como chegamos a uma contradição de um postulado, concluímos que a afirmação inicial de que α não é paralelo a β é falsa. Portanto, α é paralelo a β.



Exercício resolvido

2 Dentre as afirmativas abaixo, referentes à Geometria de posição, determine a única que é falsa:

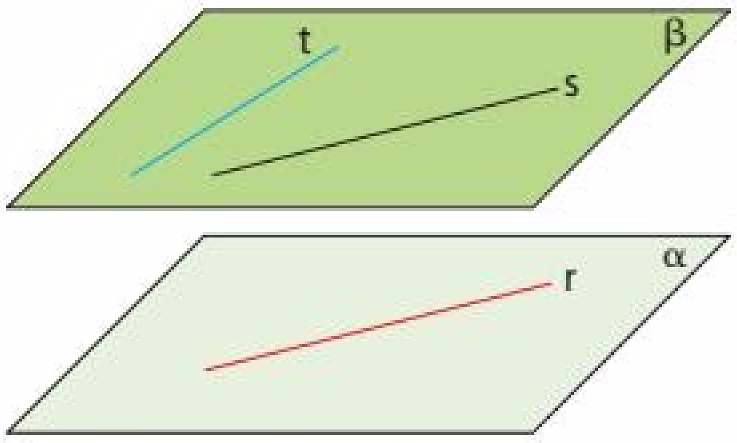
I. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ou reversa a qualquer reta do outro.

II. Se uma reta é paralela a dois planos, então os planos são paralelos.

III. Se duas retas de um plano, distintas e concorrentes, são paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos entre si.

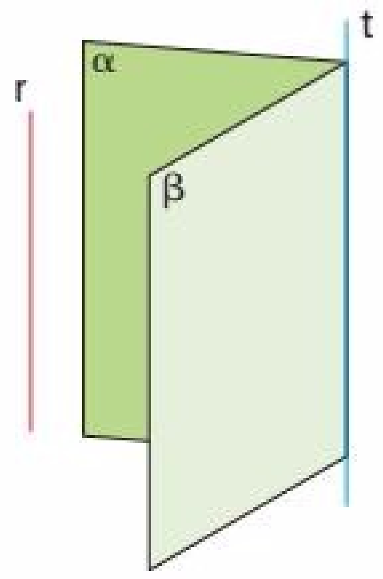
Resolução

I. Verdadeira. Se $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = \varnothing$, então $r \cap s = \varnothing$. Logo, $r \mathbin{/\!/} s$ ou r é reversa a s.

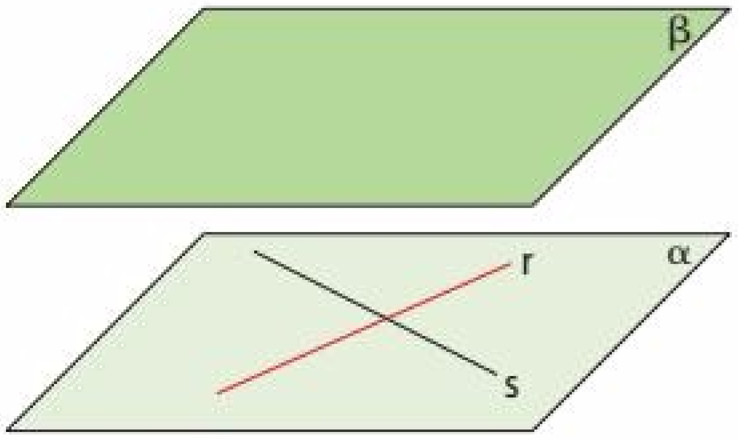


Na figura, $r \mathbin{/\!/} s$ e r é reversa a t.

II. Falsa, pois podemos ter $r \mathbin{/\!/} \alpha$, $r \mathbin{/\!/} \beta$ e $r \mathbin{/\!/} t$, em que $t = \alpha \cap \beta$.



III. Verdadeira, pois $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$, r, s são concorrentes e $r \mathbin{/\!/} \beta$, $s \mathbin{/\!/} \beta$.



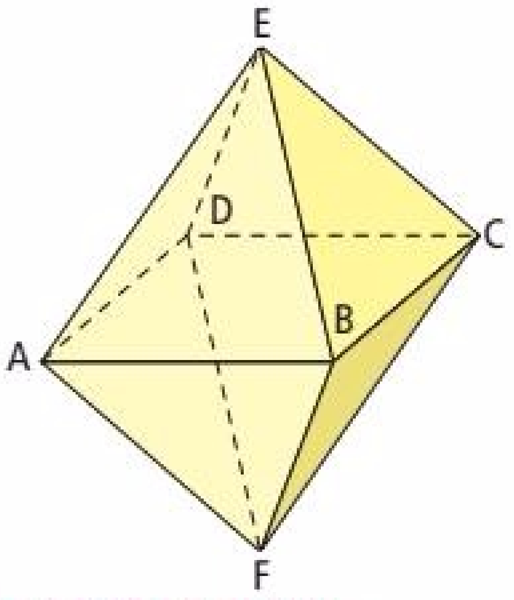
Ilustrações: Editoria de arte

Portanto, a única alternativa falsa é a II.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

17. A representação ao lado mostra os pontos sobre uma figura geométrica espacial em que ABCD é um quadrado e os oito triângulos são equiláteros.



Responda:

a) A reta DE é paralela a qual(is) outra(s) reta(s)? a) $\overleftrightarrow{FB}$, pois DEBF é um losango.

b) Que tipo de quadrilátero os vértices *A*, *E*, *C*, *F* formam? Um losango.

c) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EB}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{FC}$.

c) Quais retas são concorrentes com a reta BC?

d) Dentre as retas concorrentes a $\overleftrightarrow{BC}$, quais também são perpendiculares? $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$.

e) Quais retas são reversas a $\overleftrightarrow{DE}$? $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FC}$.

18. (UERN) Seja um plano α e uma reta *s* secante a α.

Para qualquer reta *r* contida em α, é correto afirmar:

a) *r* e *s* podem ser paralelas, apenas.

b) *r* e *s* podem ser reversas, apenas.

c) *r* e *s* podem ser concorrentes, apenas.

d) *r* e *s* podem ser paralelas ou reversas.

X e) *r* e *s* podem ser reversas ou concorrentes.

19. (PUC-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

X a) Se duas retas concorrentes de um plano são respectivamente paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos.

b) Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.

c) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apoie em duas retas reversas dadas.

d) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

e) Existem planos reversos.

20. (ITA-SP) Quais são as sentenças falsas?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles interceptam o outro.

II. Se um plano contém duas retas distintas e paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

III. Em dois planos paralelos distintos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a infinitas retas desse plano.

V. Se uma reta é paralela a um plano, então é paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III
X b) I; II; V
c) I; III; IV
d) II; III; IV
e) I; II; IV

Perpendicularismo no espaço

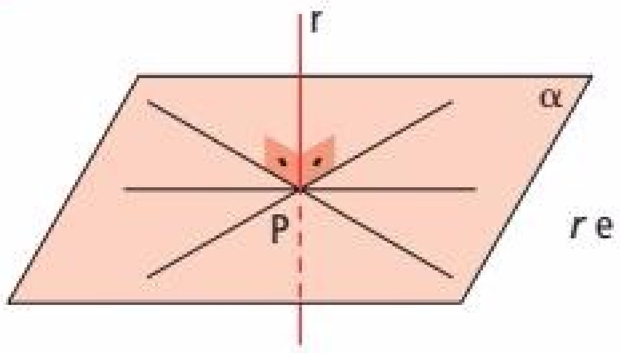
Assim como fizemos no caso do paralelismo, vamos retomar o que vimos até agora a respeito de perpendicularismo.

- Duas retas coplanares são perpendiculares quando formam um ângulo de 90°;
- Duas retas reversas são ortogonais quando formam um ângulo de 90°.

Agora vamos estudar o perpendicularismo entre reta e plano.

Perpendicularismo entre reta e plano

Sejam uma reta *r* e um plano α secantes em um ponto *P*. Dizemos que *r* é perpendicular a α quando *r* é perpendicular a todas as retas de α que passam por *P*.

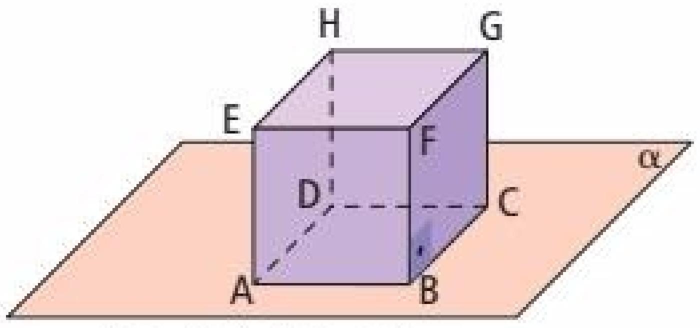


r e α são perpendiculares

$r \perp \alpha$

Ilustrações: Editoria de arte

Não é possível verificar se a reta *r* é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto *P*. No entanto, é possível demonstrar que para a reta *r* ser perpendicular ao plano α, é preciso que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes de α que passam pelo ponto *P*, uma vez que, pelo 3º caso de determinação de um plano, duas retas concorrentes determinam um plano. Por exemplo, no cubo apoiado no plano α da figura abaixo é possível observar esse fato.

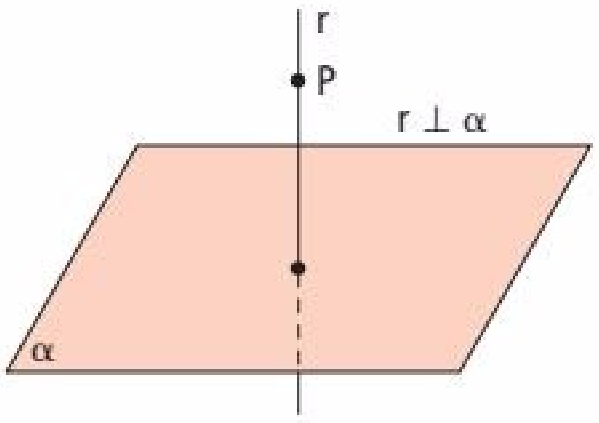


$\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BC}$

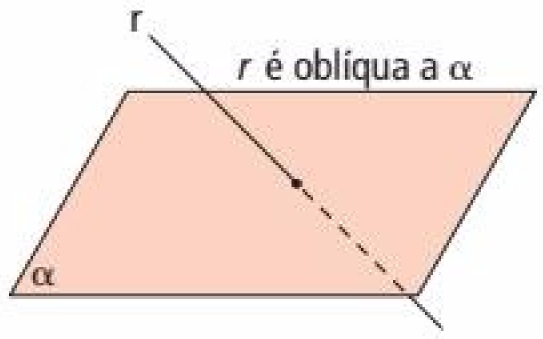
Se $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$, então $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular ao plano ABC.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades do perpendicularismo que podem ser demonstradas.

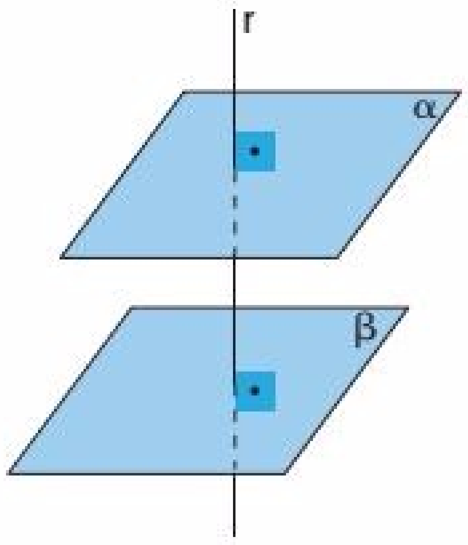
Por um ponto fora de um plano passa uma única reta perpendicular a esse plano.



Toda reta que intersecta um plano e não é perpendicular a ele é chamada de **oblíqua** a esse plano.



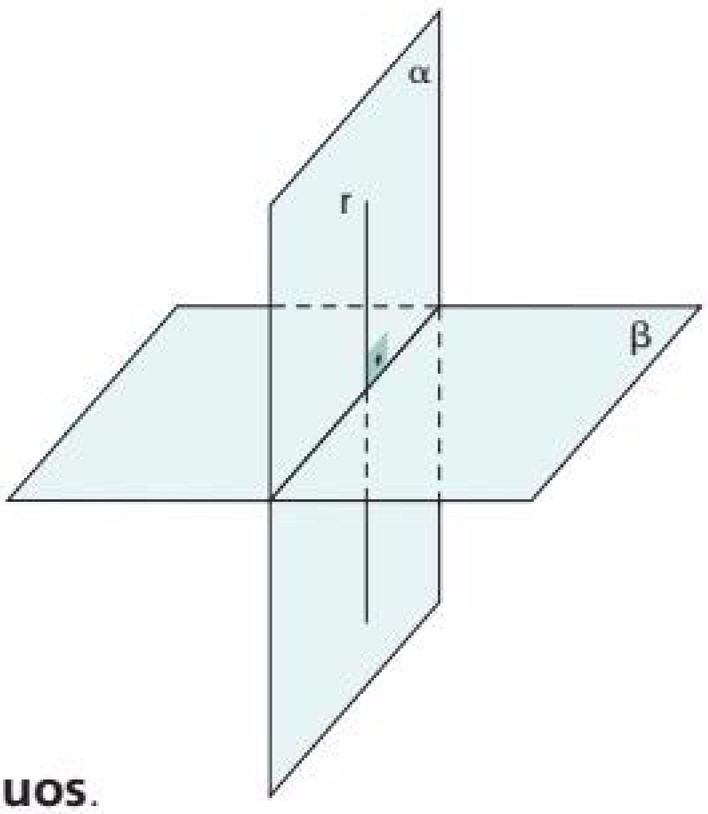
Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são planos paralelos.



Planos perpendiculares

Acompanhe a seguir a definição de planos perpendiculares.

Dados dois planos secantes α e β, α é perpendicular a β se existe uma reta *r* contida em um deles que é perpendicular ao outro.



Se dois planos secantes não são perpendiculares, eles são denominados **oblíquos**.

Teoremas do perpendicularismo

Apresentamos a seguir alguns teoremas sobre perpendicularismo.

Teorema 1: Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então *r* faz ângulo de 90° com qualquer reta contida em α.

Demonstração

Se *s* é uma reta do plano α e passa pelo ponto *A* onde *r* "fura" α, então, pela definição, $r \perp s$ (figura 1).

Supondo que *s* não passe pelo ponto *A*, vamos considerar uma reta s' de α que passa por *A* e é paralela à reta *s* (figura 2).

Então, se *r* é perpendicular a α, é também perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto *A*, ou seja, $r \perp s'$; como $s \,//\, s'$, *r* e *s* são ortogonais.

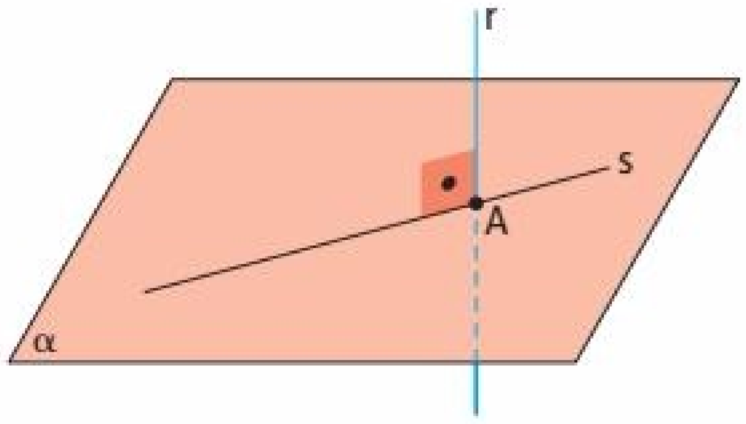


figura 1

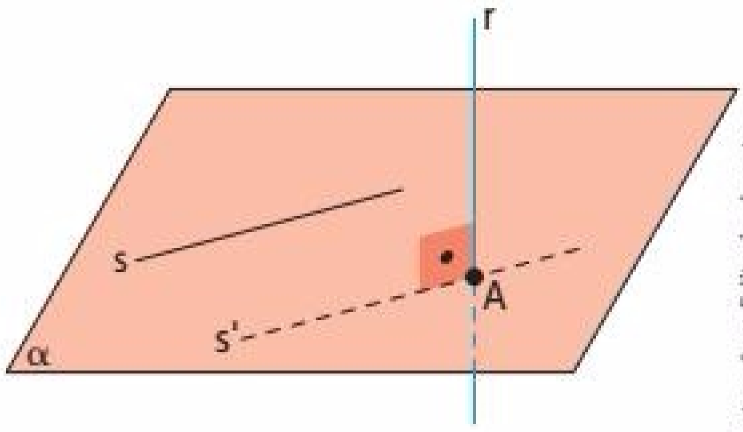


figura 2

Ilustrações: Editoria de arte

Teorema 2: Se uma reta *r*, secante a um plano α em um ponto *A*, é ortogonal a duas retas concorrentes *s* e *t* desse plano α, então a reta *r* é perpendicular ao plano α.

Demonstração

1º caso: $A \in s$ e $A \notin t$

Sejam $t' \,//\, t$ e $A \in t'$, conforme a figura 1 ao lado.

Se *r* e *t* são ortogonais e $t' \,//\, t$, então $r \perp t'$.

Logo, $r \perp \alpha$, pois *r* é perpendicular a duas retas, *s* e t', de α que passam por *A*.

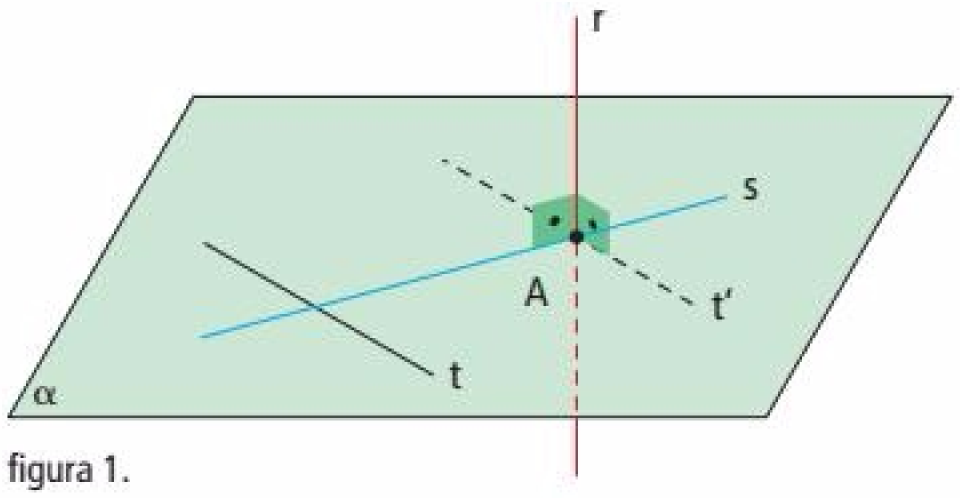
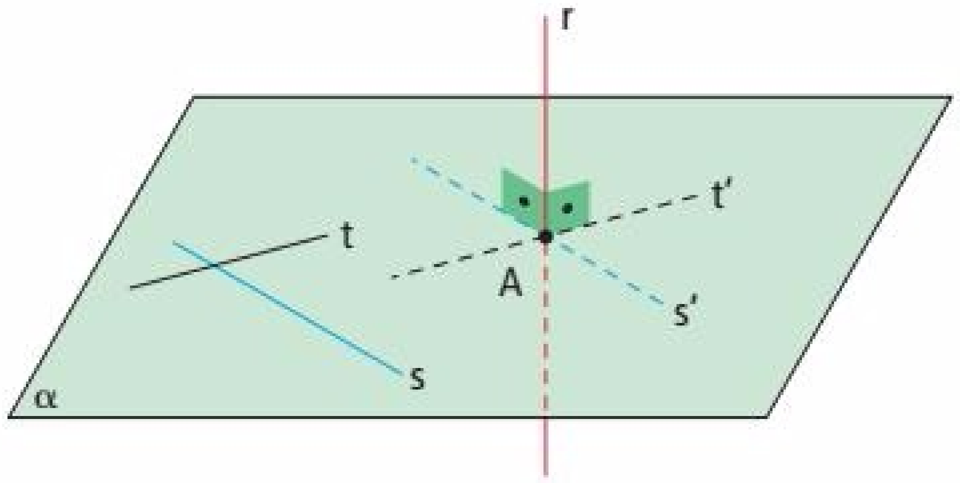


figura 1.

2º caso: $A \notin s$ e $A \notin t$

Vamos traçar as retas s' e t' de α passando por *A* e tais que $s' \,//\, s$ e $t' \,//\, t$.

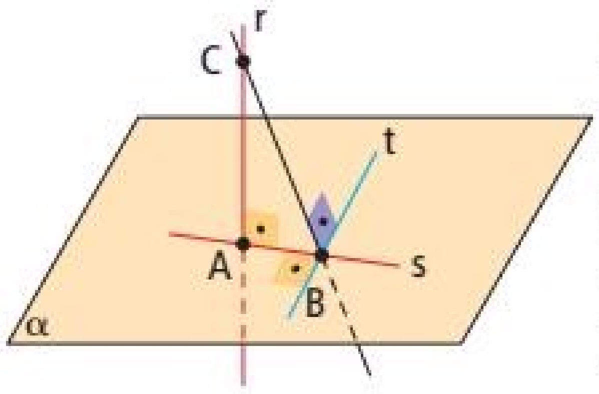


Se *r* e *s* são ortogonais e $s' \,//\, s$, então $r \perp s'$. Analogamente, concluímos que $r \perp t'$.

Logo, $r \perp \alpha$, pois *r* é perpendicular a duas retas, s' e t', de α que passam por *A*.

Teorema 3: Sejam uma reta *r* e um plano α tais que $r \perp \alpha$ no ponto *A*. Sendo *s* uma reta de α que passa pelo ponto *A* e *t* uma reta de α perpendicular a *s* e concorrente com esta num ponto $B \neq A$, então qualquer reta que passa pelo ponto *B* e por um ponto de *r* é perpendicular à reta *t*.

$$\textbf{Hipótese} \begin{cases} r \perp \alpha, r \cap \alpha = \{A\} \\ s \subset \alpha, A \in s \\ t \subset \alpha, t \perp s, t \cap s = \{B\}, B \neq A \\ C \in r \end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese} \left\{ \overleftrightarrow{BC} \perp t \right.$$



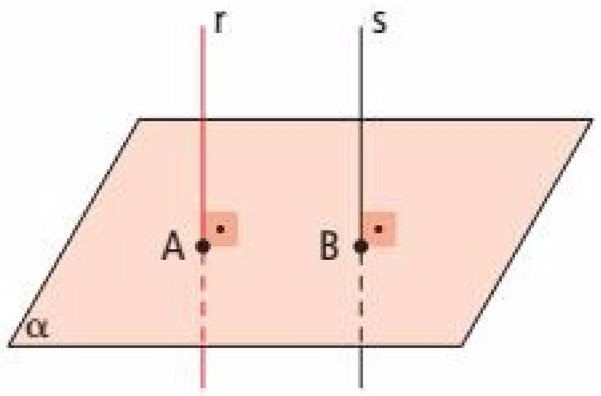
Ilustrações: Editoria de arte

Demonstração

Como $t \perp s$ e $r \perp \alpha$ (por hipótese), então *t* e *r* são ortogonais, e, pelo teorema anterior, *t* é perpendicular ao plano (ABC). Como a reta $\overleftrightarrow{BC}$ está contida no plano (ABC), podemos dizer que as retas *t* e $\overleftrightarrow{BC}$ são perpendiculares, ou seja, $\overleftrightarrow{BC} \perp t$.

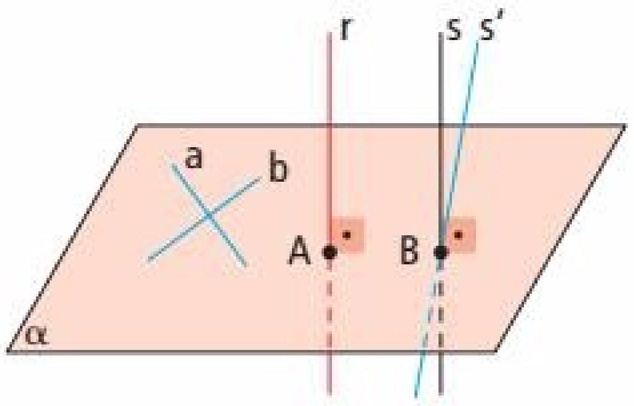
Teorema 4: Duas retas, *r* e *s*, perpendiculares a um mesmo plano α, são paralelas.

$$\textbf{Hipótese} \begin{cases} r \perp \alpha \\ s \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese} \left\{ r \,//\, s \right.$$



Demonstração

Vamos traçar a reta s′ passando por *B* tal que s′ // r. Pelo postulado R_3, s′ é única.



Se $r \perp \alpha$, então *r* é ortogonal a duas retas concorrentes, *a* e *b*, contidas em α.

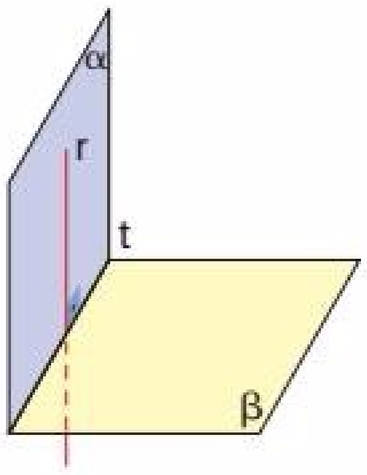
Se $s' \,//\, r$, então s′ é ortogonal às mesmas retas *a* e *b* de α; logo, $s' \perp \alpha$.

Já vimos que pelo ponto *B* do plano α passa uma única perpendicular a esse plano, então resulta que $s' = s$.

Daí, $r \,//\, s$.

Teorema 5: Dados dois planos, **α** e **β**, perpendiculares segundo uma reta *t*; e uma reta *r*, contida em **α** e perpendicular à reta *t*, então *r* é perpendicular a **β**.

$$\textbf{Hipótese}\begin{cases}\alpha \perp \beta\\ \alpha \cap \beta = t\\ r \subset \alpha\\ r \perp t\end{cases} \Rightarrow \textbf{Tese}\ \{r \perp \beta$$

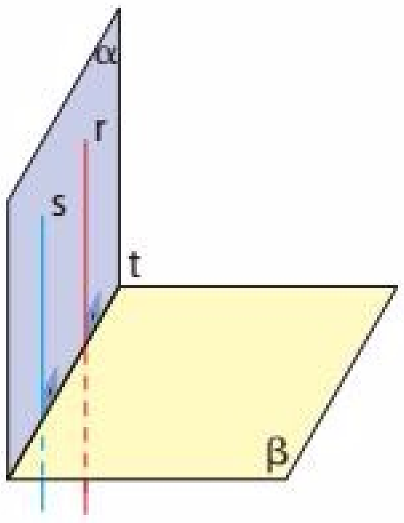


Demonstração

Se α e β são perpendiculares, então α deve conter uma reta *s* tal que s ⊥ β. Logicamente, a reta *s* é perpendicular à intersecção *t*, ou seja, s ⊥ t.

Como r ⊥ t e s ⊥ t, temos, pelo teorema anterior, r // s.

Como r // s e s ⊥ β, logo r ⊥ β.



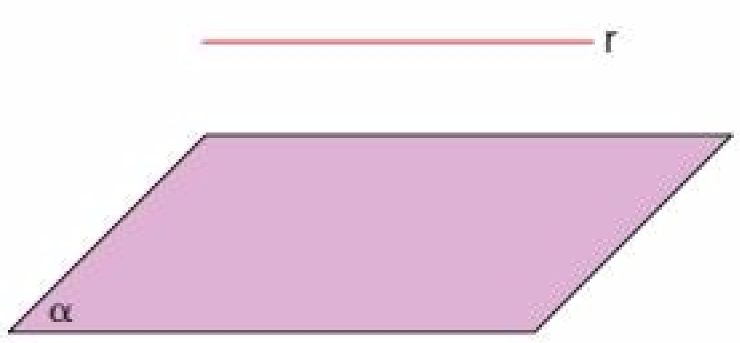
Exercício resolvido

3 Sejam um plano α e uma reta *r*, paralela a α. Quais proposições a seguir são verdadeiras?

I. Toda reta paralela a *r* está contida em α.
II. Toda reta perpendicular a *r* é perpendicular a α.
III. Toda reta ortogonal a *r* é perpendicular a α.

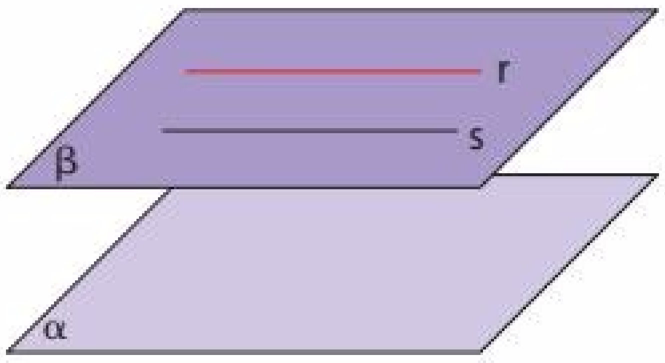
Resolução

Ilustrando o enunciado, temos a figura.

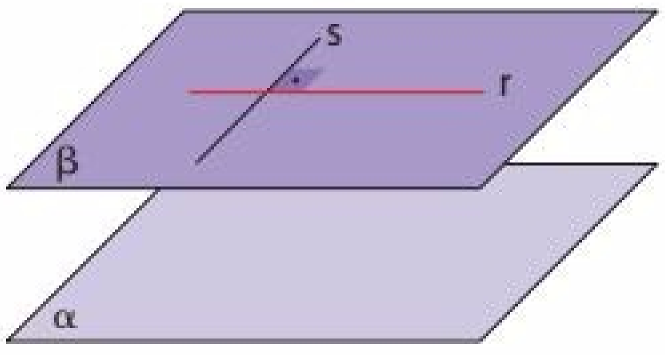


Ilustrações: Editoria de arte

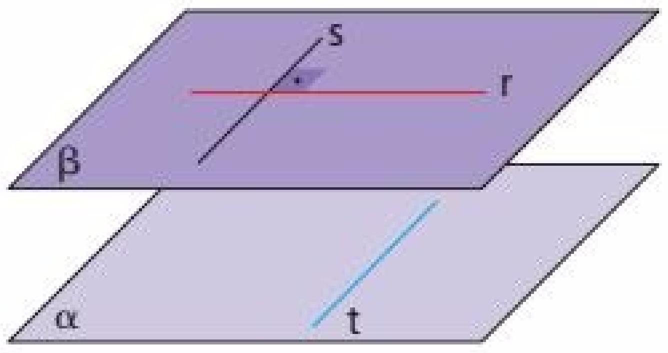
I. Falsa, pois existe um plano β // α que contém *r*. Em β existe uma reta *s*, s // r e *s* não está contida em α.



II. Falsa. Considerando β do item I, existem s ⊥ r, s ⊂ β, s // α; logo, *s* não é perpendicular a α.



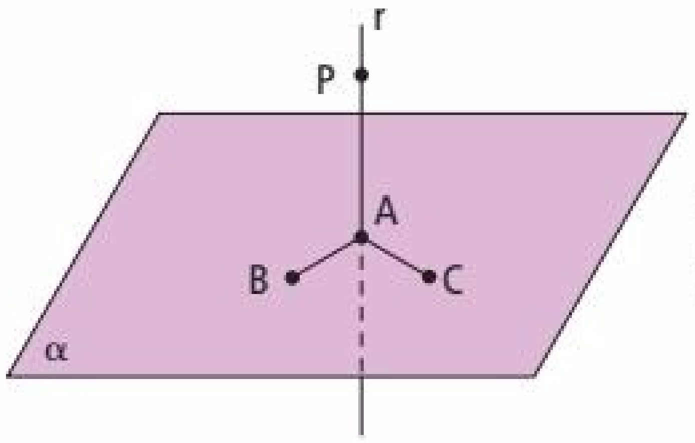
III. Falsa. Considere *s* do item II. Existe uma reta *t*, t ∈ α e t // s. *t* é ortogonal a *r* e não é perpendicular a α.



Exercícios propostos

Escreva no caderno

21. Na figura abaixo, tem-se o ponto *P* que dista 12 cm do plano α. Traça-se por *P* a reta *r*, perpendicular a α e que o intersecta em *A*. Os pontos *B* e *C*, de α, são tais que BP = 13 cm, CP = 15 cm e $\overline{AB} \perp \overline{AC}$. Qual é a medida do segmento BC? $\sqrt{106}$ cm



Editoria de arte

22. (EEM-SP)

I. Duas retas reversas podem ser ambas perpendiculares a uma mesma reta *t*.

II. Se *r* é uma reta de um plano e *s* uma paralela ao mesmo plano, então, certamente, *r* e *s* são paralelas.

III. Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a qualquer reta do plano.

Relativamente às afirmações acima, podemos afirmar que:

a) todas são verdadeiras.

b) somente I e II são verdadeiras.

c) somente II e III são verdadeiras.

d) somente II é verdadeira.

X e) somente I é verdadeira.

23. (Efoa-MG) Com relação aos vértices, arestas e faces de um paralelepípedo retângulo pode-se afirmar que:

a) Toda face é perpendicular a exatamente duas faces.

b) Os pontos dos segmentos que unem os pontos médios das arestas paralelas de uma face são equidistantes dos vértices da face oposta.

X c) Qualquer aresta é perpendicular a somente duas faces.

d) Toda aresta é perpendicular a exatamente 25% do número de arestas.

e) Arestas sem ponto em comum são paralelas ou perpendiculares.

24. (UFMS) Sobre geometria espacial, é correto afirmar que:

(01) Por um ponto fora do plano, passa uma única reta paralela a esse plano.

(02) Por um ponto do espaço, passa somente uma reta paralela a outra reta dada.

(04) Quatro pontos distintos não coplanares determinam exatamente 3 planos.

(08) Num plano, se duas retas são perpendiculares, então toda reta desse plano paralelo a uma delas é perpendicular à outra.

(16) Por duas retas paralelas distintas passa um único plano. Soma das alternativas: 02 + 08 + 16 = 26.

25. (FCMSC-SP) Sempre existem:

I. dois diferentes planos passando por um mesmo ponto e perpendiculares a uma mesma reta;

II. duas diferentes retas passando por um mesmo ponto e perpendiculares a um mesmo plano;

III. dois diferentes planos passando por um mesmo ponto e perpendiculares a um terceiro plano;

IV. dois diferentes planos paralelos a uma mesma reta;

V. dois diferentes planos com um ponto comum, paralelos a um mesmo plano.

Assinale a alternativa correta:

X a) (III) e (IV) são verdadeiras.

b) só (II) é verdadeira.

c) todas são falsas.

d) (III) e (V) são verdadeiras.

e) só (I), (II) e (IV) são verdadeiras.

26. (EsPCEx-SP) Considere duas retas *r* e *s* no espaço e quatro pontos distintos, *A*, *B*, *C* e *D*, de modo que os pontos *A* e *B* pertencem à reta *r* e os pontos *C* e *D* pertencem à reta *s*. Dentre as afirmações abaixo:

I. Se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes, então *r* e *s* são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas *r* e *s* são coplanares.

Pode-se concluir que:

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

X c) somente a III é verdadeira.

d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

27. (Fuvest-SP) É correta a afirmação:

a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

d) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda ortogonal a uma delas será paralela à outra.

X e) Se duas retas forem ortogonais, toda paralela a uma delas será ortogonal ou perpendicular à outra.

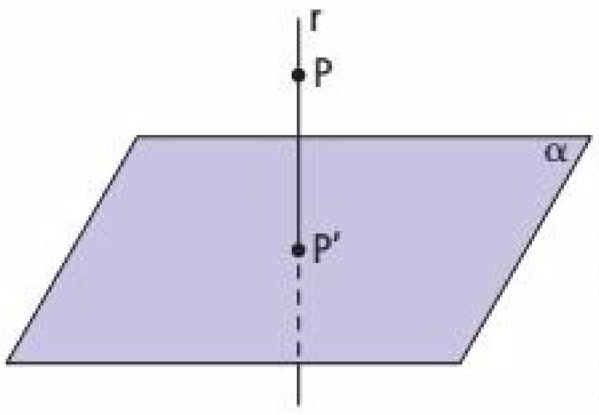
Projeção ortogonal

A seguir estudaremos o conceito de projeção ortogonal para um ponto, uma reta e para uma figura qualquer.

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Consideremos um ponto *P* e um plano α, $P \notin \alpha$.

Pelo ponto *P*, tracemos a reta *r* perpendicular ao plano α. Essa reta é única e “fura” α no ponto P′.



Ilustrações: Editoria de arte

A projeção ortogonal de um ponto *P* sobre um plano α é o ponto P′, $P' \in \alpha$, de modo que $\overleftrightarrow{PP'} \perp \alpha$.

A medida do segmento de reta PP′ é a distância entre o ponto *P* e o plano α.

Se o ponto *P* pertence ao plano α, então o ponto P′ coincide com o ponto *P*, e a distância de *P* a α é igual a zero.

Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

A projeção ortogonal de uma reta *r* sobre um plano α é a figura obtida pelas projeções ortogonais sobre α, de todos os pontos de *r*.

Consideremos uma reta *r* oblíqua a um plano α e que intersecte o plano no ponto *A*, conforme mostra a figura 1.

Tomemos outro ponto, *B*, de *r* e vamos determinar o ponto B′, que é a projeção ortogonal de *B* sobre o plano α (figura 2).

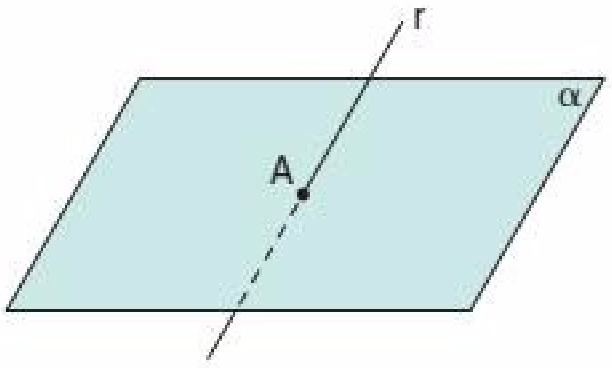


figura 1

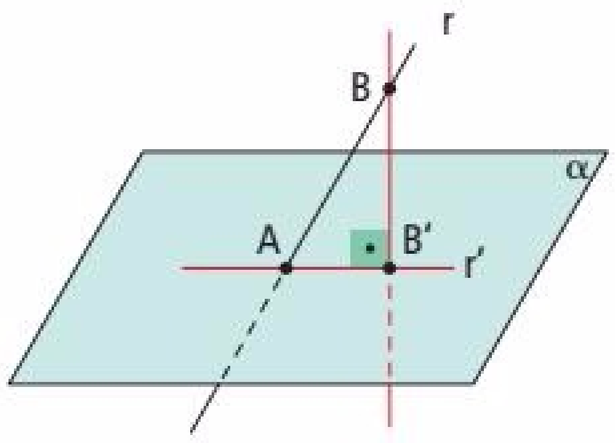
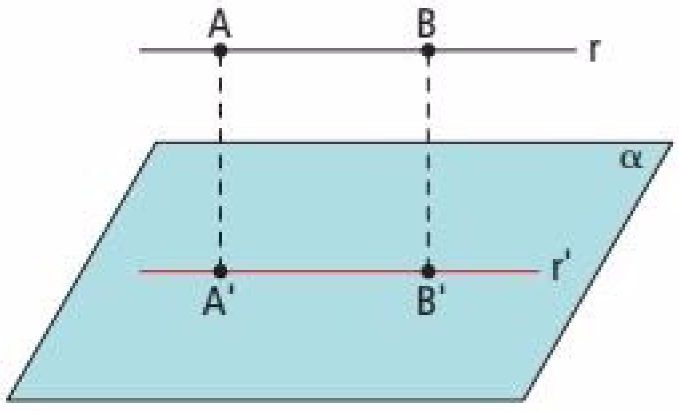


figura 2

Obtemos, então, a reta r′, determinada pelos pontos *A* e B′, que é a projeção ortogonal da reta *r* sobre o plano α.

Vejamos, agora, casos em que a reta *r* não é oblíqua ao plano α.

- Se *r* é paralela a α, então r′ é uma reta paralela a *r*. Nesse caso, a distância entre *r* e α é a distância entre qualquer ponto da reta *r* e o plano α.
- Se *r* está contida em α, então r′ coincide com *r*.
- Se *r* é perpendicular a α, então a projeção ortogonal de *r* sobre α é o ponto em que a reta *r* "fura" o plano α.

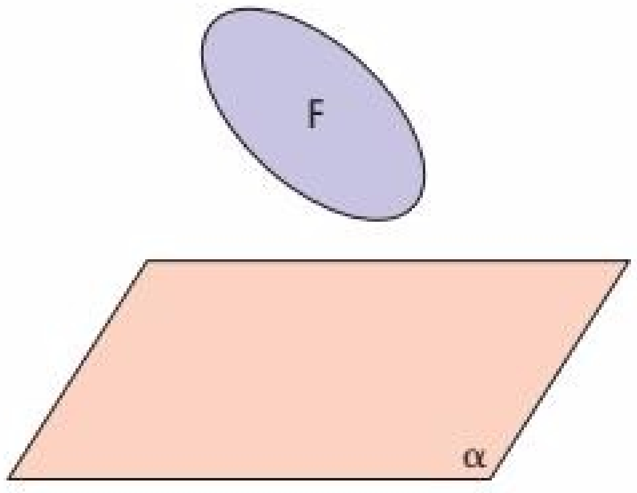


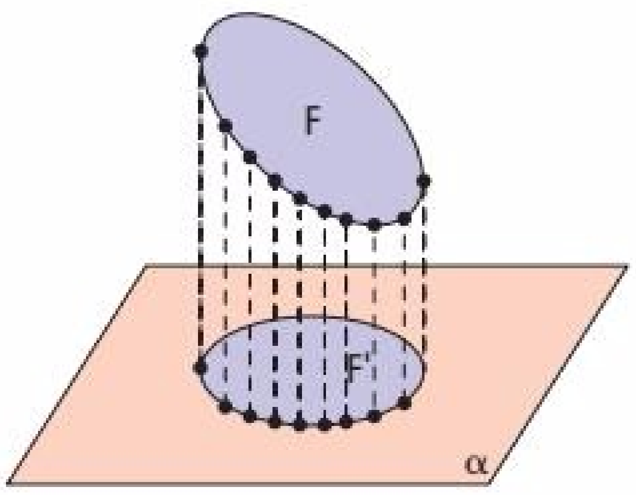
A': projeção ortogonal de *A* sobre α

B': projeção ortogonal de *B* sobre α

Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano

A projeção ortogonal de uma figura *F* sobre um plano α é a figura F′ obtida pelas projeções ortogonais de todos os pontos de *F* sobre α.

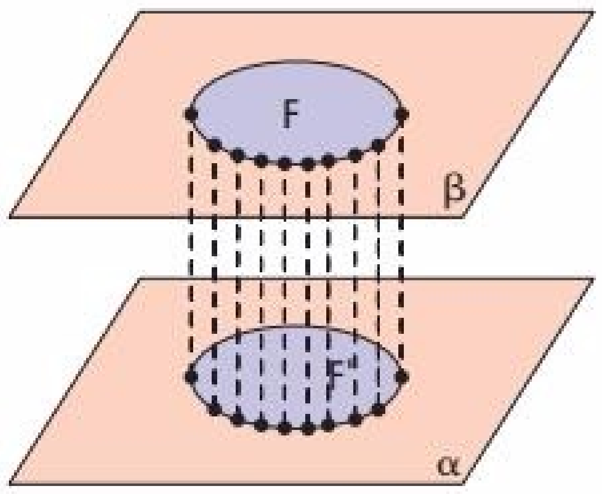




Se a figura *F* está contida em um plano β paralelo ao plano α, então F' é congruente a *F*. Nesse caso, dizemos que *F* se projeta em **verdadeira grandeza** sobre α.

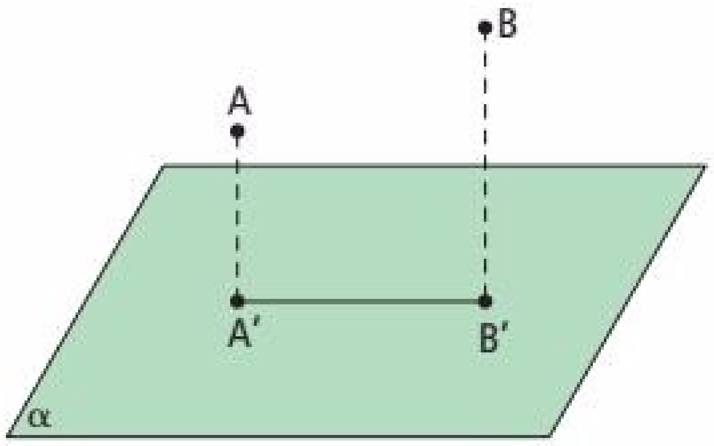
A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um deles ao outro plano.

Se dois planos forem coincidentes, a distância entre eles é nula.

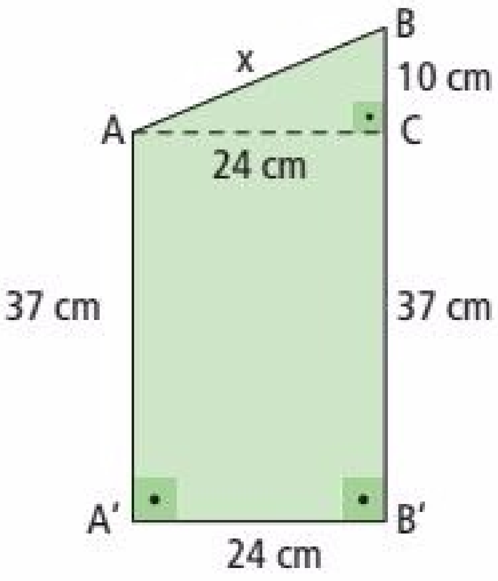


Exercício resolvido

4 Os pontos *A* e *B* distam, respectivamente, 37 cm e 47 cm do plano α. Calcule a distância entre *A* e *B* sabendo que as projeções ortogonais A' e B' desses pontos sobre o plano α distam 24 cm.



Resolução



Da figura, temos:

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ACB, temos:

$x^2 = 24^2 + 10^2$

$x^2 = 576 + 100$

$x = \pm\sqrt{676} = \pm 26$

Como *x* é positivo, obtemos x = 26.

Logo, a distância entre os pontos *A* e *B* é 26 cm.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

28. As afirmações seguintes podem ser verdadeiras ou falsas.

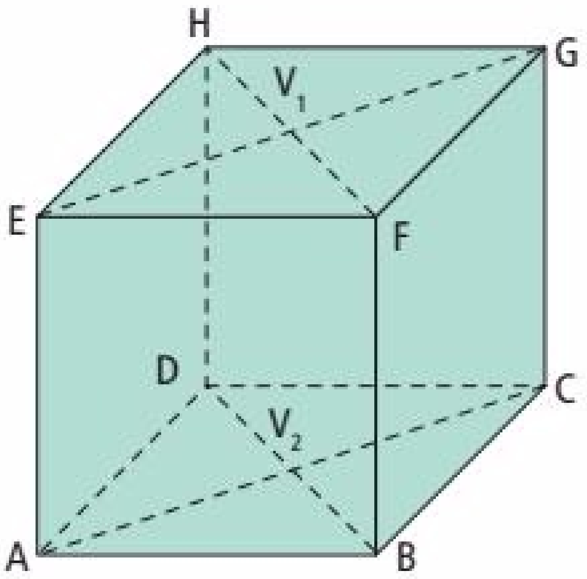
I. A projeção ortogonal de uma reta em um plano é uma reta.

II. A distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum a essas retas.

III. A distância entre dois planos só é definida se esses planos são paralelos.

Quais delas são verdadeiras? A afirmação verdadeira é a III.

29. Observando o cubo da figura, responda:



Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual é a projeção ortogonal do ponto *G* sobre o plano (ABC) da base? C

b) Qual é a projeção ortogonal do ponto *A* sobre o plano (BCF)? B

c) Qual é a projeção ortogonal do ponto V_1 sobre o plano (ABC) da base? V_2

30. Responda:

a) São dados um plano α e um ponto *P* fora de α. Pelo ponto *P* traçamos uma perpendicular ao plano α e que atravessa α no ponto *Q*. Qual é a distância entre *P* e α? $\overline{PQ}$

30. b) A distância entre *r* e α é a distância entre o ponto *A* e a sua projeção ortogonal *A'* em α.

b) Uma reta *r* e um plano α são paralelos. Em relação à reta *r*, podemos dizer que *A* é um de seus pontos. Qual é a distância entre a reta *r* e o plano α?

c) Sejam α e β dois planos distintos paralelos. Sabendo que *A* é um ponto qualquer de α, e *B* um ponto qualquer de β, podemos dizer que a medida do segmento de reta AB é sempre a distância entre α e β? Não.

d) Sendo dadas duas retas reversas, *r* e *s*, qual é a distância entre elas? A distância é igual à distância entre um ponto qualquer de *r* e o plano α que contém *s* e é paralelo a *r*.

Conexões — Jogos Olímpicos

31. Um dos maiores eventos esportivos do planeta, os Jogos Olímpicos , é considerado a consagração dos atletas de esportes olímpicos. Desde a Antiguidade até os dias de hoje os jogos evoluíram muito, graças à dedicação de atletas, organizadores e à evolução da ciência. Leia o texto a seguir e faça o que se pede.

Os Jogos Olímpicos

A história dos Jogos Olímpicos remonta há séculos antes de Cristo e foram originados na Grécia Antiga. Na Era Moderna, os Jogos Olímpicos foram resgatados no fim do século 19 e evoluíram até se transformarem no grande ícone poliesportivo do planeta. [...] Originalmente, os Jogos Olímpicos da Antiguidade foram realizados em Olímpia, na Grécia, do século VIII a.C. ao século V d.C. No século XIX, o Barão Pierre de Coubertin fundou o Comitê Olímpico Internacional (COI) em 1894. O COI se tornou o órgão dirigente do Movimento Olímpico, cuja estrutura e as ações são definidas pela Carta Olímpica.

A evolução do Movimento Olímpico durante o século XX obrigou o COI a adaptar os Jogos para o mundo da mudança das circunstâncias sociais. Alguns destes ajustes incluíram a criação dos Jogos de Inverno para esportes do gelo e da neve, os Jogos Paralímpicos de atletas com deficiência física e visual (atualmente atletas com deficiência intelectual e auditiva não participam) e os Jogos Olímpicos da Juventude para atletas adolescentes.

O COI também teve de acomodar os Jogos para as diferentes variáveis econômicas, políticas e realidades tecnológicas do século XX. Como resultado, os Jogos Olímpicos se afastaram do amadorismo puro, como imaginado por Coubertin, para permitir a participação de atletas profissionais. [...] Como o órgão de decisão, o COI é responsável por escolher a cidade anfitriã para cada edição. A cidade anfitriã é responsável pela organização e financiamento à celebração dos Jogos coerentes com a Carta Olímpica.

O programa olímpico, que consiste no esporte que será disputado a cada Jogos Olímpicos, também é determinado pelo COI. A celebração dos Jogos abrange muitos rituais e símbolos, como a tocha e a bandeira olímpica, bem como as cerimônias de abertura e encerramento. Existem mais de 13 mil atletas que competem nos Jogos Olímpicos de Inverno e em 33 diferentes modalidades esportivas com cerca de 400 eventos. Os finalistas do primeiro, segundo e terceiro lugar de cada evento recebem medalhas olímpicas de ouro, prata ou bronze, respectivamente.

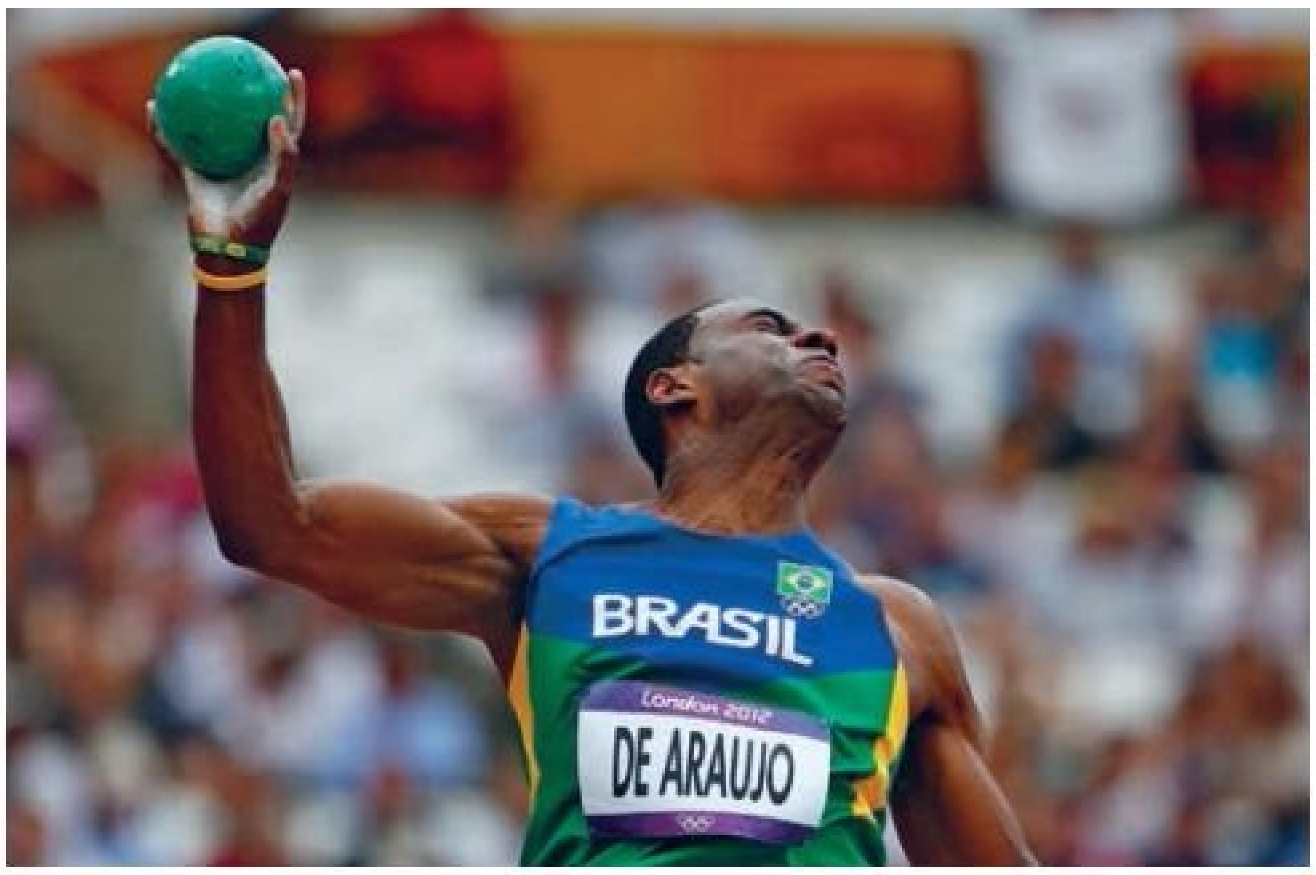
Os Jogos têm crescido em escala, a ponto de quase todas as nações serem representadas. Tal crescimento tem criado inúmeros desafios, incluindo boicotes, *doping*, corrupção de agentes públicos e terrorismo. A cada dois anos, os Jogos Olímpicos e sua exposição à mídia proporcionam a atletas desconhecidos a chance de alcançar fama nacional e, em casos especiais, a fama internacional. [...]

Fonte: BRASIL. Portal Brasil. **ESPECIAL: Da Grécia Antiga à Era Moderna: conheça a história dos Jogos Olímpicos**. Brasília, 19 ago. 2014. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/esporte/2014/07/especial-da-grecia-antiga-para-a-era-moderna-conheca-a-historia-dos-jogos-olimpicos>. Acesso em: 20 jan. 2016.

a) De acordo com o texto, devido às proporções que os Jogos Olímpicos tomaram e sua enorme exposição ao mundo, muitos problemas também surgiram. Cite alguns desses desafios enfrentados pelo Comitê Olímpico Internacional e os Comitês realizadores. Boicotes, *doping*, corrupção de agentes públicos e terrorismo.

b) Dentre os inúmeros esportes que compõem o programa olímpico está o lançamento de peso. Esse esporte consiste em arremessar uma bola de metal maciço o mais longe possível. O vencedor é aquele atleta que conseguir alcançar a maior distância nos arremessos.

A trajetória realizada pelas bolas de metal descreve um arco de parábola desde a saída da mão do atleta até tocar o solo. Supondo que em certo dia, no mesmo instante em que será realizado um arremesso, os raios solares estejam incidindo perpendicularmente ao solo, determine a figura geométrica resultante da sombra dessa bola no solo, ao longo de toda sua trajetória. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.



Kai Pfaffenbach/Reuters/Latinstock

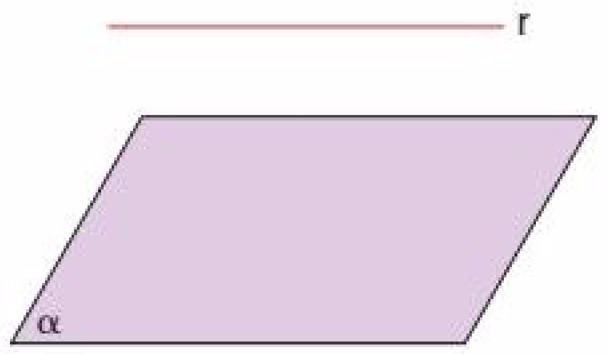
Atleta brasileiro Luiz Alberto de Araújo realiza lançamento no arremesso de peso durante a prova de decatlo nos Jogos Olímpicos de Londres, em 2012.

c) Nos Jogos Olímpicos, existe uma condecoração especial, concedida a atletas que tenham realizado algum feito de cunho humanitário-esportivo: a Medalha Pierre de Coubertin. Um brasileiro, Vanderlei Cordeiro de Lima, recebeu essa honra nos Jogos Olímpicos de 2004. Pesquise os motivos que levaram o brasileiro e os outros atletas a serem condecorados com essa medalha e discuta com os colegas sobre essas atitudes, refletindo sobre os valores do chamado "espírito olímpico". Resposta pessoal. Espera-se que os alunos, a partir da pesquisa, reflitam sobre o verdadeiro espírito olímpico, que abrange qualidades morais e éticas e não somente virtudes técnicas.

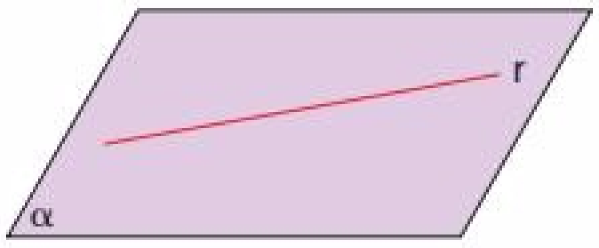
Ângulo de uma reta com um plano

Vimos que um plano e uma reta podem ter três posições relativas: a reta é secante ao plano, a reta é paralela ao plano ou a reta está contida no plano. Agora, veremos como se comportam os ângulos entre a reta e o plano em cada um desses casos.

Quando uma reta é paralela a um plano ou nele está contida, a reta e o plano formam um **ângulo nulo**.



$\theta = 0°$

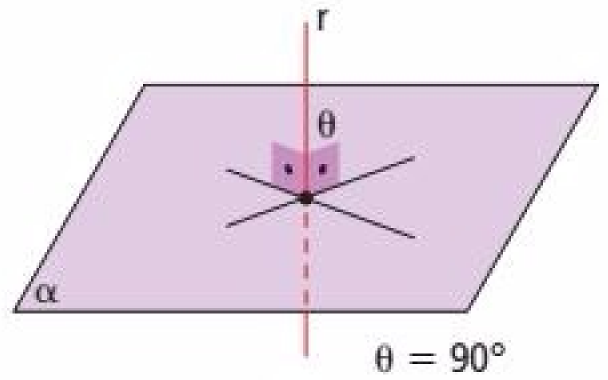


$\theta = 0°$

Ilustrações: Editoria de arte

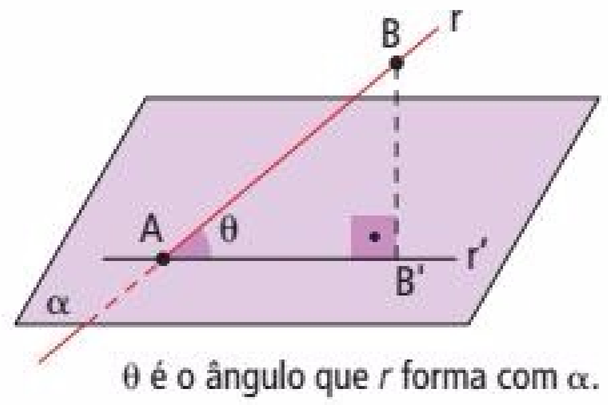
Quando uma reta é secante a um plano, temos duas situações possíveis:

1. Se a reta é perpendicular ao plano, a reta e o plano formam um **ângulo reto**.



$\theta = 90°$

2. Se a reta é oblíqua ao plano, o ângulo agudo que a reta forma com sua projeção ortogonal sobre o plano é o **ângulo da reta com o plano**.

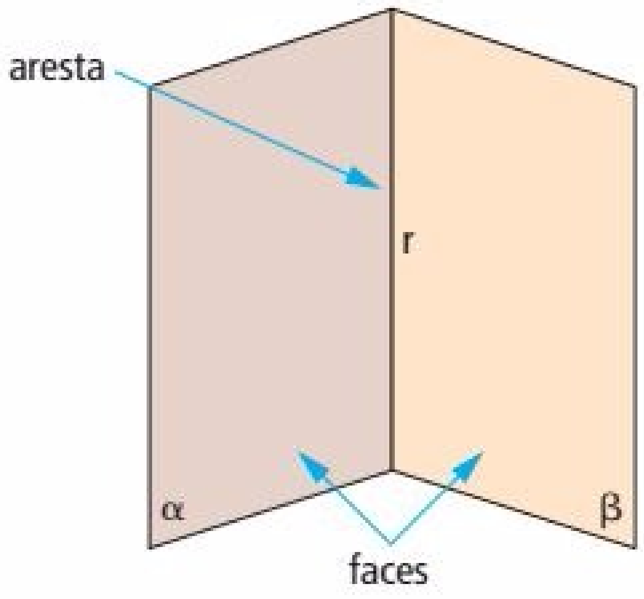


θ é o ângulo que *r* forma com α.

Diedro

Dois planos concorrentes dividem o espaço em quatro regiões denominadas **ângulos diedros** ou, simplesmente, **diedros**.

Um diedro é a região limitada por dois semiplanos distintos e não opostos, de mesma origem.



Na figura, destacamos o diedro formado pelos semiplanos α e β, de mesma origem *r*.

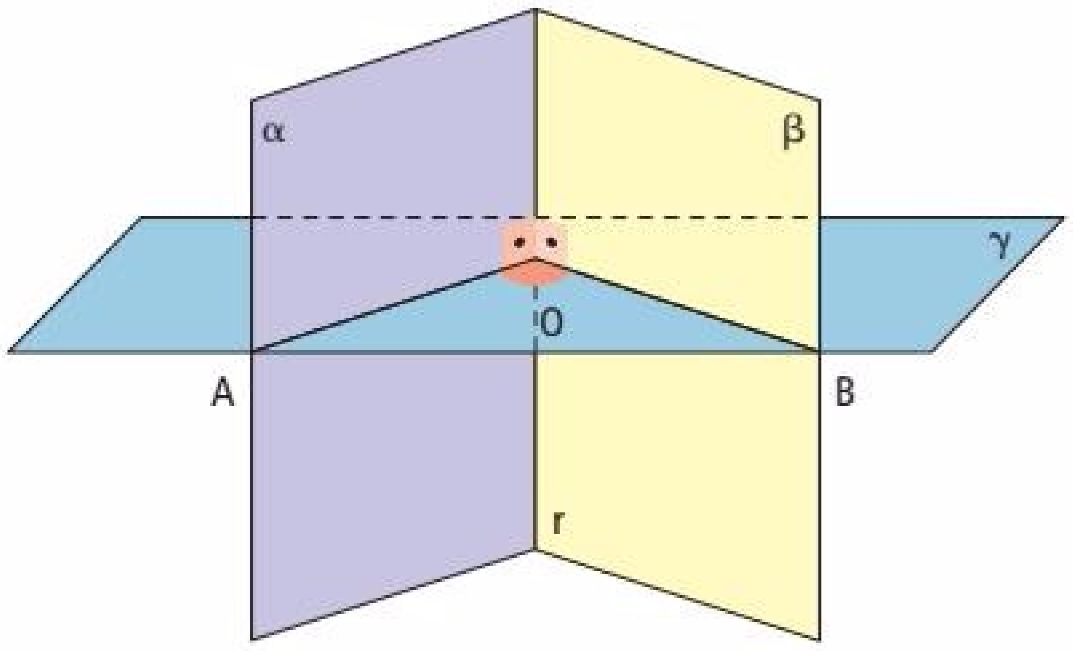
A reta *r* é chamada de **aresta** do diedro, e os dois semiplanos, α e β, são as **faces** do diedro.

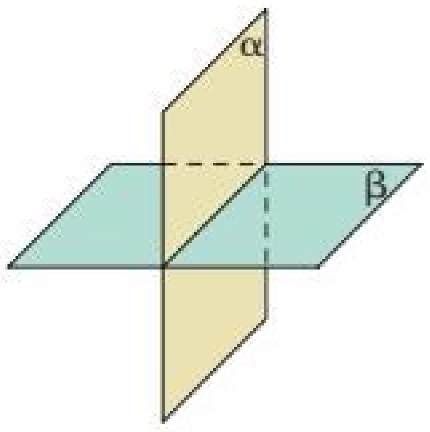
Secção normal de um diedro

Seccionando um diedro de aresta *r* por um plano γ perpendicular a *r*, obtemos um ângulo $A\widehat{O}B$ denominado **secção normal** ou **secção reta** do diedro.

A medida de um diedro é a medida de sua secção normal.

Se dois planos concorrentes, α e β, formam quatro diedros de medida 90°, então α e β são **perpendiculares**.



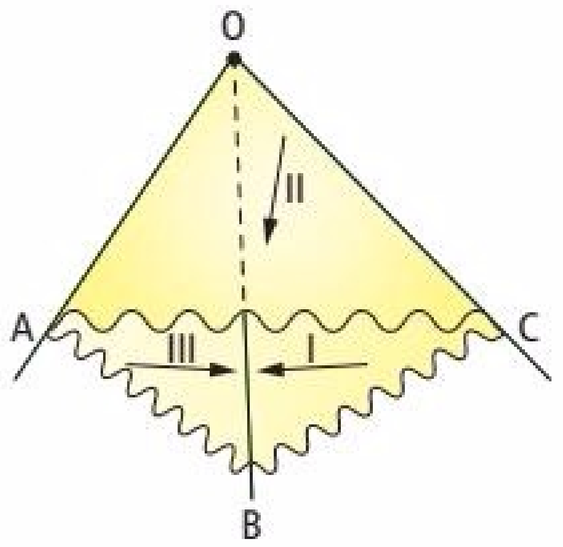


Triedro

Dadas três semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ de mesma origem *O* e não coplanares, vamos considerar os semiespaços I, II e III:

- I com origem no plano OBC e contendo $\overrightarrow{OA}$;
- II com origem no plano OAC e contendo $\overrightarrow{OB}$;
- III com origem no plano OAB e contendo $\overrightarrow{OC}$.

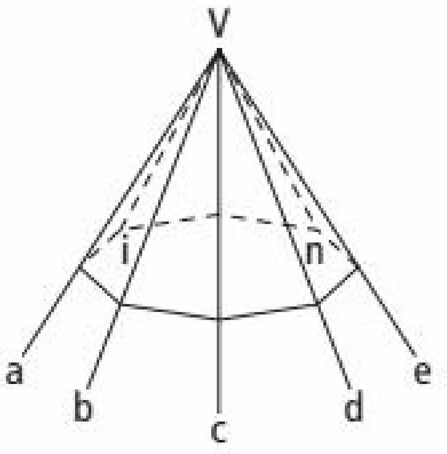
A intersecção dos semiespaços I, II e III determina o **triedro** por $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.



Ilustrações: Editoria de arte

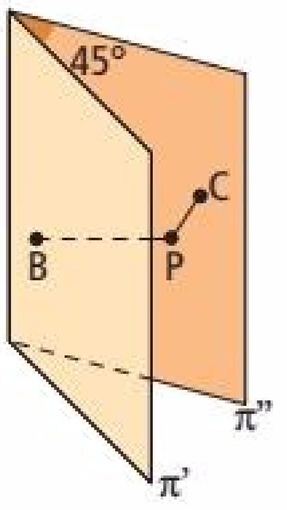
Ângulos poliédricos

Chamamos de **ângulos poliédricos** a região limitada pela intersecção dos semiespaços, obtidos pelos planos de *n* semirretas de mesma origem, 3 a 3, não coplanares.



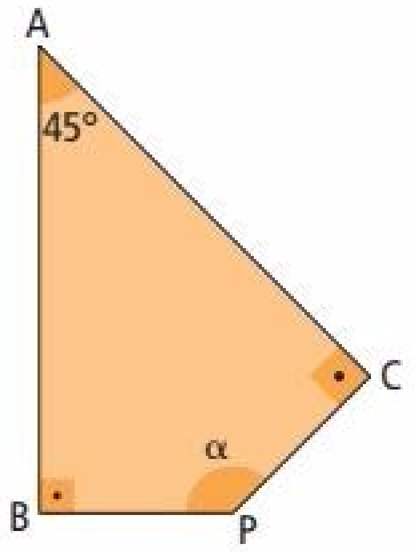
Exercício resolvido

5 Sejam π' e π" as faces de um ângulo diedro de 45° e *P* um ponto interior a esse diedro. Sejam *B* e *C* as projeções ortogonais de *P* sobre π' e π", respectivamente. Qual é a medida em grau do ângulo $B\hat{P}C$?



Resolução

Desenhando o quadrilátero BPCA determinado pela secção normal desse diedro, temos a figura ao lado.



A soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é 360°, logo:

$45° + 90° + 90° + \alpha = 360°$

$225° + \alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 135°$

Logo, o ângulo $B\hat{P}C$ mede 135°.

Exercícios propostos

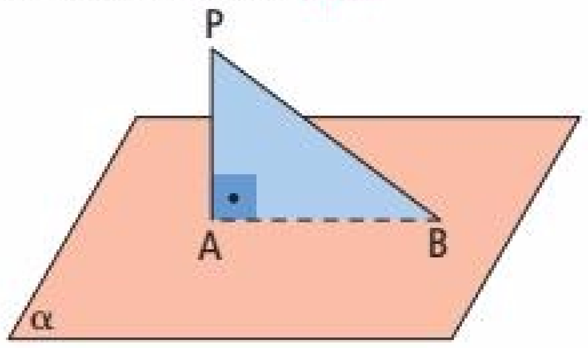
Escreva no caderno

32. Qual afirmação abaixo é verdadeira? II

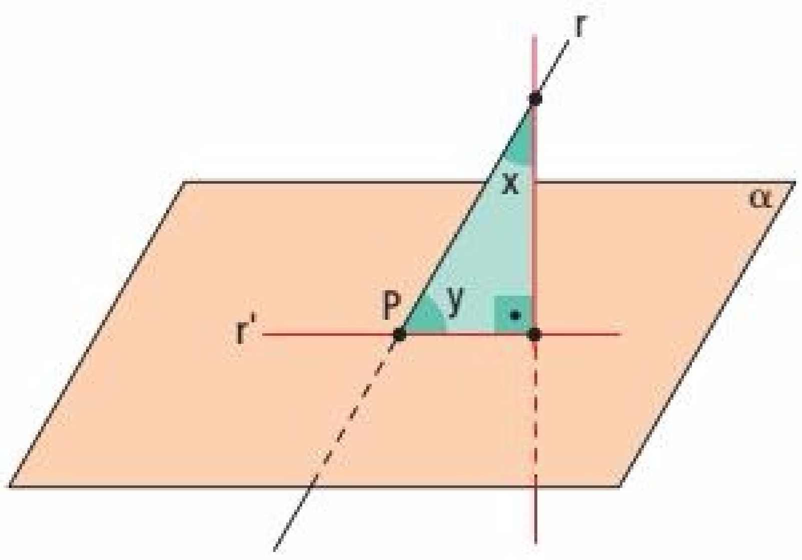
I. Todas as secções retas de um mesmo diedro não são congruentes.

II. Dois diedros são congruentes quando suas secções retas são congruentes.

33. Considere o ponto *P* externo ao plano α da figura. $\overline{PA}$ é perpendicular a α, mede 15 cm, e $\overline{PB}$, oblíquo a α, mede 25 cm. Calcule a medida da projeção ortogonal de $\overline{PB}$ sobre o plano α. 20 cm



34. Na figura, a reta *r* é oblíqua ao plano α em *P*. Se x = 30°, calcule *y*. 60°



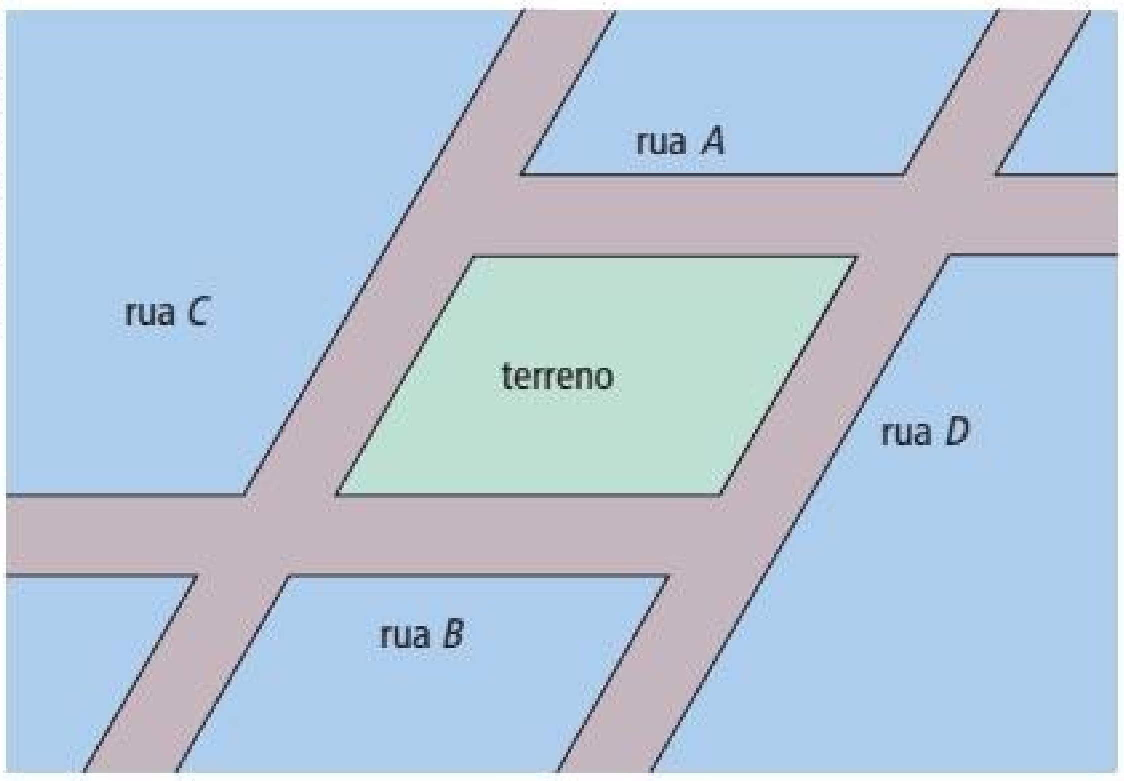
35. Considere dois planos secantes que formam quatro diedros idênticos. O que podemos afirmar sobre os dois planos? São perpendiculares.

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (Enem/MEC) Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área.

Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros.



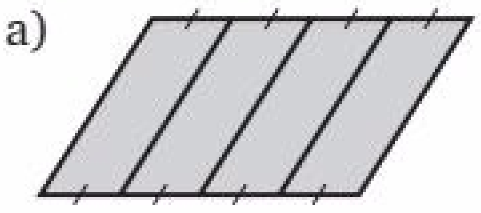
Ilustrações: Editoria de arte

As ruas *A* e *B* são paralelas.

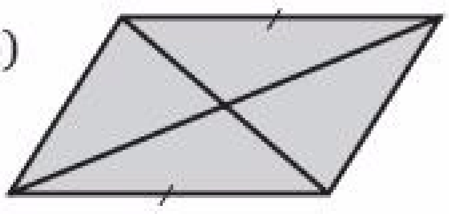
As ruas *C* e *D* são paralelas.

Dos esquemas abaixo, onde lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes não possuem, necessariamente, a mesma área é:

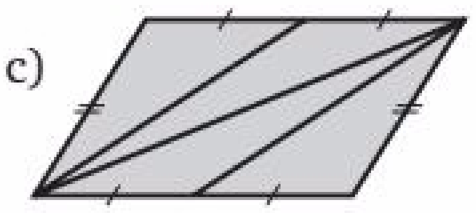
a)



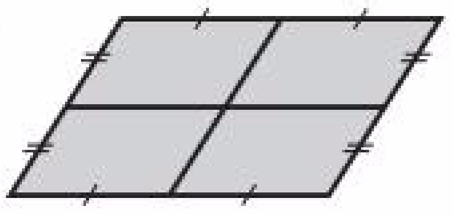
b)



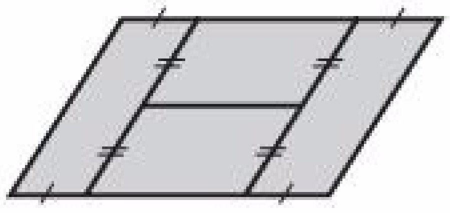
c)



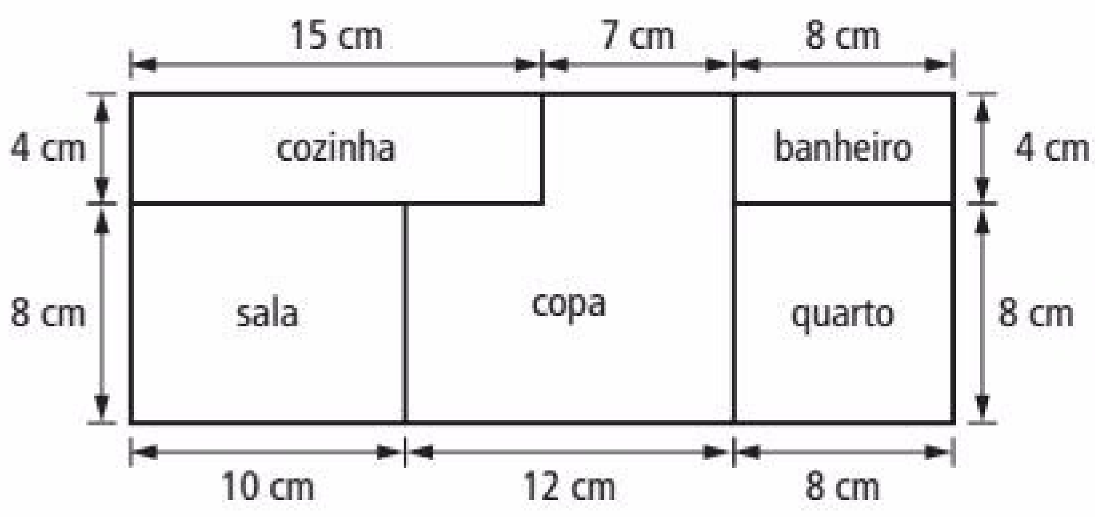
d)



x e)



2. (UEMG) A planta de uma residência, apresentada no desenho abaixo, tem escala 1 : 80, ou medida de 1 cm que corresponde a uma medida de 80 cm na dimensão real.



Considerando informações e ilustração anteriores, só é correto afirmar que a área real ocupada pela copa é igual a

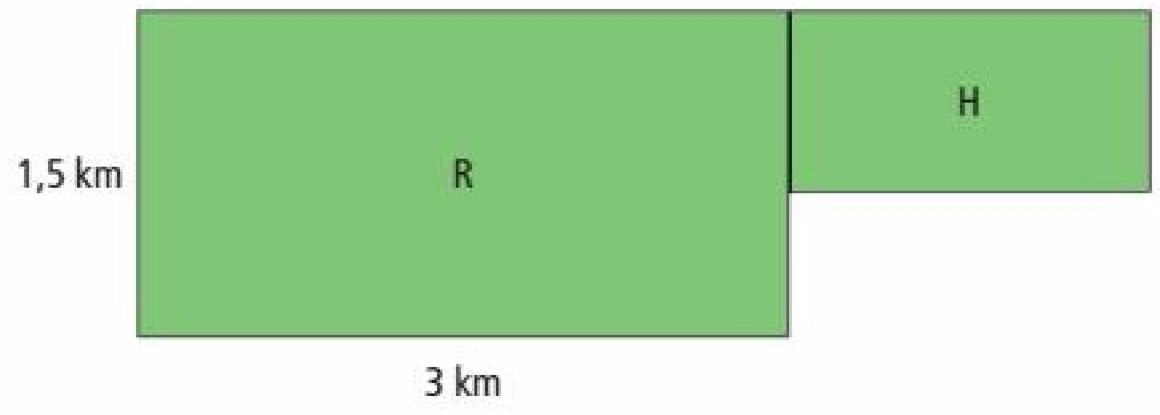
a) 75,01 m^2.

x b) 79,36 m^2.

c) 86,12 m^2.

d) 90,4 m^2.

3. (UFABC-SP) Observe a figura. As duas áreas retangulares são utilizadas para o plantio de cana-de-açúcar, sendo que a área *R* está para a área *H* na razão de 9 para 5. Sabe-se que um hectare (ha) de cana produz 8 mil litros de etanol. (Dado: 1 ha = 10 000 m^2.)



Pode-se concluir, então, que as áreas *R* e *H*, juntas, produzem:

a) $2,5 \cdot 10^6$ litros de etanol.

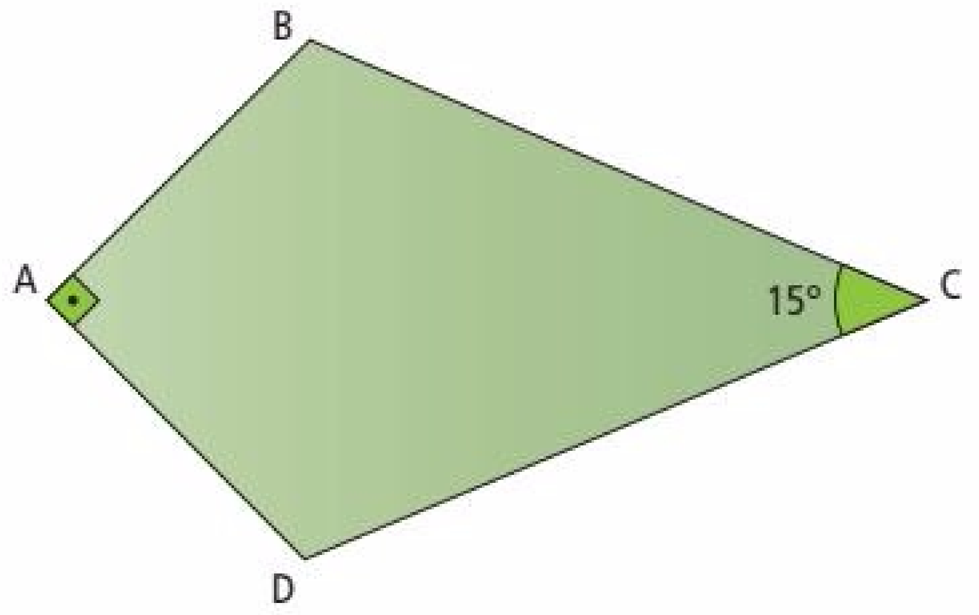
b) $3,6 \cdot 10^6$ litros de etanol.

c) $4,5 \cdot 10^6$ litros de etanol.

x d) $5,6 \cdot 10^6$ litros de etanol.

e) $6,2 \cdot 10^6$ litros de etanol.

4. (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um quadrilátero ABCD, onde AB = AD e BC = CD = 2 cm. A área do quadrilátero ABCD é igual a



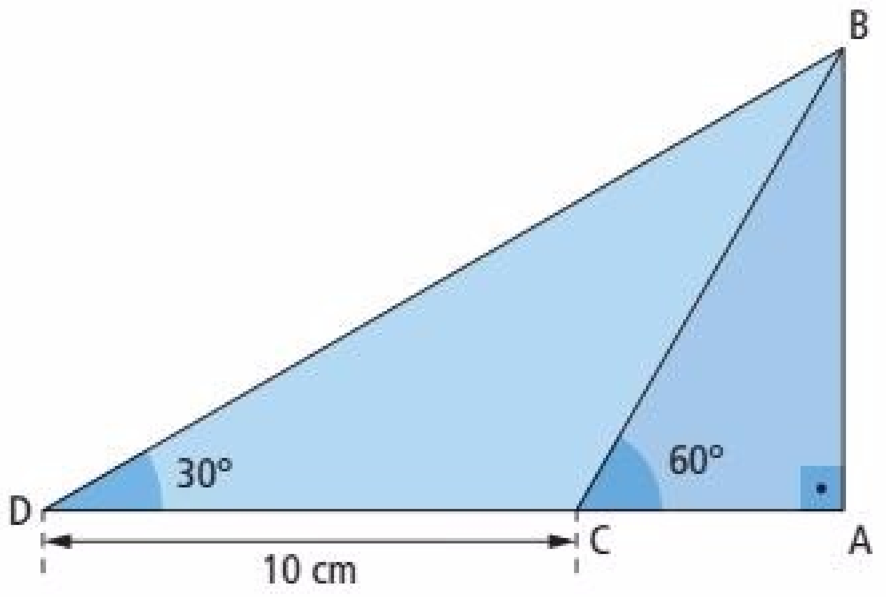
a) $\sqrt{2}$ cm^2.

x b) 2 cm^2.

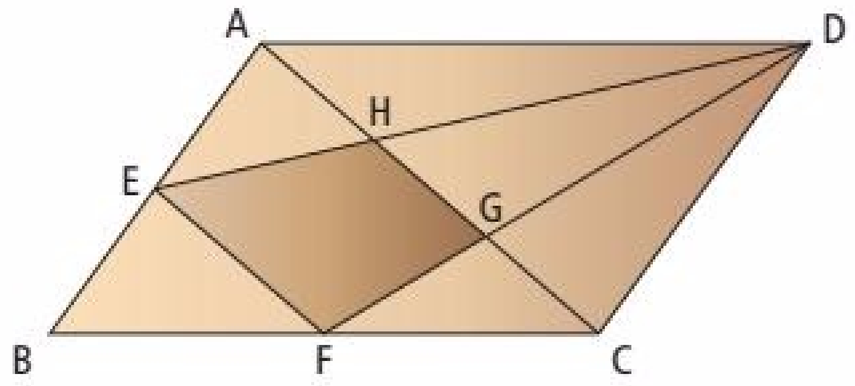
c) $2\sqrt{2}$ cm^2.

d) 3 cm^3.

5. (FGV-SP) Na figura, $\overleftrightarrow{AD}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, $A\widehat{D}B = 30°$, $A\widehat{C}B = 60°$ e DC = 10 cm. Calcule a área do triângulo DCB. $25\sqrt{3}$ cm²



6. (OBMEP) O paralelogramo ABCD tem área 24 cm² e os pontos E e F são os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero EFGH?



a) 4 cm²

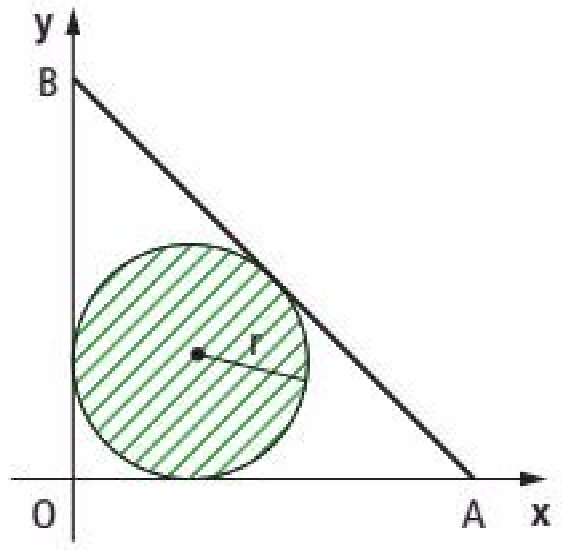
x b) 5 cm²

c) 6 cm²

d) 7 cm²

e) 8 cm²

7. (UFPE) A planta baixa de uma praça que tem o formato de um triângulo isósceles, OAB, onde Jorge caminha diariamente, está representada na figura abaixo. A parte hachurada representa uma região gramada circular de raio $r = 30$ m.



Nesse contexto, é correto afirmar que a área da praça mede: (Use: $\sqrt{2} = 1{,}4$.)

a) 4 250 m²

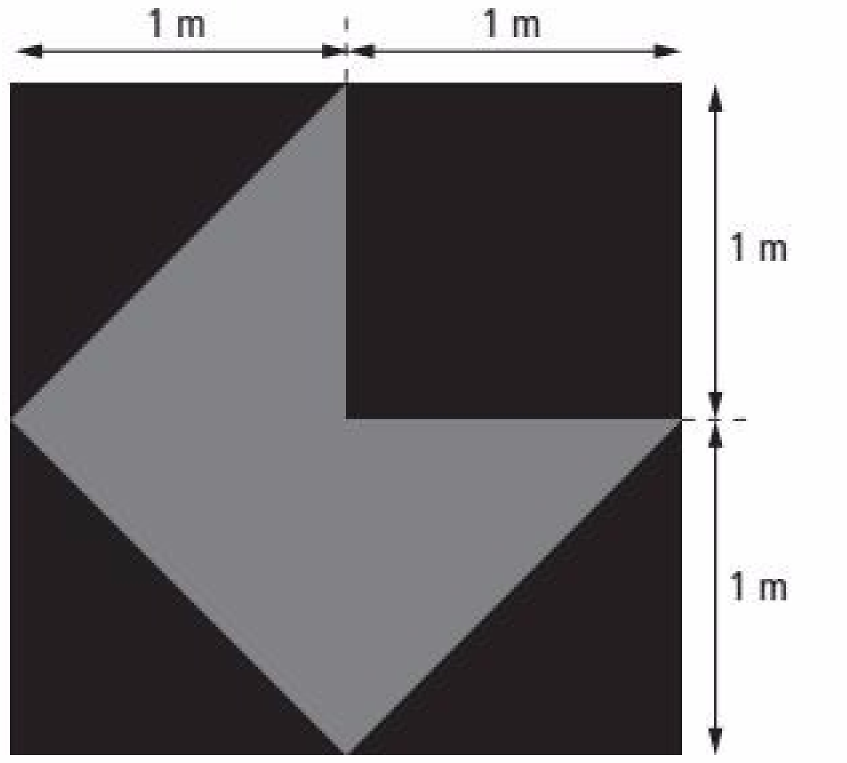
b) 4 500 m²

c) 4 720 m²

d) 4 920 m²

x e) 5 220 m²

8. (FGV-SP) A figura a seguir representa a tela de um quadro pós-moderno, um quadrado cujos lados medem 2 metros. Deseja-se pintar o quadro nas cores cinza e preta, como descrito na figura.



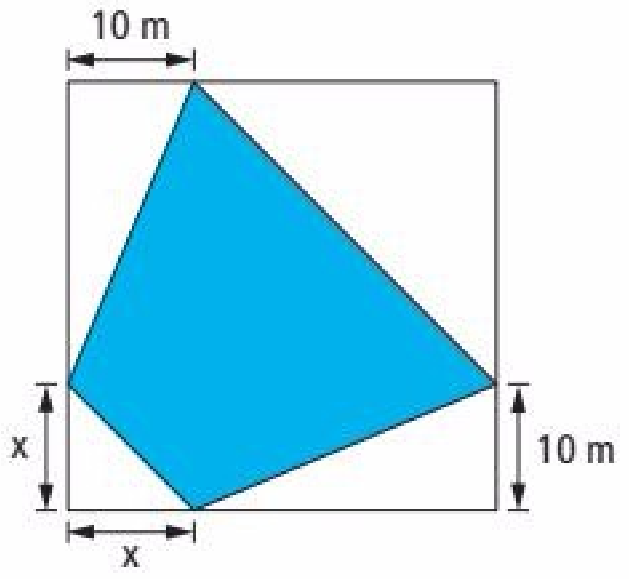
Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual a área que deverá ser pintada em preto? Expresse a resposta em metros quadrados. Qual é a proporção da cor preta para cor cinza? $\frac{5}{3}$

b) Se a pintura na cor preta custa R$ 100,00 o metro quadrado, a pintura na cor cinza, R$ 200,00 o metro quadrado, qual será o custo total de pintura do quadro? R$ 550,00

c) Se as cores forem invertidas (sendo a área cinza pintada de preto e a área preta pintada de cinza), qual será a variação percentual do custo total de pintura do quadro, com relação ao custo total obtido no item b? 18,18%

9. (UFES) Um terreno em forma de um quadrado de 34 m de lado deve ser aproveitado na construção de um *shopping center* com quatro lojas triangulares e uma praça de alimentação em forma de um trapézio, conforme mostra a figura abaixo. Nessa figura, *x* representa o valor do lado de uma das lojas para o qual a área da praça de alimentação é máxima.



Para esse valor de *x* o perímetro da praça, em metro, é

x a) $52 + 34\sqrt{2}$

b) $46 + 37\sqrt{2}$

c) $40 + 40\sqrt{2}$

d) $34 + 43\sqrt{2}$

e) $28 + 46\sqrt{2}$

10. (UFC-CE) Um losango possui 24 m^2 de área e 3 m de distância entre dois lados paralelos. O perímetro do losango mede, em metros:

a) 16 c) 24 x e) 32

b) 20 d) 28

11. (UECE) O palco de um teatro tem a forma de um trapézio isósceles cujas medidas de suas linhas de frente e de fundo são respectivamente 15 m e 9 m. Se a medida de cada uma de suas diagonais é 15 m, então a medida da área do palco, em m^2, é

a) 80 x c) 108

b) 90 d) 118^2

12. (UFRN) Dois círculos são concêntricos, e o primeiro, de área 100π m^2 possui uma corda de 16 m tangenciando o segundo. A área do segundo círculo é:

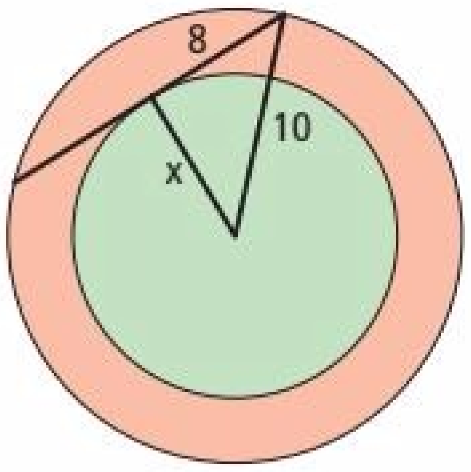
a) $28\,\pi$ m^2

x b) $36\,\pi$ m^2

c) $45\,\pi$ m^2

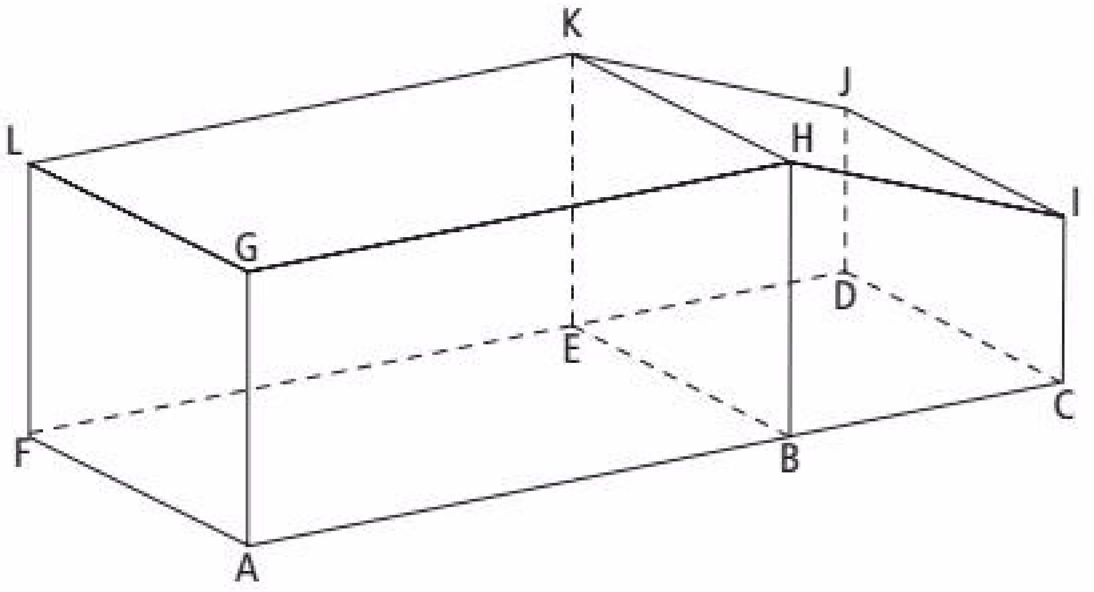
d) $62\,\pi$ m^2

e) $64\,\pi$ m^2



13. (EsPCEx) O sólido geométrico a seguir é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.

Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$, e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

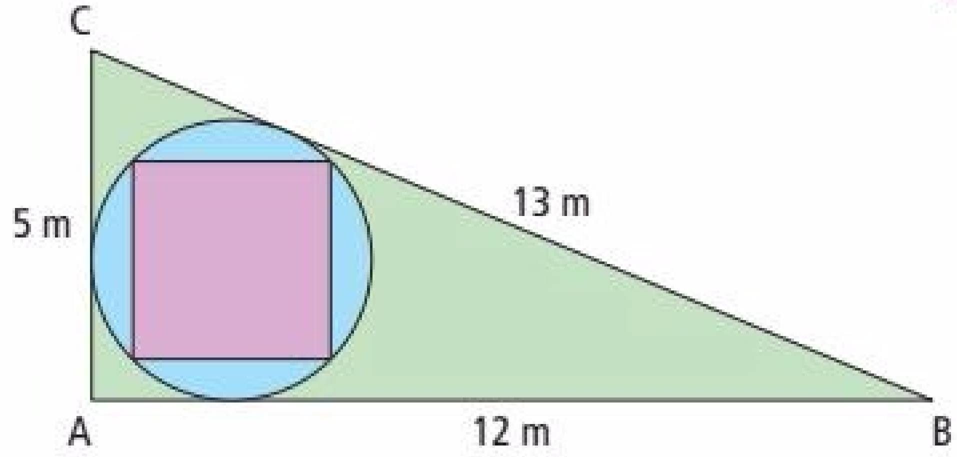
c) concorrentes; reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

x e) concorrentes; concorrentes; reversas.

14. (UFPA) Observe a figura dada. Temos um triângulo retângulo, com um círculo inscrito, e, dentro do círculo, um quadrado inscrito. Calcule a área interior ao círculo e exterior ao quadrado, como mostra a figura.

4,56 m^2



Ilustrações: Editoria de arte

15. (OBMEP) Numa folha quadrada de papel de 30 cm de lado, branca de um lado e cinza do outro, marcou-se um quadrado ABCD em linhas pontilhadas, como na figura 1. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na figura 2, onde a parte cinza é um quadrado de área 144 cm^2.

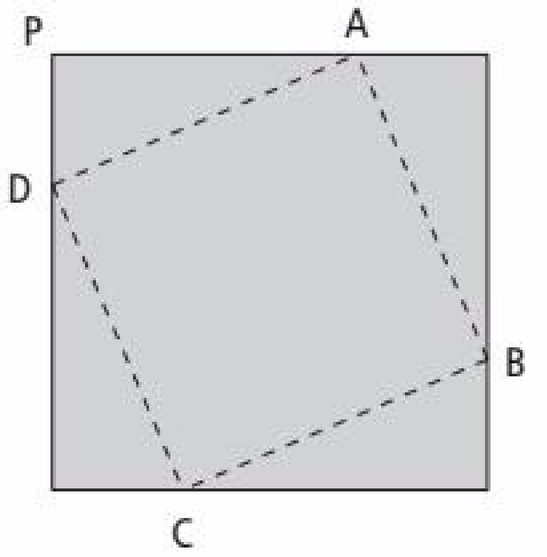


Figura 1.

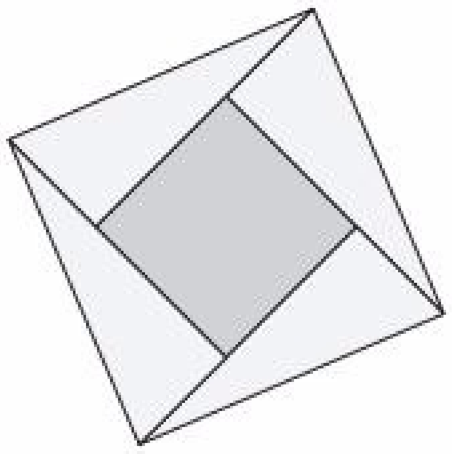


Figura 2.

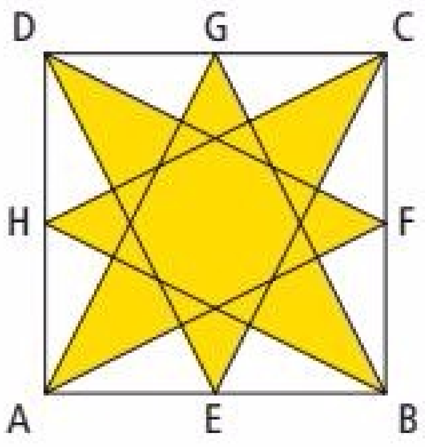
Qual é o comprimento do segmento $\overline{PA}$?

x a) 21 cm d) 24 cm

b) 22 cm e) 25 cm

c) 23 cm

16. (Uespi-PI) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado com lado medindo $2\sqrt{5}$, e E, F, G e H são os pontos médios respectivos dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Qual a área da região colorida de amarelo?

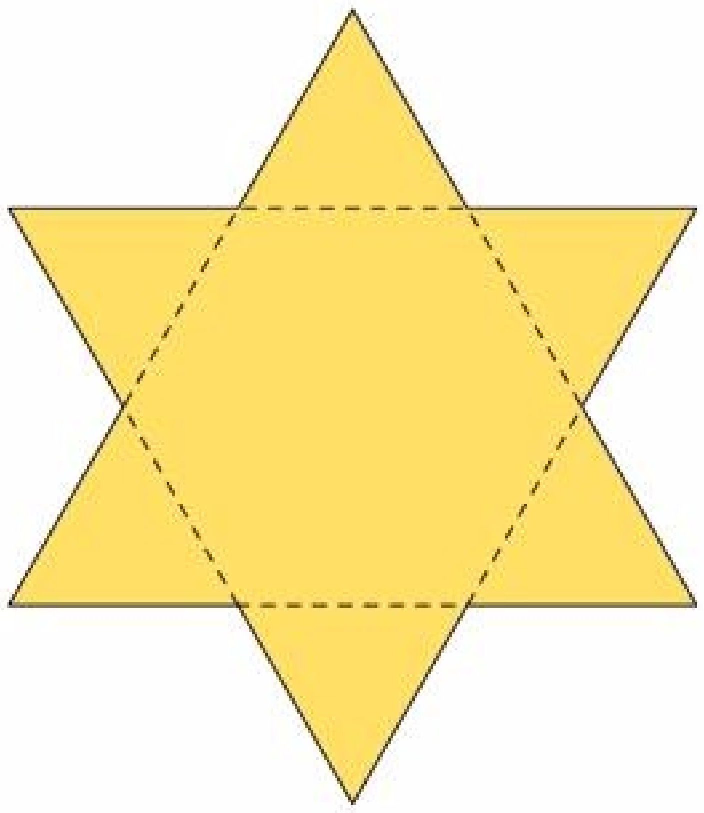


a) 10 d) 13

b) 11 e) 14

x c) 12

17. (Fuvest-SP) Uma "estrela de seis pontas" regular é formada por dois triângulos equiláteros entrelaçados. A razão entre a área de um dos triângulos e a área da estrela vale:



Ilustrações: Editoria de arte

a) $\frac{1}{1}$

X b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{6}$

18. (Efoa-MG) Um quadrado está inscrito num círculo. Outro quadrado está inscrito num círculo com raio 20% maior. A área do segundo quadrado é maior que a área do primeiro em:

X a) 44%

b) 42%

c) 40%

d) 22%

e) 20%

19. (UFRN) Um plano é determinado por:

a) uma única reta.

b) duas retas quaisquer.

c) três pontos quaisquer.

X d) uma reta e um ponto não pertencente a ela.

e) uma reta e um ponto a ela pertencente.

20. (Ufop-MG) Complete o quadro abaixo, onde *r, s, t, u, v* são retas distintas do plano. O símbolo ⊥ aparece:

	r	s	t
u	//		⊥
v		⊥	
s	⊥		

a) 3 vezes

b) 4 vezes

X c) 5 vezes

d) 6 vezes

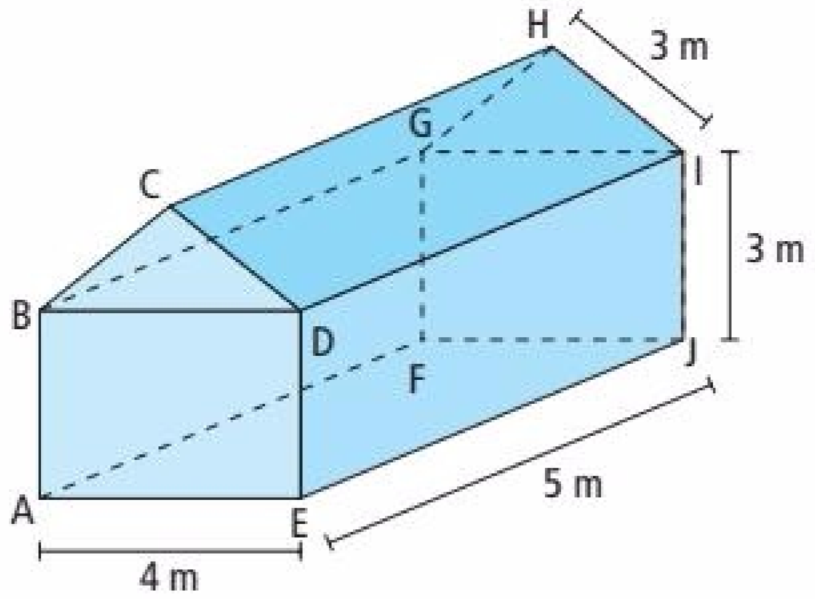
e) 7 vezes

21. (UFPB) Ao verificar que faltava uma semana para a prova de Matemática, Maria e João foram à escola estudar. Ao entrar na biblioteca, Maria percebeu que a mesma tinha a forma da figura a seguir, onde ABDEJFGI é um paralelepípedo reto-retângulo, BCDIGH é um prisma reto e BCD é um triângulo isósceles. João afirmou:

I. O plano do piso e o plano CDI são secantes.

II. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{IH}$ são concorrentes.

III. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{JI}$ são reversas.



Está(ão) correta(s) apenas:

X a) I

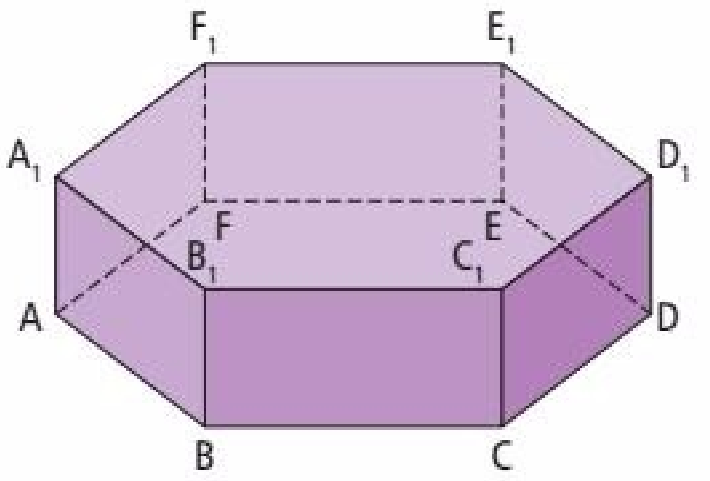
b) II

c) III

d) I e II

e) II e III

22. (UFPE) A figura abaixo ilustra um prisma hexagonal regular $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



Analise a veracidade das afirmações seguintes, referentes às posições relativas de retas e planos contendo vértices desse prisma.

a) A reta contendo a aresta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta contendo a aresta $\overleftrightarrow{D_1E_1}$ são paralelas entre si. Verdadeira.

b) A reta contendo a aresta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta contendo a aresta $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ são reversas. Verdadeira.

c) O plano contendo a face ABB_1A_1 e o plano contendo a face DEE_1D_1 são paralelos. Verdadeira.

d) O plano contendo a face ABB_1A_1 e o plano contendo a face CDD_1C_1 são paralelos entre si. Falsa.

e) A reta contendo a aresta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao plano contendo a face CDD_1C_1. Falsa.

23. Desenhe a figura e depois calcule o que se pede:

- Um plano α. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.
- Um círculo de raio 6 cm contido em α.
- Um ponto *V* que não pertence a α, a 8 cm de altura.

Calcule a medida do segmento de reta VP, sendo *P* um ponto qualquer da circunferência no plano.

24. (UFPR) Com base nos estudos de geometria, é correto afirmar que:

(01) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são necessariamente paralelos entre si.

(02) Se dois planos são paralelos entre si, então qualquer reta perpendicular a um desses planos é perpendicular ao outro plano.

(04) Se uma reta *r* é perpendicular ao plano α no ponto *P*, então qualquer reta de α que passa por *P* é perpendicular a *r*.

(08) Se uma reta *r* é paralela ao plano α, então qualquer reta de α é paralela a *r*.

(16) Se o plano α é perpendicular ao plano β, então qualquer outro plano que seja perpendicular a α é paralelo a β. $2 + 4 + 16 = 22$

25. (Uncisal-AL) Entre retas e planos no espaço, é correto afirmar:

a) Se uma reta *r* é paralela a um plano α, então *r* é paralela a uma única reta contida em α.

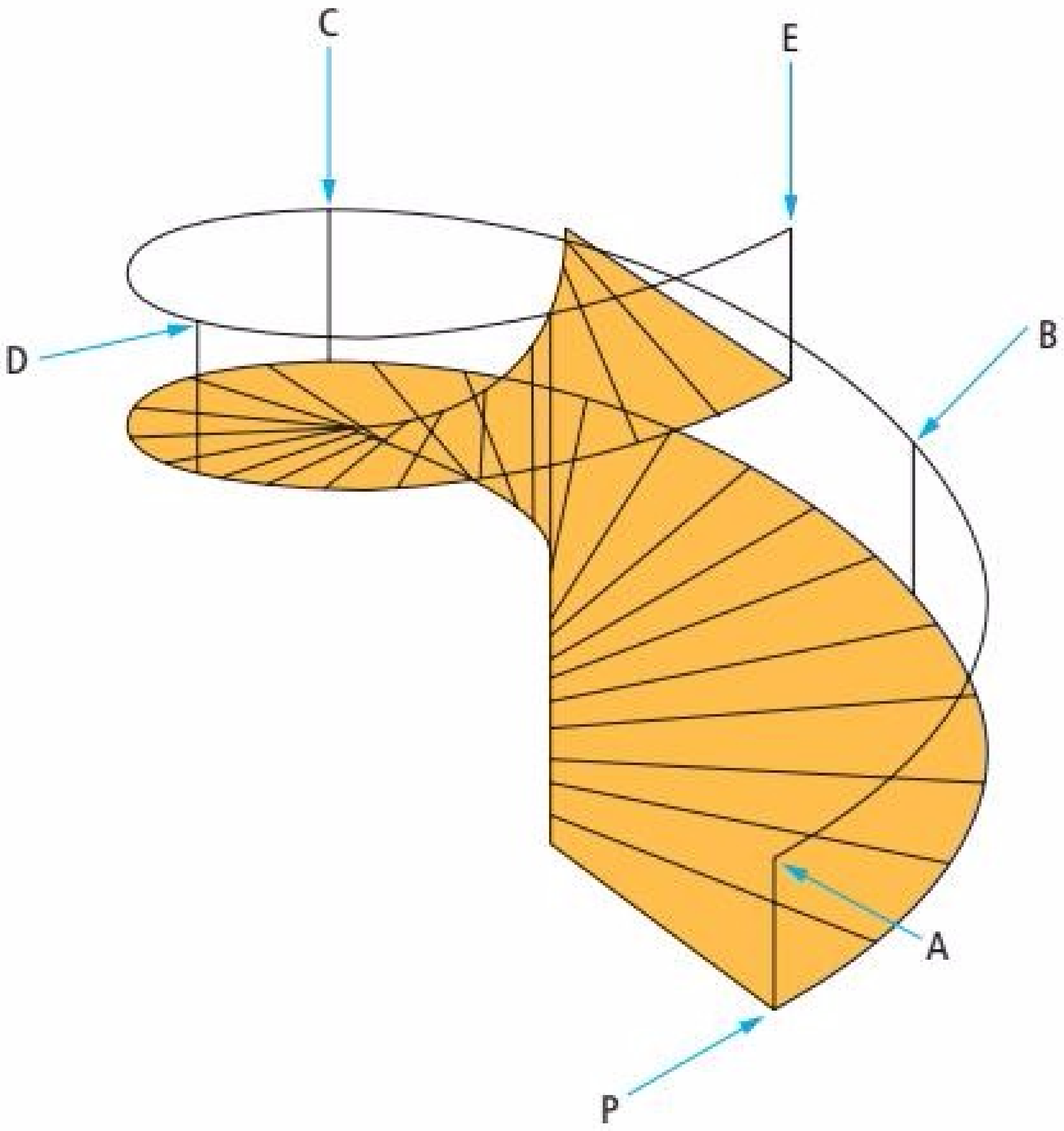
b) Se dois planos α e β têm em comum uma única reta *r*, então existe uma reta paralela a *r* que não é paralela a α e β.

c) Se duas retas *r* e *s* são perpendiculares, então toda reta perpendicular a *r* é paralela a *s*.

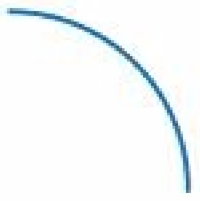
[✓ d)] Se uma reta *s* é perpendicular a um plano β e *t* é uma reta perpendicular a *s*, então $t \subset \beta$ ou $t // \beta$.

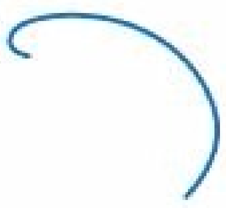
e) Se uma reta e um plano têm um ponto comum, então são secantes.

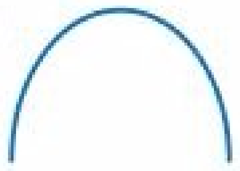
26. (Enem/MEC) O acesso entre dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P*, *A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.

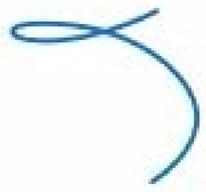


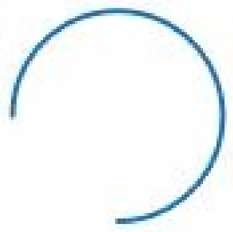
A figura que melhor representa a projeção ortogonal sobre o piso da casa (plano) do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

a)


d)


b)


e)


[✓ c)]


27. (UFSC) Nas figuras 1, 2, 3 e 4 abaixo, *F* está contida em α e é uma circunferência. Se projetarmos *F* ortogonalmente nos planos de projeção π_1 e π_2, é correto afirmar:

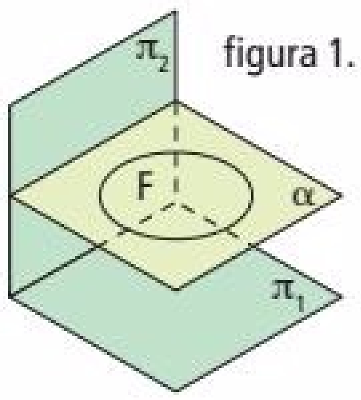


figura 1.

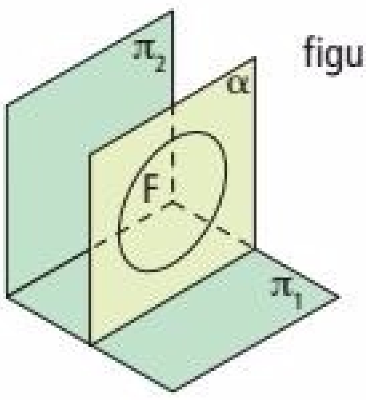


figura 2.

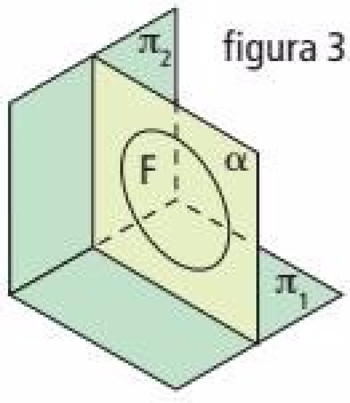


figura 3.

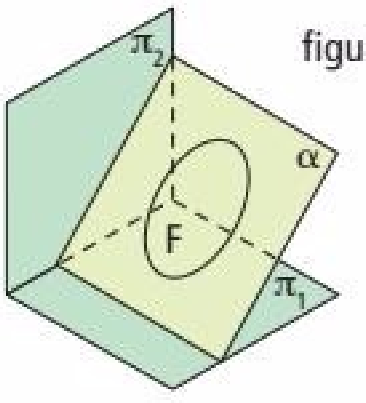


figura 4.

Ilustrações: Editoria de arte

(01) Nas figuras 1 e 2, F se projeta em verdadeira grandeza num dos planos de projeção e como um segmento de reta no outro.

(02) Na figura 3, F se projeta como segmento de reta nos dois planos de projeção.

(04) Na figura 4, F não se projeta em verdadeira grandeza, em nenhum dos planos de projeção.

(08) Nas figuras 3 e 4, F não se projeta em verdadeira grandeza, em nenhum dos planos de projeção.

(16) Nas figuras 2 e 3, F se projeta em verdadeira grandeza nos dois planos de projeção.

Qual é a soma dos números associados às afirmações verdadeiras? $01 + 02 + 04 + 08 = 15$

28. (UFAL) Considere dois planos, α e β, perpendiculares entre si, e os pontos X, Y e Z tais que:

- X e Y estão em um mesmo semiespaço em relação a α, mas em semiespaços diferentes em relação a β.
- X e Z estão em semiespaços distintos em relação a α e a β.

Nessas condições, é verdade que o segmento de extremos Y e Z:

a) intercepta α.

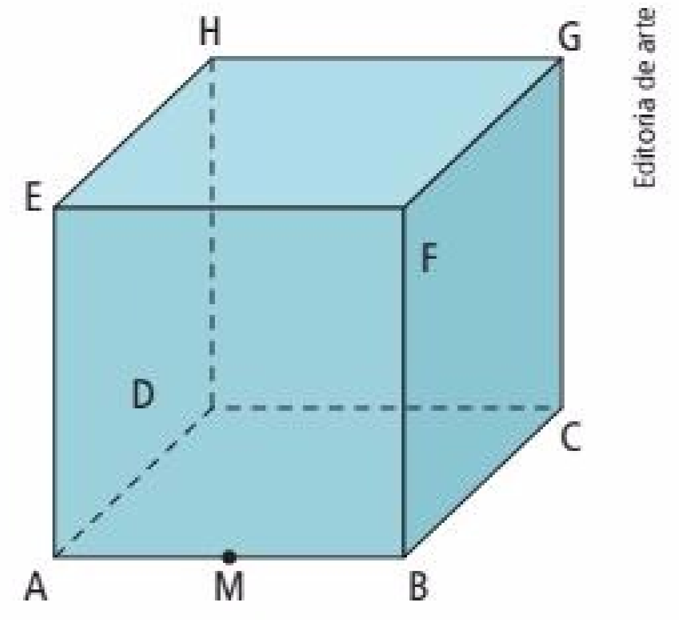
b) intercepta β.

c) não intercepta nem α nem β.

d) está contido em α.

X e) está contido em β.

29. (UnB-DF) A figura mostra pontos sobre as arestas de um cubo. Sabendo que M é ponto médio de $\overline{AB}$, julgue os itens a seguir.



Editoria de arte

V a) O triângulo AHC é equilátero.

V b) O triângulo AHM é retângulo em A.

V c) O triângulo HMG é isósceles com base $\overline{HG}$.

F d) $\overline{EM}$ é perpendicular a $\overline{MC}$.

F e) As retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{MC}$ são paralelas.

30. (UEPB) Entre as proposições dadas abaixo, a única correta é:

a) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.

X b) Duas retas concorrentes determinam um único plano.

c) Os pontos $(-1, 2)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$ são colineares.

d) Se duas retas, r, s, do espaço são paralelas a um plano α, então r e s são paralelas.

e) Dados dois pontos distintos, A, B, do espaço, existe um único plano que os contém.

31. (PUC-SP) São dadas as proposições:

I. Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é perpendicular a todas as retas desse plano.

II. Se um plano é perpendicular a outro, então ele é perpendicular a qualquer reta desse outro.

III. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um é paralela ao outro.

Quais delas são verdadeiras? Apenas a III.

32. (Fatec-SP) A reta r é a intersecção dos planos α e β, perpendiculares entre si. A reta s, contida em α, intercepta r no ponto P. A reta t, perpendicular a β, intercepta-o no ponto Q, não pertencente a r. Nessas condições, é verdade que as retas:

a) r e s são perpendiculares entre si.

b) s e t são paralelas entre si.

c) r e t são concorrentes.

d) s e t são reversas.

X e) r e t são ortogonais.

33. (UFMA) Analise as proposições abaixo e marque a alternativa correta.

I. Se dois planos α e β são ortogonais, então todas as retas que pertencem a α são ortogonais às retas pertencentes a β.

II. Se duas retas forem ortogonais e reversas, toda reta ortogonal a uma delas será paralela à outra.

III. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

a) Apenas I é verdadeira.

X b) I, II e III são falsas.

c) Apenas III é verdadeira.

d) Apenas II é verdadeira.

e) I, II e III são verdadeiras.

34. (Vunesp-SP) Dado um paralelepípedo retângulo, indiquemos por *A* o conjunto das retas que contém as arestas desse paralelepípedo e por *B*, o conjunto dos planos que contém suas faces. Isto posto, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) Quaisquer que sejam os planos α e β de *B*, a distância de α a β é maior que zero.

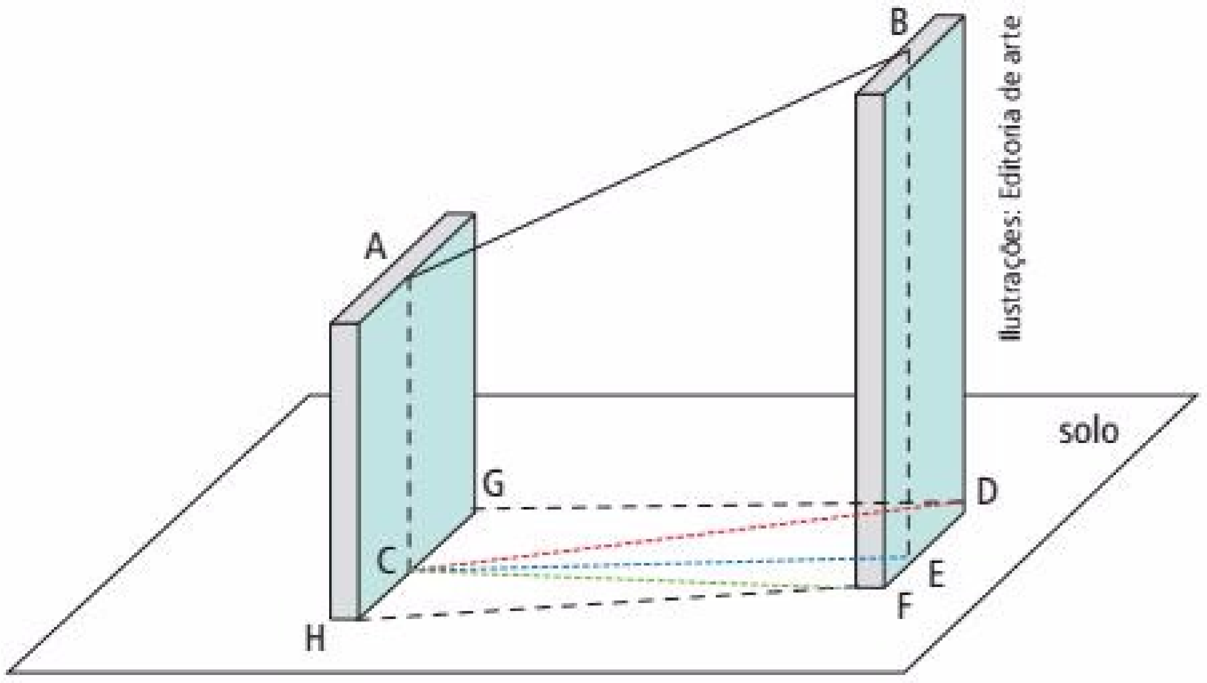
b) Se *r* e *s* pertencem a *A* e são reversas, a distância de *r* a *s* é maior que a medida da maior das arestas do paralelepípedo.

c) Todo plano perpendicular a um plano de *B* é perpendicular a exatamente dois planos de *B*.

x d) Toda reta perpendicular a um plano de *B* é perpendicular a exatamente dois planos de *B*.

e) A intersecção de três planos quaisquer de *B* é sempre um conjunto vazio.

35. (UEA-AM) Uma haste de metal foi presa entre dois muros, ambos perpendiculares ao solo, nos pontos *A* e *B*, conforme mostra a figura.

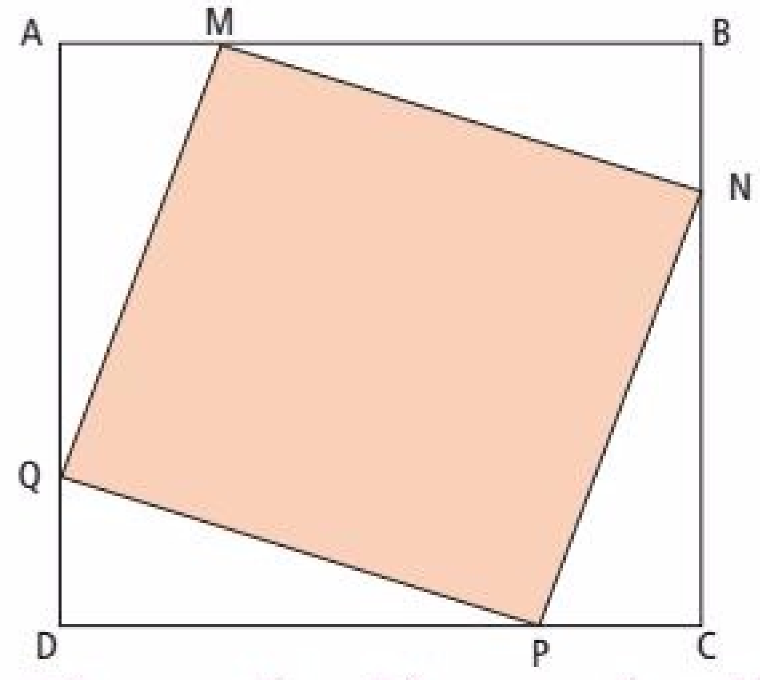


Ilustrações: Editoria de arte

A projeção ortogonal dessa haste, no solo, é representada na figura pelo segmento.

a) $\overline{HF}$
b) $\overline{GD}$
c) $\overline{CD}$
x d) $\overline{CE}$
e) $\overline{CF}$

36. (UFF-RJ) A figura abaixo representa um quadrado MNPQ inscrito no quadrado ABCD cuja área mede 16 cm².



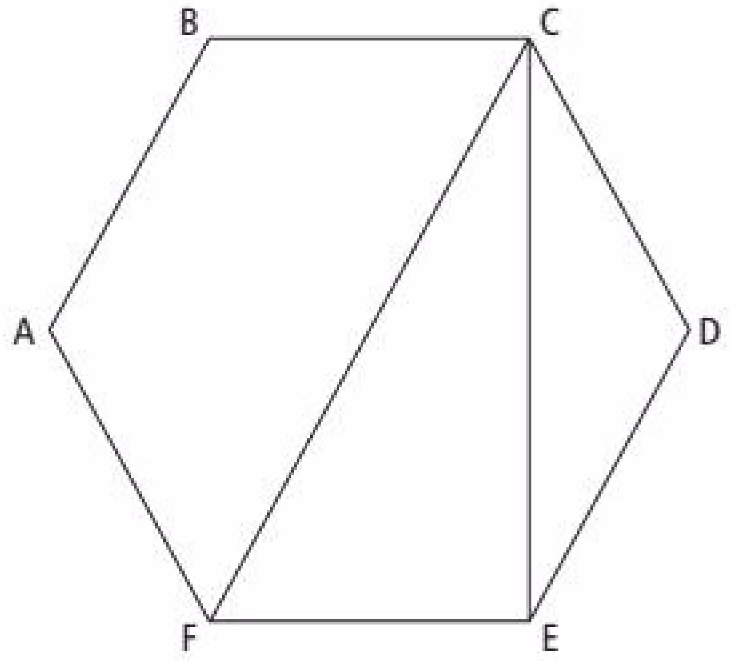
Determine:

a) as medidas de AM e MB para que a área do quadrado MNPQ seja igual a 9 cm².

b) as medidas de AM e MB para que a área do quadrado MNPQ seja a menor possível. $\overline{AM} = \overline{MB} = 2$ cm

Justifique suas respostas.

37. (UFJF-MG) Na figura a seguir, representa-se um Hexágono Regular ABCDEF em que cada lado mede 12 centímetros.



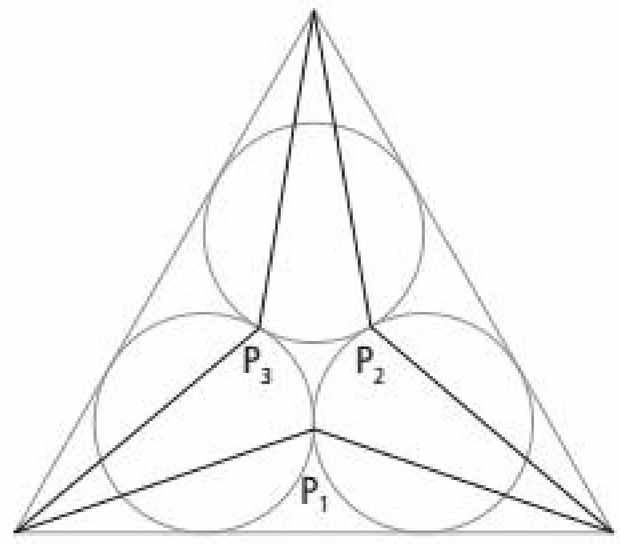
Determine:

a) O valor da medida do perímetro e da área do Hexágono Regular ABCDEF. 72 cm e $216\sqrt{3}$ cm²

b) O valor das medidas das diagonais $\overline{CF}$ e $\overline{CE}$ deste Hexágono Regular ABCDEF. $\overline{CE} = 12\sqrt{3}$ cm e $\overline{CF} = 24$ cm

c) A razão entre as medidas dos comprimentos dos círculos circunscrito e inscrito, ao Hexágono Regular ABCDEF. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

38. (Fuvest-SP) São dadas três circunferências de raio *r*, duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são P_1, P_2 e P_3.



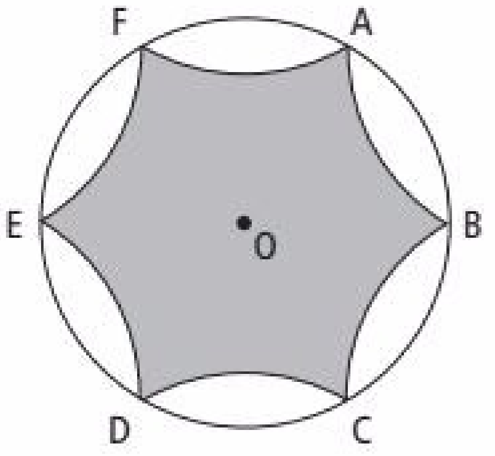
Calcule, em função de *r*,

a) o comprimento do lado do triângulo equilátero *T* determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira; $2r(1+\sqrt{3})$

b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo *T* mais próximos a ele. $r^2(3+\sqrt{3})$

36. a) $\overline{AM} = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm e $\overline{MB} = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm ou $\overline{AM} = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm e $\overline{MB} = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm

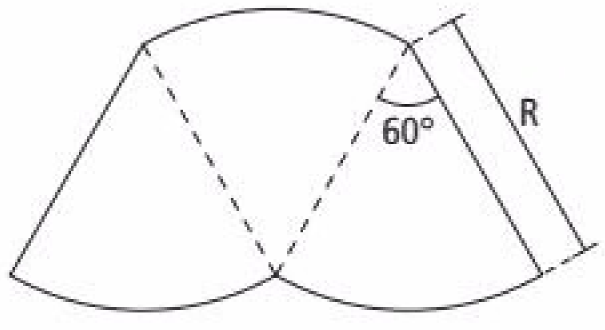
39. (UFG-GO) Uma medalha, apresentada na figura a seguir, é fabricada retirando-se de um círculo de metal a área que compreende a região sombreada (cinza escuro). Na figura, os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são os vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de centro O e raio 1 cm. Os arcos AF, FE, ED, DC, CB e BA são arcos de outras circunferências com raio igual a 1 cm.



Ilustrações: Editoria de arte

Nessas condições, calcule a área da região sombreada (cinza escuro). $\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ cm²

40. (Enem/MEC) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

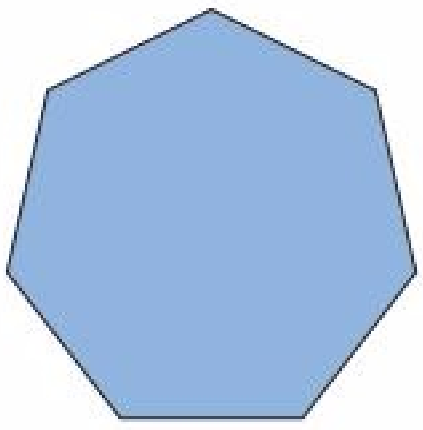
Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para *R*, em metros, deverá ser

a) 16 c) 29 e) 49

[✓ b) 28] d) 31

41. (IFSP) Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era "quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?"

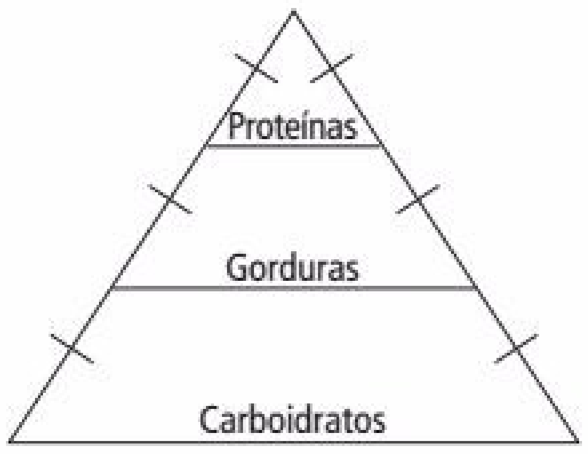


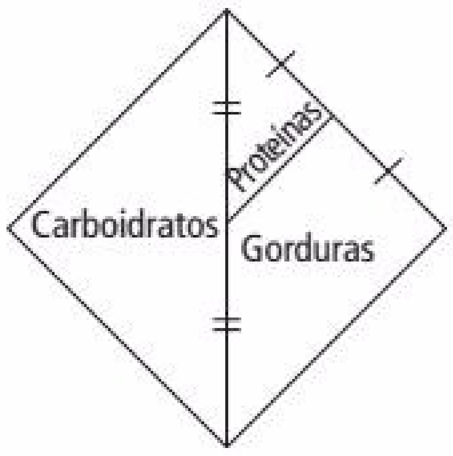
Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

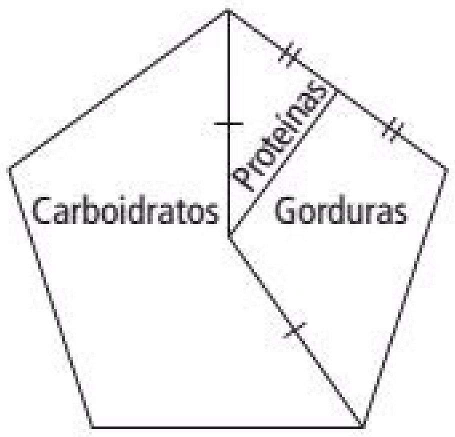
a) 720° c) 540° e) 630°

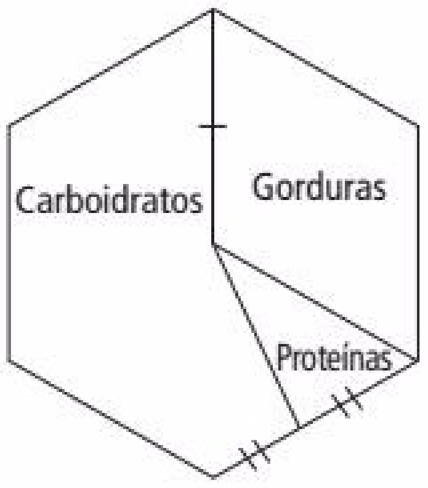
[✓ b) 900°] d) 1 080°

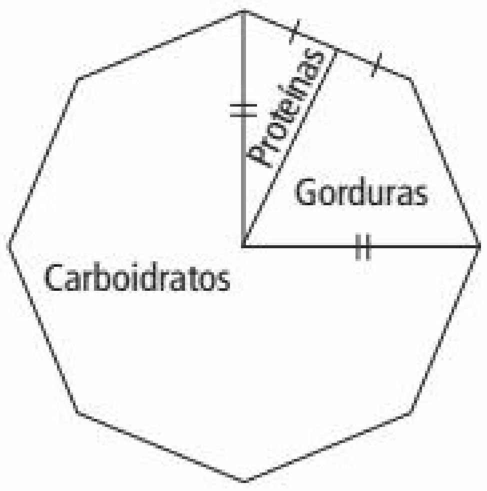
42. (Enem/MEC) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a divisão dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mecionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:











Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo d) hexágono

b) losango e) octógono

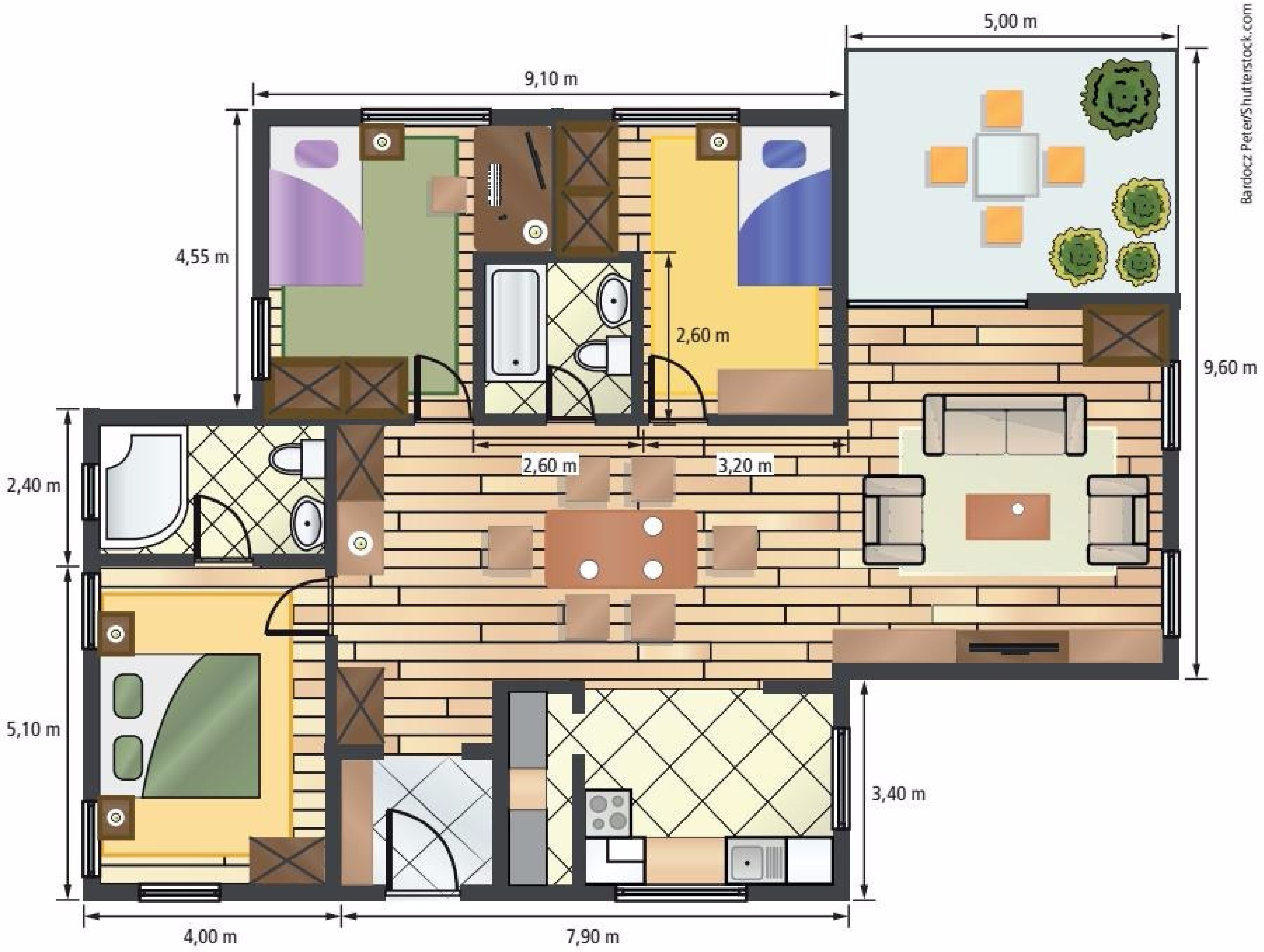
[✓ c) pentágono]

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade você conheceu um pouco mais a respeito do conceito de planta baixa, suas características e sua importância para uma construção.

A imagem a seguir ilustra a planta baixa de um imóvel de 3 dormitórios. Considere que as medidas estão indicadas em metro e que portas e corredores de passagem têm 90 cm de largura. Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos dessa unidade para realizar as atividades a seguir.



Bardocz Peter/Shutterstock.com

1. A partir das informações contidas na planta baixa representada acima, determine:
   a) Qual é a área total dos banheiros? Veja o Manual do Professor.
   b) Qual será o custo mínimo para o revestimento do piso dos banheiros, sabendo que serão utilizadas cerâmicas vendidas em caixas de 1,2 m², ao custo de R$ 75,00 cada caixa?
   c) Qual é o perímetro do quarto de casal?
   d) Supondo que o pé-direito desse apartamento possua exatamente 2,7 m de altura em todos os ambientes, qual é a posição relativa entre o plano que contém o piso e o plano que contém o teto?
2. Com base no modelo de planta baixa apresentado, faça uma representação esquemática de sua casa. Perceba que detalhes como pequenos objetos de decoração, roupas e utensílios de cozinha não fazem parte do desenho, mas objetos maiores como cama, cadeiras e até tapetes são utilizados na apresentação do ambiente.
3. Reúna-se com mais dois colegas e pesquise a respeito das profissões e respectivos cursos de graduação de arquiteto e engenheiro civil. Elabore um relatório contendo informações como: tempo mínimo de formação; principais tópicos estudados na formação superior; atribuições profissionais; possíveis alocações de trabalho etc. Se possível, converse com profissionais ou estudantes dessas áreas.

Unidade 4

Análise combinatória

Estamos rodeados de informações visuais que nos auxiliam e orientam. Basta olhar para as sinalizações de trânsito, placas de ruas, painéis publicitários, numeração de edificações, placas de identificação de veículos, linhas de ônibus entre outras.

Muitas estão tão associadas ao nosso cotidiano, que, por vezes, não nos damos conta de sua importância. Imagine como seria difícil localizar um endereço sem as placas com os nomes das ruas e os números dos imóveis; atravessar uma avenida movimentada, sem faixas de pedestres e semáforos, entre outras situações.

Algumas dessas inúmeras sinalizações seguem regulamentações de padronização, como é o caso das placas de trânsito e de identificação dos veículos que possuem linguagem e códigos próprios.

Em 1990, as placas de veículos com duas letras e quatro números foram substituídas por placas com três letras e quatro números.

342M-10
SP-SÃO LUIZ DO PARAITINGA
CHH·0005
TAXI

Identificação de linha de ônibus.

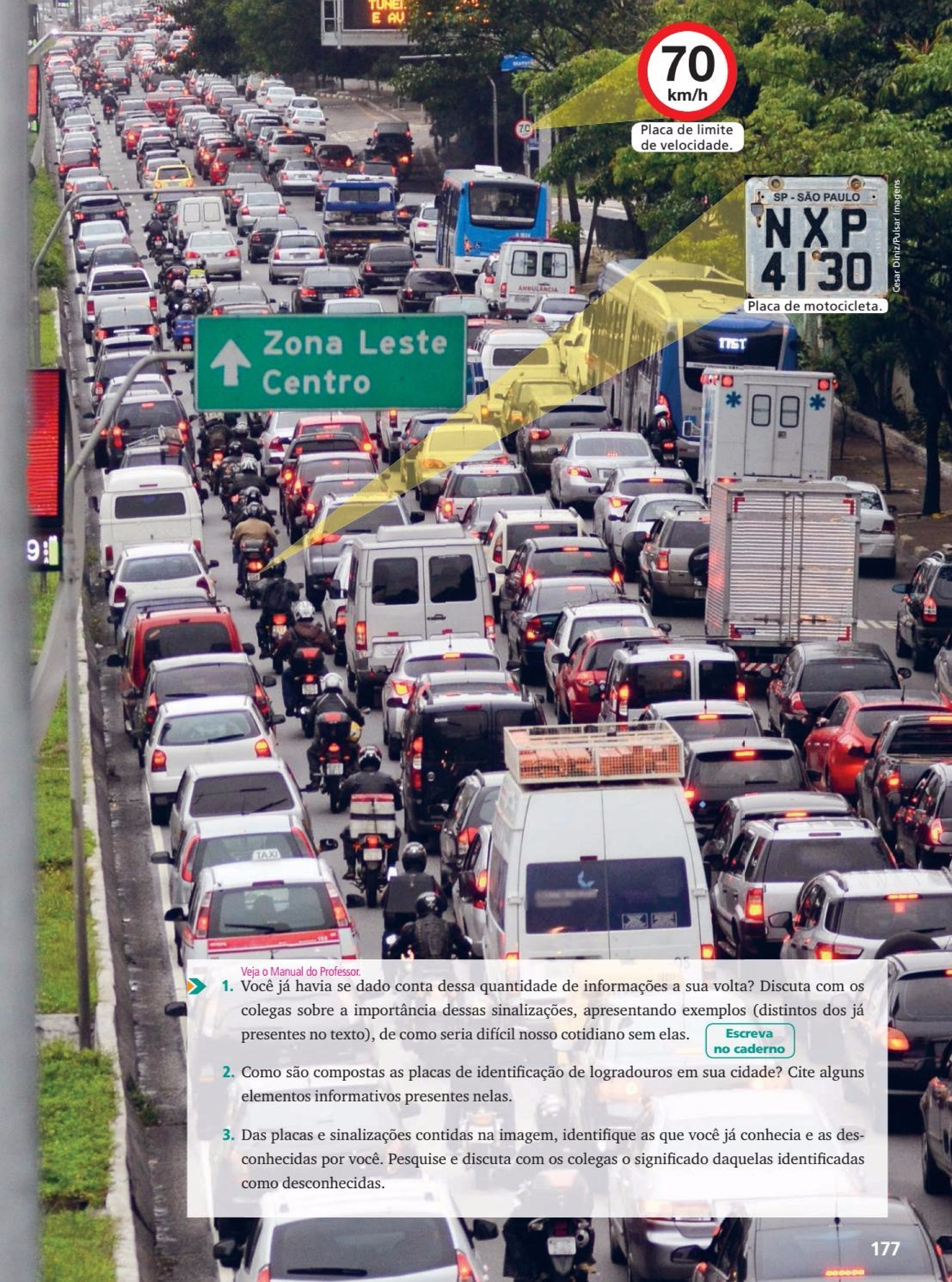
Filipe Frazao/Shutterstock.com

Placa de veículo.

Cesar Diniz/Pulsar Imagens

Av. Vinte e três de maio, São Paulo (SP). Fotografia de 2014.

Levi Bianco/Getty Images



Placa de limite de velocidade.

Placa de motocicleta.

Cesar Diniz/Pulsar Imagens

Veja o Manual do Professor.

1. Você já havia se dado conta dessa quantidade de informações a sua volta? Discuta com os colegas sobre a importância dessas sinalizações, apresentando exemplos (distintos dos já presentes no texto), de como seria difícil nosso cotidiano sem elas.

Escreva no caderno

2. Como são compostas as placas de identificação de logradouros em sua cidade? Cite alguns elementos informativos presentes nelas.

3. Das placas e sinalizações contidas na imagem, identifique as que você já conhecia e as desconhecidas por você. Pesquise e discuta com os colegas o significado daquelas identificadas como desconhecidas.

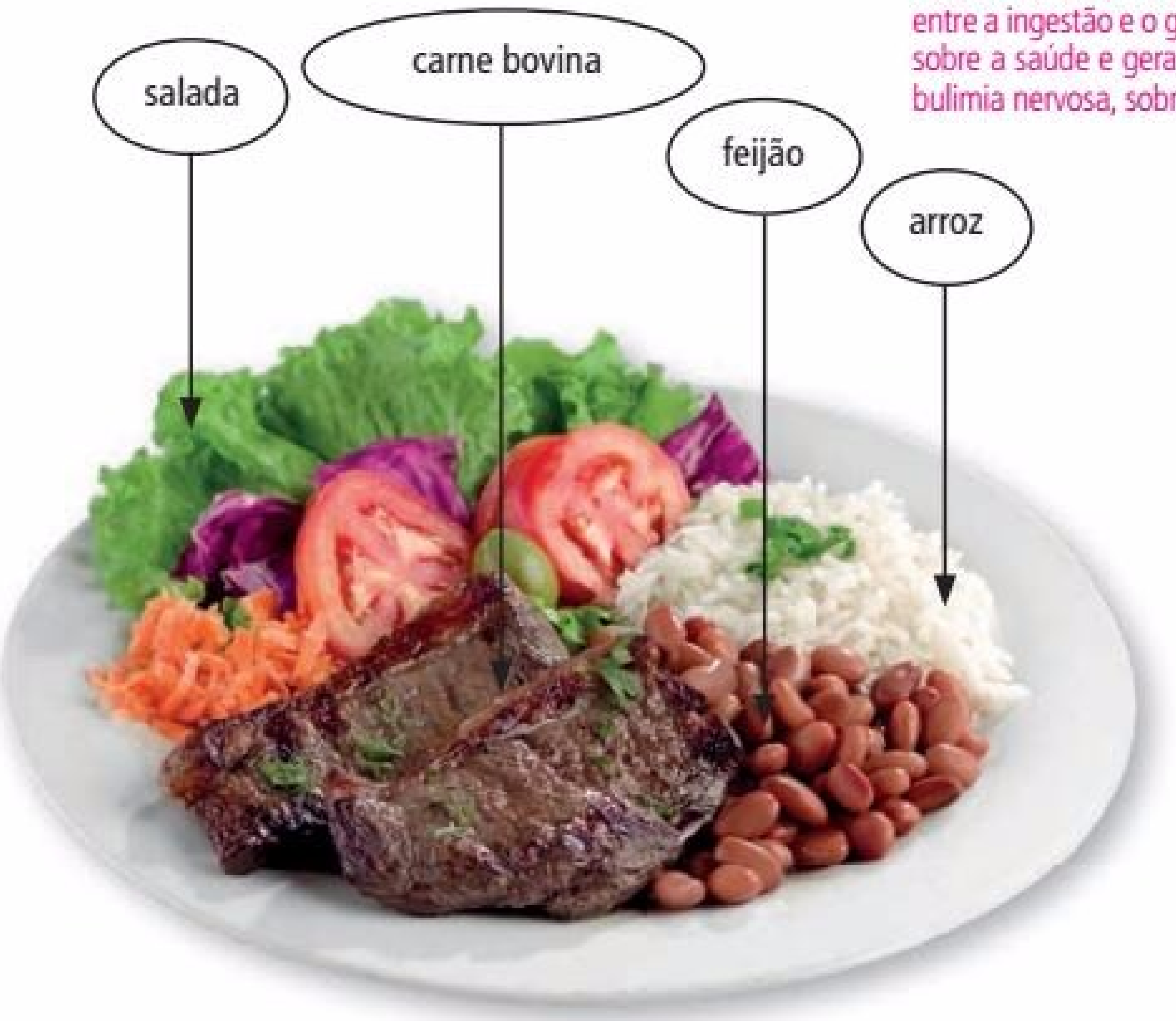
CAPÍTULO 8

Combinatória

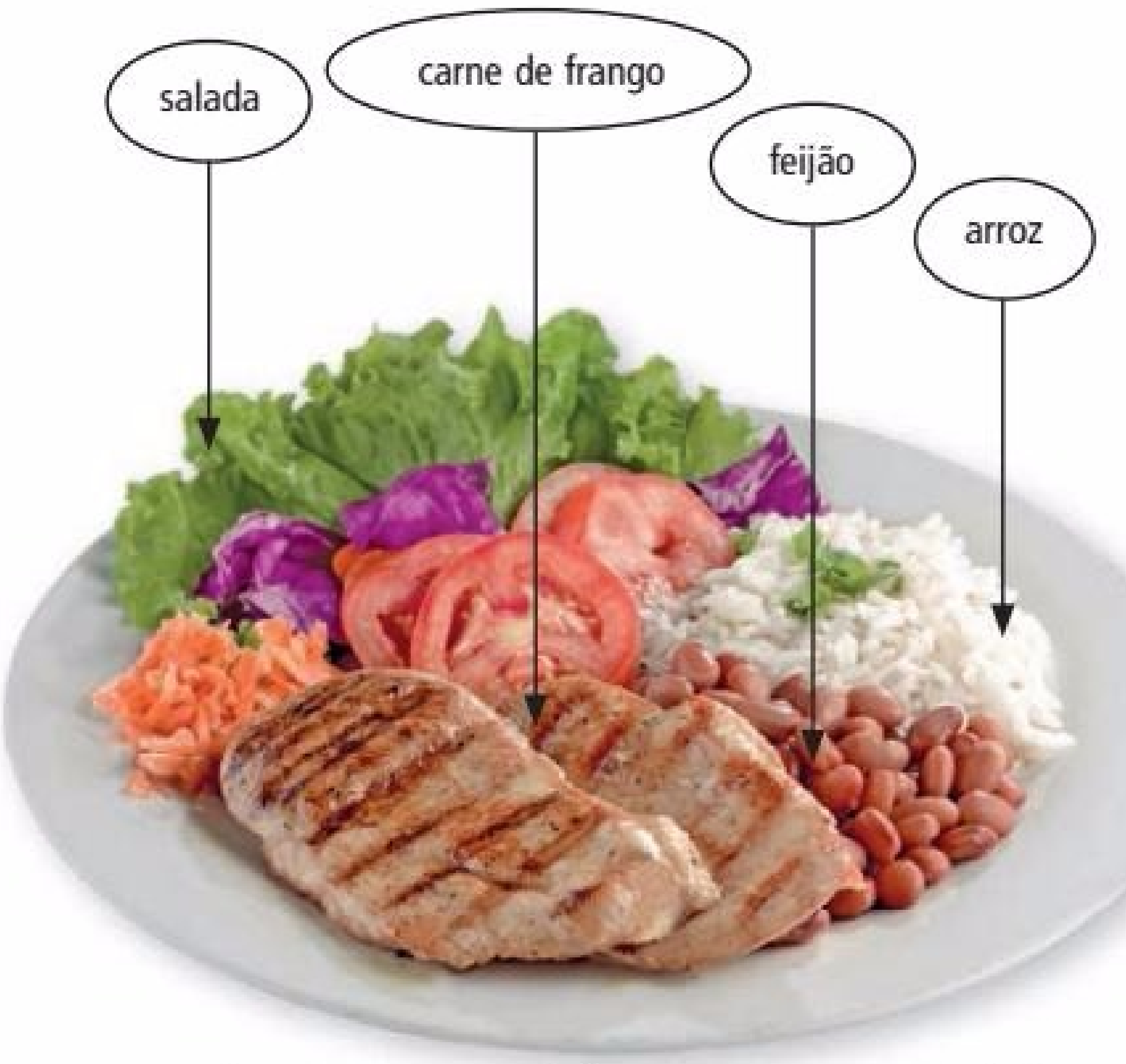
Neste capítulo, estudaremos situações relacionadas ao cálculo da quantidade de combinações possíveis entre elementos dados.

Por exemplo, os dois pratos apresentados a seguir foram compostos pelos mesmos elementos, modificando-se apenas o tipo de carne.

Professor, esse pode ser um momento importante para esclarecer as consequências de uma dieta desequilibrada entre a ingestão e o gasto de energia na adolescência. Uma alimentação inadequada pode causar grandes impactos sobre a saúde e gerar problemas como excesso ou perda de peso, desnutrição aguda e crônica, anorexia nervosa, bulimia nervosa, sobrepeso, obesidade, aterosclerose e hipertensão arterial.



Prato com carne bovina na sua composição.



Prato com carne de frango na sua composição.

Fotos: diogoppr/Shutterstock.com

Imagine que, além de modificar o tipo de carne, seja possível modificar o tipo de arroz, escolhendo um dos 12 tipos apresentados a seguir.

Madlen/Shutterstock.com

O arroz é um alimento muito consumido pelos brasileiros e é encontrado em diferentes tipos.

Usando conceitos de Análise combinatória estudaremos que, considerando uma opção de salada, uma opção de feijão, duas opções de carne e 12 opções de arroz, é possível montar 24 pratos diferentes.

Princípio multiplicativo

Margarete trabalha em uma loja de roupas masculinas e ficou responsável por vestir um dos manequins da vitrine durante uma semana, e a cada dia ela precisa apresentar o manequim vestido com uma combinação diferente de roupas. Sem saber quantas peças seriam necessárias para montar as sete combinações, ela separou uma calça, uma bermuda e quatro camisetas.

Para verificar se havia separado a quantidade de peças suficiente, Margarete vestiu o manequim quatro vezes, usando a bermuda e cada uma das quatro camisetas, obtendo o resultado ao lado.

Depois de ter vestido o manequim quatro vezes, Margarete percebeu que ela teria mais quatro combinações, pois bastava substituir a bermuda pela calça em cada uma das combinações acima. Assim, ela teria ao todo oito combinações; que são suficientes para vestir o manequim durante uma semana.

Para determinar a quantidade de combinações possíveis com as quatro camisetas (verde (V), azul (A), preta (P), rosa (R)), a bermuda (B) e a calça (C), Margarete não precisa vestir o manequim. Ela pode usar alguns recursos para sistematizar seu raciocínio, simplificando a contagem das possibilidades.

glamour/Shutterstock.com

Manequim vestido de diferentes maneiras.

Podemos representar todas as possibilidades por meio de um diagrama chamado **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore** e também por uma **tabela de dupla entrada**.

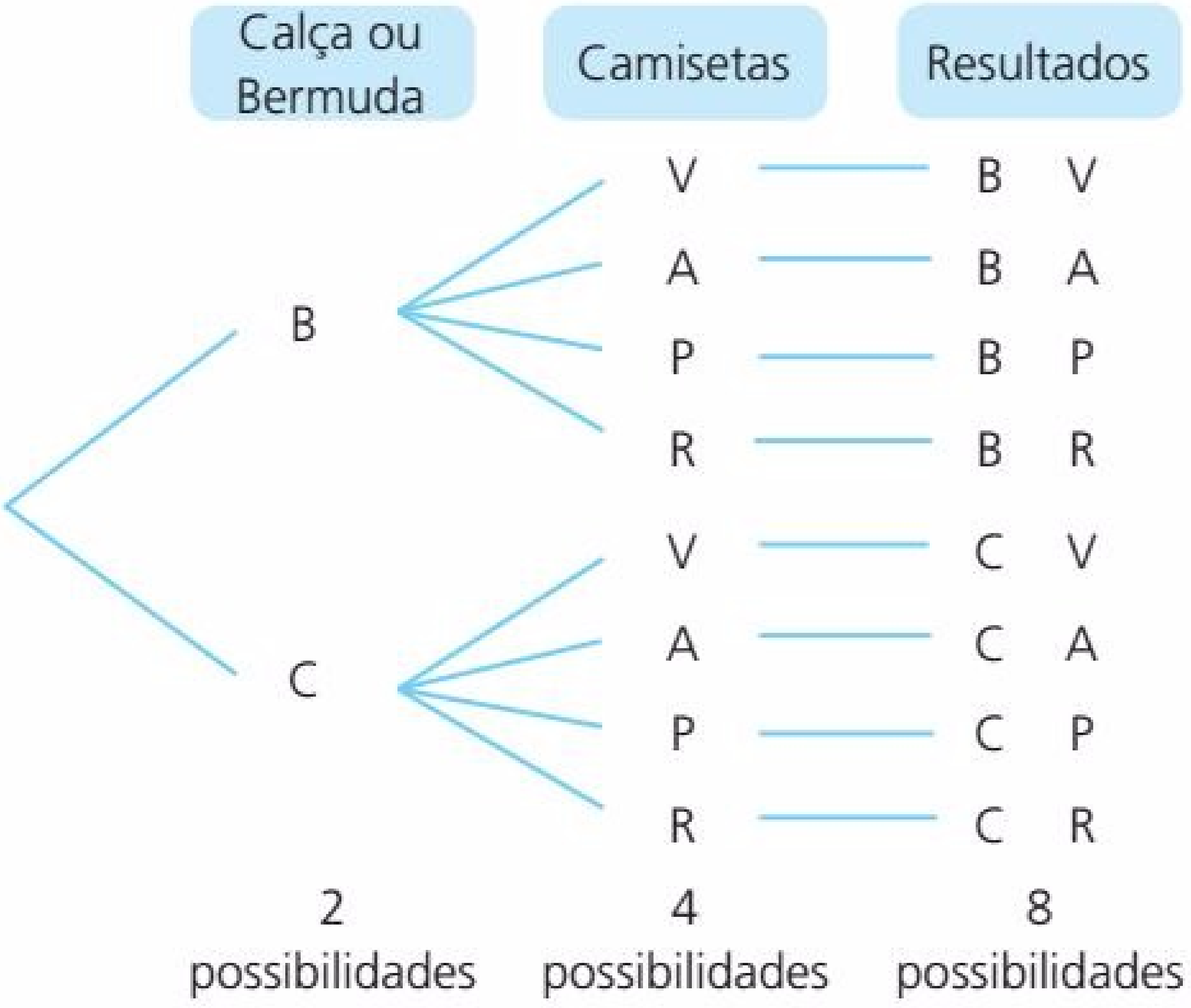


Diagrama de árvore.

Camisetas Bermuda ou calça	V	A	P	R
B	BV	BA	BP	BR
C	CV	CA	CP	CR

Tabela de dupla entrada.

Analisando as árvores de possibilidades e a tabela de dupla entrada, podemos perceber que há:

- 2 possibilidades para vestir a parte de baixo do manequim;
- 4 possibilidades para vestir a parte de cima do manequim.

Desse modo, podemos dizer que o número total de maneiras diferentes de vestir o manequim é $2 \cdot 4 = 8$.

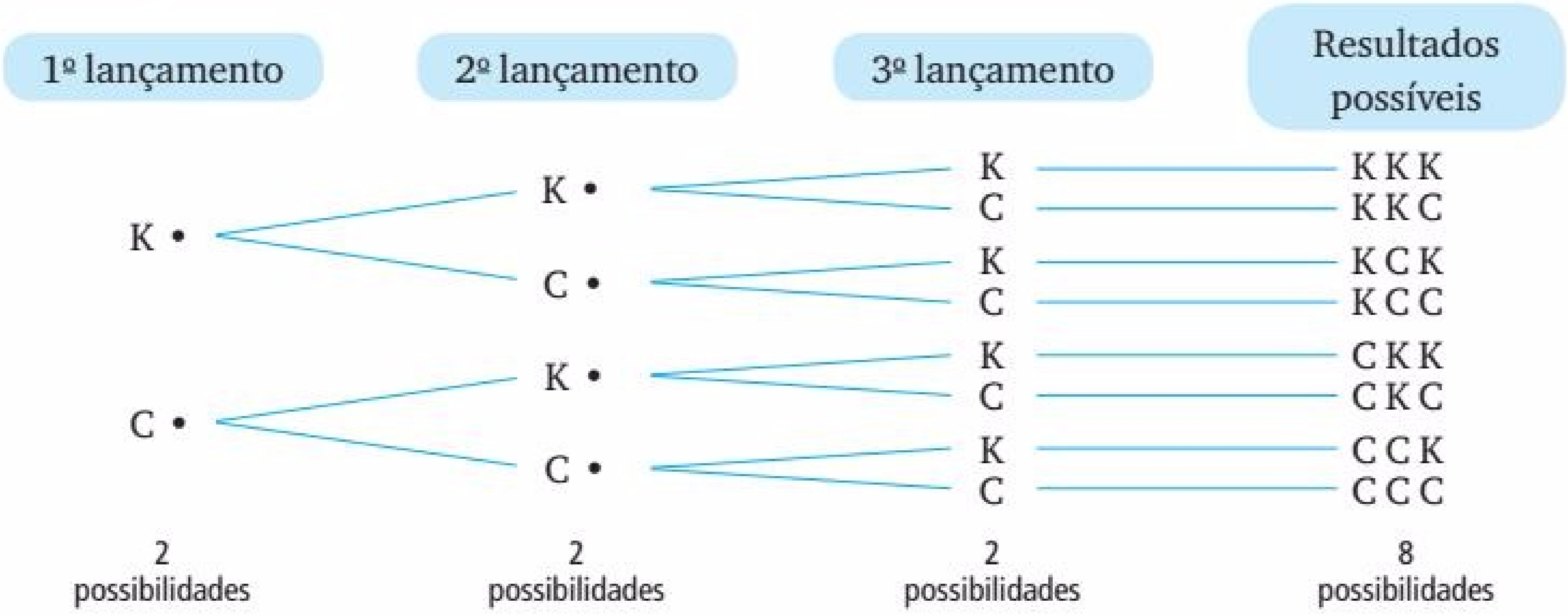
Como o número de resultados foi obtido por meio de uma multiplicação, dizemos que foi aplicado o **princípio multiplicativo** ou **princípio fundamental da contagem**, cujo enunciado é o seguinte.

Se um acontecimento ocorrer por k etapas sucessivas e independentes, de modo que:
p_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa, e para cada possibilidade da 1ª etapa
p_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa, e para cada possibilidade da 2ª etapa
⋮ ⋮
p_k é o número de possibilidades da k-ésima etapa
Então, o produto $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ fornece o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer.

Exercícios resolvidos

1 Uma moeda tem duas faces: cara (K) e coroa (C). Lança-se uma moeda três vezes seguidas e observa-se qual face ficou voltada para cima. Quantos e quais são os resultados possíveis?

Resolução


1º lançamento
2º lançamento
3º lançamento
Resultados possíveis
K
C
K
C
K
C
K
C
K
C
K
C
K
C
KKK
KKC
KCK
KCC
CKK
CKC
CCK
CCC
2 possibilidades
2 possibilidades
2 possibilidades
8 possibilidades

Pelo diagrama de árvore, temos 8 resultados possíveis: KKK, KKC, KCK, KCC, CKK, CKC, CCK, CCC.

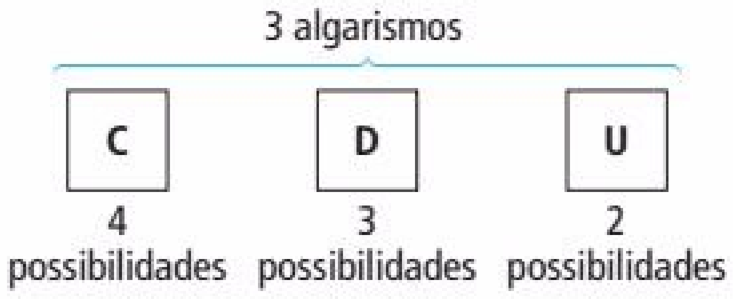
Podemos pensar, também, da seguinte forma:

2 possibilidades para o 1º lançamento; **2** possibilidades para o 2º lançamento e **2** possibilidades para o 3º lançamento. Assim, pelo princípio multiplicativo, podemos fazer $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, ou seja, 8 possibilidades possíveis.

2 Quantos são os números de três algarismos distintos que podemos formar usando os algarismos 2, 5, 6 e 7?

Resolução

Há 4 possibilidades para a casa das centenas (2, 5, 6 ou 7), 3 possibilidades para a casa das dezenas (sobraram três algarismos dos quatro disponíveis) e 2 possibilidades para a casa das unidades:


3 algarismos
C
D
U
4 possibilidades
3 possibilidades
2 possibilidades

Então, o número de possibilidades será $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ou seja, podemos formar 24 números de três algarismos distintos.

3 Um restaurante oferece no cardápio quatro opções de pratos quentes, duas opções de salada, três opções de bebida e duas opções de sobremesa, todas distintas. Escolhendo um prato quente, uma salada, uma bebida e uma sobremesa, um cliente desse restaurante tem quantas possibilidades de pedir uma refeição diferente?

Resolução

Sendo P_1, P_2, P_3 e P_4 as opções de prato quente, S_1 e S_2, as opções de salada, B_1,B_2 e B_3 as opções de bebida e D_1 e D_2, as opções de sobremesa e representando as opções em uma tabela, temos:

Cardápio de um restaurante

Opção	Possibilidades	Número de possibilidades
Prato quente	P_1, P_2, P_3, P_4	4
Salada	S_1, S_2	2
Bebida	B_1, B_2, B_3	3
Sobremesa	D_1, D_2	2

Fonte: Dados fictícios.

Este exercício também pode ser resolvido utilizando a árvore de possibilidades.

Usando o princípio multiplicativo, o número de possibilidades de pedir uma refeição é igual a:

$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$

Portanto, o cliente consegue pedir até 48 refeições diferentes.

4 Os números dos telefones fixos uma cidade têm 8 algarismos. Determine a quantidade máxima de telefones que podem ser instalados, sabendo que os números não devem começar com zero.

Resolução

Como o número do telefone tem 8 algarismos, ele apresenta a seguinte forma:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
9	10	10	10	10	10	10	10

Os algarismos que podem ser colocados em cada posição p_k são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (10 opções), com exceção do zero na 1ª posição (9 opções).

Usando o princípio multiplicativo, o número máximo de telefones é dado por:

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^7 = 90\,000\,000$

Então, a quantidade máxima de telefones que podem ser instalados é 90 000 000.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Uma fábrica de móveis tem dez modelos para mesas e quatro modelos para cadeiras. Quantos pares de modelos de mesa e cadeira a fábrica tem disponíveis? 40 pares de modelos.

2. Pedro tem 5 camisas (branca, amarela, verde, azul e vermelha) e 3 calças (preta, cinza e marrom). De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir, usando uma calça e uma camisa? 15

3. Lança-se uma moeda 4 vezes consecutivas. Quantas sequências de resultados são possíveis? 16

4. Oito caminhos conduzem ao cume de uma montanha. Quantos modos uma pessoa dispõe para subir e descer usando caminhos diferentes? 56 modos.

5. Considere os algarismos 1, 3 e 5.

a) Quantos números de três algarismos distintos é possível formar com esses algarismos? 6 números.

b) Quantos números de três algarismos é possível formar com esses algarismos? 27 números.

6. Oito cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os 3 primeiros lugares? 336 possibilidades.

7. Para responder a certo questionário deve-se preencher o cartão, apresentado a seguir, com uma só resposta para cada questão.

Cartão de respostas					
Questões	1	2	3	4	5
Sim	☐	☐	☐	☐	☐
Não	☐	☐	☐	☐	☐

Há quantas maneiras distintas para responder a esse questionário? 32 maneiras.

8. Para montar um sanduíche, uma lanchonete disponibiliza três tipos de pães, três tipos de hambúrgueres e dois tipos de queijo. Quantas possibilidades distintas há para montar um sanduíche, sabendo que necessariamente a pessoa deve escolher um ingrediente de cada tipo? 18 possibilidades.

9. Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões, sendo um dos vagões utilizado como restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente da composição e que o vagão do restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, de quantos modos diferentes é possível montar essa composição? 600 modos.

10. (Enem/MEC) O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de S. Paulo. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado)

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14
b) 18
[✓ c) 20]
d) 21
e) 23

Fatorial

É comum, nos problemas de contagem, calcularmos o produto de uma multiplicação cujos fatores são números naturais consecutivos. Para evitar que o registro dos cálculos se torne muito extenso, adota-se um símbolo chamado **fatorial**.

Sendo *n* um número natural, com $n \geqslant 2$, definimos **fatorial de *n*** como o produto dos *n* números naturais consecutivos de 1 a *n* e indicamos por **n!** (lê-se: *n* fatorial ou fatorial de *n*).

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por definição:

$$1! = 1 \qquad 0! = 1$$

De acordo com a definição, temos:

- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

A partir da definição de fatorial, podemos escrever, para qualquer *n*, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$:

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}$$

Portanto, $\boxed{n! = n(n-1)!}$

Podemos escrever, por exemplo, $8! = 8 \cdot 7!$, pois:

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 8 \cdot 7!$$

Exercícios resolvidos

5 Calcule: $\dfrac{5!}{3! + 2!}$

Resolução

$$\frac{5!}{3! + 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = \frac{120}{6 + 2} = \frac{120}{8} = 15$$

6 Resolva as equações:

a) $(n-4)! = 120$

b) $\dfrac{(n+2)! \cdot (n-1)!}{(n+1)! \cdot n!} = \dfrac{6}{5}$

Resolução

a) $(n-4)! = 120 \Rightarrow (n-4)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(n-4)! = 5!$

$n - 4 = 5 \Rightarrow n = 9$

O conjunto solução da equação é: $S = \{9\}$

b) Desenvolvendo os fatoriais, temos:

$$\frac{(n+2)! \cdot (n-1)!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{(n+2) \cdot \cancel{(n+1)!} \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n+1)!} \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{n+2}{n} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5n + 10 = 6n \Rightarrow n = 10$$

O conjunto solução da equação é: $S = \{10\}$

7 Simplificar a expressão: $\dfrac{n! - (n+1)!}{n!}$

Resolução

$$\frac{n! - (n+1)!}{n!} = \frac{n! - (n+1)! \cdot n!}{n!} =$$

$$= \frac{n!\left[1 - (n+1)\right]}{n!} = 1 - n - 1 = -n$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

11. Calcule:

a) $\dfrac{6! + 3! - 2!}{5!}$ $\frac{181}{30}$ b) $\dfrac{4! - 2! - 0!}{1!}$ 21

12. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ n

b) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n+1)!}$ 2n + 2

c) $\dfrac{n! - (n+1)!}{n!}$ −n

d) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ n(n + 1)(n + 2)

13. Resolva as equações:

a) $(n-2)! = 720$ S = {8}

b) $(n-2)! = 2(n-4)!$ S = {4}

c) $(n-9)! = 1$ S = {9, 10}

14. Determine o conjunto solução das equações:

a) $\dfrac{x!}{(x-2)!} = 30$ S = {6}

b) $\dfrac{(x+2)!}{3!x!} = \dfrac{x!}{(x-1)!}$ S = {1, 2}

15. (PUC-MG) O número natural que torna verdadeira a igualdade $\dfrac{[(n+2)!\,(n^2)!]}{[n(n+1)!\,(n^2-1)!]} = 35$ é:

a) 3

b) 4

X c) 5

d) 8

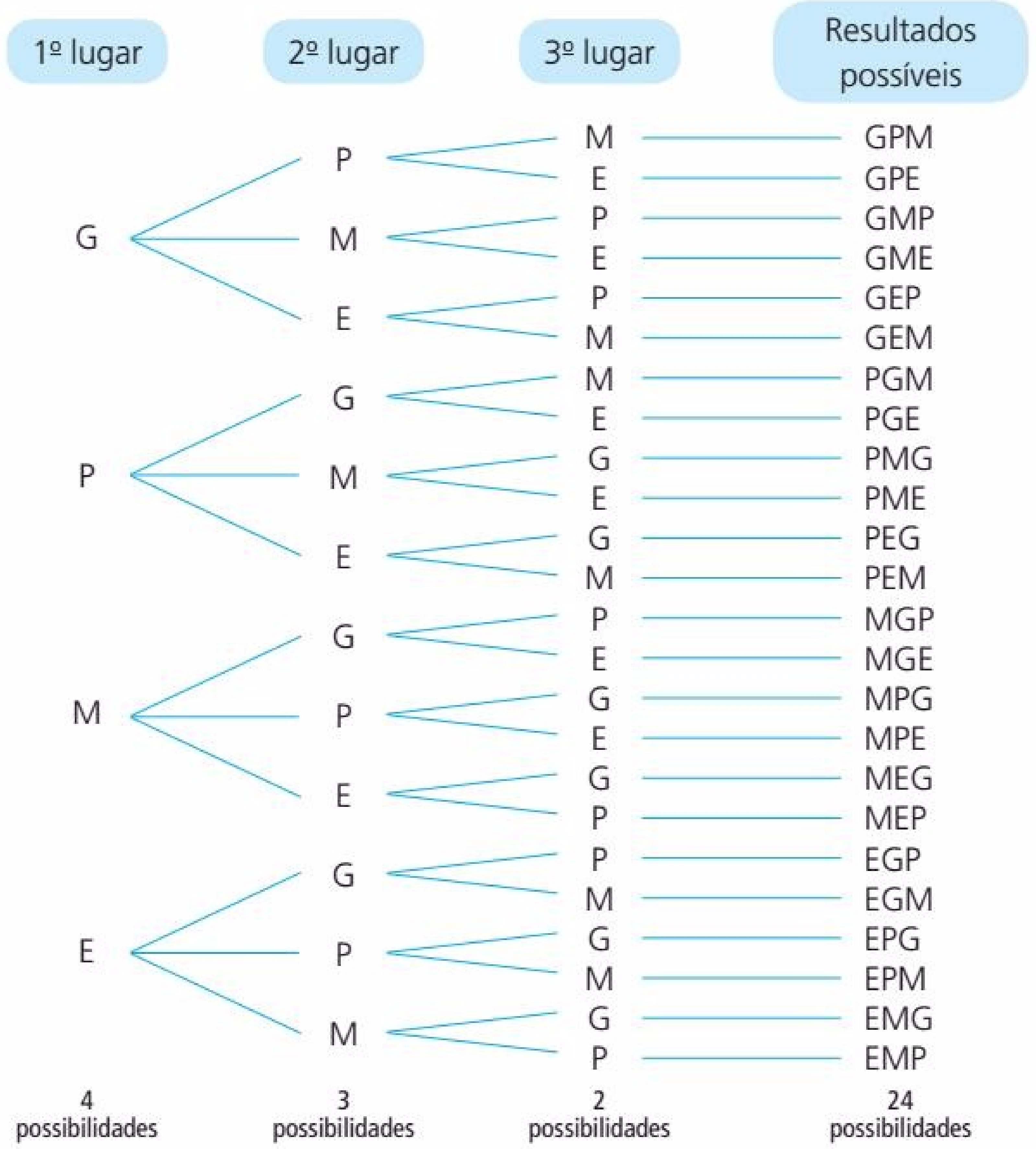
e) 9

Arranjo simples

Analise a seguinte situação:

Quatro atletas, Guilherme (*G*), Paulo (*P*), Marcos (*M*) e Everaldo (*E*), disputam uma corrida. Supondo que todos terminem a prova, quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?

Vamos construir a árvore de possibilidades considerando as opções para o 1º lugar, o 2º lugar e o 3º lugar.


1º lugar
2º lugar
3º lugar
Resultados possíveis
G
P
M
E
P
M
E
GPM
GPE
GMP
GME
GEP
GEM
P
G
M
E
M
E
G
E
G
M
PGM
PGE
PMG
PME
PEG
PEM
M
G
P
E
P
E
G
E
G
P
MGP
MGE
MPG
MPE
MEG
MEP
E
G
P
M
P
M
G
M
G
P
EGP
EGM
EPG
EPM
EMG
EMP
4 possibilidades
3 possibilidades
2 possibilidades
24 possibilidades

No total, existem 4 · 3 · 2 = 24 possibilidades de chegada para os três primeiros lugares.

FÁBIO MOTTA/AGÊNCIA ESTADO/AE

O atletismo é a modalidade mais praticada pelas pessoas com deficiência.

Professor, aqui podemos tratar sobre o respeito e reconhecimento dos direitos que os deficientes possuem e que são iguais aos de qualquer pessoa. Entre esses direitos estão: navegar na internet utilizando programas especiais; assistir a televisão com o auxílio de legendas ou de um intérprete de Libras; acesso a locais públicos e escolas inclusivas.

Veja, por exemplo, as possibilidades em que Guilherme aparece em 1º lugar:

GPM, GPE, GMP, GME, GEP, GEM

Observe que essas possibilidades de chegada diferem entre si:

- pela **ordem dos elementos** (atletas): GPM e GMP, por exemplo;
- pela **natureza dos elementos**: GPM e GPE, por exemplo.

Cada resultado (agrupamento ou sequência) é denominado **arranjo simples** dos 4 elementos tomados 3 a 3. Indicamos o número total desses agrupamentos por: $A_{4,\,3}$ ou A_4^3.

Veja como caracterizar esses agrupamentos no caso geral:

Seja *E* um conjunto com *n* elementos e $p \leq n$, com $n, p \in \mathbb{N}^*$. Denomina-se **arranjo simples** dos *n* elementos distintos de *E*, tomados *p* a *p*, toda sequência de *p* elementos distintos de *E*.

Indicamos o número desses arranjos simples por $A_{n,\,p}$ ou A_n^p (lê-se: arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p*.)

O número de arranjos simples de um conjunto com *n* elementos tomados *p* a *p* é dado por:

$$A_{n,\,p} = \underbrace{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)}_{p\text{ fatores}}$$

Essa fórmula é consequência do princípio multiplicativo, como observamos na situação da classificação dos atletas.

No caso geral do número de arranjos simples de um conjunto de *n* elementos, temos:

Posição	1º elemento	2º elemento	3º elemento	...	p-ésimo elemento
Possibilidades	n	n − 1	n − 2	...	n − (p − 1)

Para a escolha da primeira posição, temos *n* possibilidades, pois há *n* elementos; para escolha da segunda posição, temos $(n - 1)$ possibilidades, pois há $(n - 1)$ elementos; para escolha da terceira posição, temos $(n - 2)$ possibilidades, pois há $(n - 2)$ elementos...; para a escolha da p-ésima posição, temos $[n - (p - 1)]$ ou $n - p + 1$ possibilidades.

Aplicando o princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é:

$$A_{n,\,p} = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)$$

A fórmula $A_{n,\,p} = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)$ pode ser expressa por meio de fatoriais. Veja:

Sendo $A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ e multiplicando o 2º membro por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$, obtemos:

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\cdot\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,\,p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)\cdot(n-p)!}^{n!}}{(n-p)!}$$

Portanto,

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos:

a) $A_{7,\,3} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$ ou $A_{7,\,3} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$

b) $A_{10,\,2} = 10\cdot 9 = 900$ ou $A_{10,\,2} = \dfrac{10!}{(10-2)!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!} = 10\cdot 9 = 900$

Exercícios resolvidos

8 Resolva a equação: $\frac{A_{n,5}+A_{n,4}}{A_{n,3}} = 9$

Resolução

$$\frac{A_{n,5}+A_{n,4}}{A_{n,3}} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)[(n-3)(n-4)+(n-3)]}{n(n-1)(n-2)} = 9$$

$(n-3)(n-4)+n-3=9 \Rightarrow n^2-6n=0$

Resolvendo a equação, obtemos: $n' = 6$ e $n'' = 0$

Como $n \geqslant 5$, temos: $n = 6$

Portanto, $S = \{6\}$.

9 Quantos números de 3 algarismos distintos formamos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 7?

Resolução

Temos um total de seis algarismos (1, 2, 3, 4, 5 e 7) e os números (agrupamentos ou sequências) que queremos formar devem ter três algarismos distintos. Veja:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Observe que, invertendo a ordem desses algarismos, obtemos novos números, isto é, a ordem em que os números são distribuídos no agrupamento faz diferença. Logo, o problema é de arranjo simples.

$A_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ ou

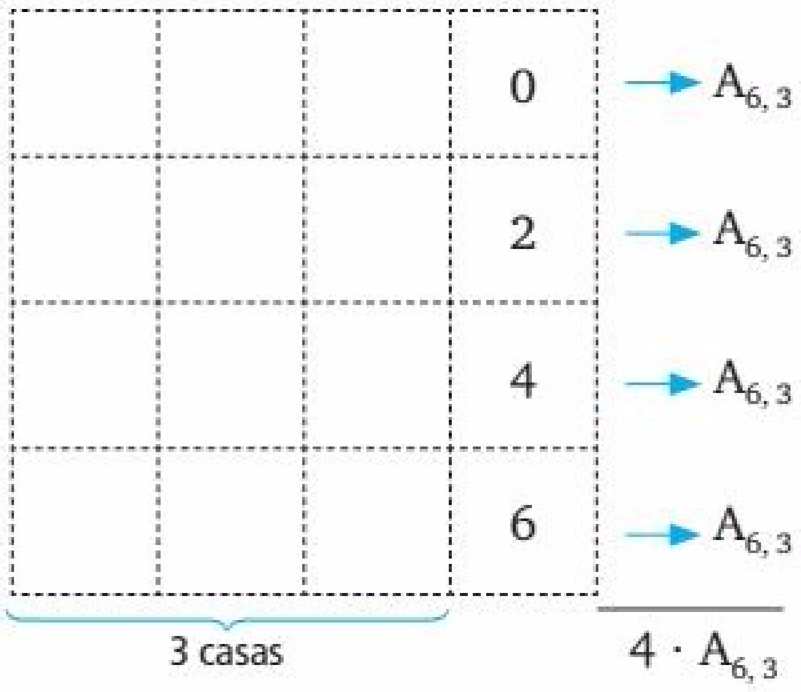
$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Portanto, podemos formar 120 números.

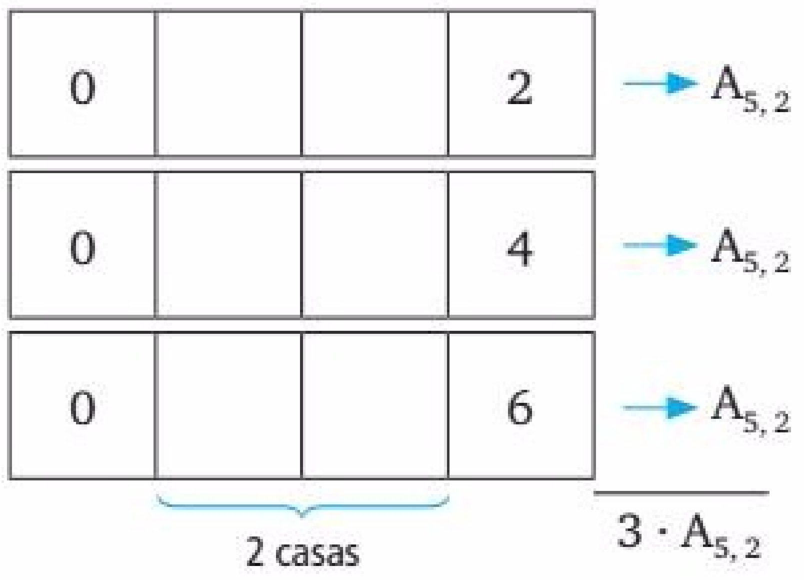
10 Quantos números pares de 4 algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repeti-los?

Resolução

São 7 algarismos disponíveis para formar números de 4 algarismos, com a condição de serem números pares; portanto, devem terminar em 0, 2, 4 ou 6.



Quando os números terminam em 2, 4 ou 6, eles não podem começar por zero.



Logo, o total de números é: $4 \cdot A_{6,3} - 3 \cdot A_{5,2} =$

$= 4 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) - 3 \cdot (5 \cdot 4) = 480 - 60 = 420$

Portanto, podemos formar 420 números.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

16. Quantos números de 5 algarismos distintos formamos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? 15 120 números

17. Quantas são as possibilidades de criar palavras de 3 letras, sem repetição, com as 9 primeiras letras do nosso alfabeto? 504 palavras

18. Quantos números de 3 algarismos, sem repetição, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, incluindo sempre o algarismo 4? 168 números

19. Sabendo que uma bandeira tem 4 faixas horizontais:

a) Quantas são as possibilidades de pintá-la com 4 cores distintas, escolhendo entre as 7 cores do espectro solar (vermelho, alaranjado, amarelo, verde, azul, anil, violeta)? 840 bandeiras

b) Quantas bandeiras podemos pintar se, além da condição do item *a*, a cor amarela estiver sempre presente? 480 bandeiras

20. Resolva as equações no caderno:

a) $A_{x,3} = 4A_{x,2}$ $S = \{6\}$

b) $A^2_{n-1} = 30$ $S = \{7\}$

c) $A_{x,3} - A_{x,2} = 0$ $S = \{3\}$

d) $A_{n,2} - A_{n-1,2} + A_{n-2,2} = 20$ $S = \{4\}$

21. Considerando todos os números de seis algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 9, determine quantos são:

a) pares; 2 160 números pares

b) ímpares. 2 880 números ímpares

22. Considere o conjunto A = {0, 1, 4, 5, 7, 8}. Utilizando os elementos desse conjunto, responda:

a) Quantos números distintos podemos escrever com cinco algarismos? 600

b) Dentre os números do item *a*, quantos são ímpares? 288 ímpares

c) Quantos números de quatro algarismos distintos contêm os dígitos de 1 a 5? 126

23. Com os algarismos 0, 1, 2, 4 e 5, sem os repetir, quantos números compreendidos entre 200 e 1 000 podemos formar? 36 números

Permutação simples

Uma permutação simples dos *n* elementos de um conjunto é uma sequência desses *n* elementos de modo que a mudança de ordem desses elementos determina permutações diferentes.

Por exemplo, se na situação dos atletas, apresentada na página 183, estivessem participando da corrida apenas Guilherme (G), Paulo (P) e Marcos (M), os possíveis resultados seriam: GPM, GMP, PGM, PMG, MGP, MPG, ou seja, haveria 6 possibilidades em que os agrupamentos diferem ente si apenas pela ordem dos elementos e em que o número de elementos de cada agrupamento é igual ao número de elementos do conjunto.

Em outras palavras, uma permutação simples é um arranjo simples envolvendo todos os elementos de um conjunto. As permutações simples são formadas pelos mesmos elementos em ordem diferente.

Seja *E* um conjunto com *n* elementos. Denomina-se **permutação simples** dos *n* elementos qualquer agrupamento ou sequência de *n* elementos distintos de *E*.

Se fizermos n = p na fórmula de arranjos simples ($A_{n,\,p}$), obtemos o total de **permutações simples**, indicado por P_n, formado com *n* elementos. Observe:

$$A_{n,\,p} = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)$$

$$A_{n,\,n} = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)$$

$$A_{n,\,n} = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1$$

$$P_n = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1$$

Portanto,

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exercícios resolvidos

11 Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 3, 5, 7 e 8?

Resolução

Queremos formar números (agrupamentos) de 5 algarismos com os 5 algarismos dados (1, 3, 5, 7 e 8).

$A_{5,5} = P_5$
5 algarismos

$P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

Portanto, podem ser formados 120 números.

12 Um anagrama é formado pela troca de posição das letras de uma palavra, podendo ou não ter significado na língua de origem. Por exemplo, BOCA e ABOC são anagramas da palavra CABO.

Considere, agora, a palavra LIVRO.

a) Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra?

b) Quantos deles começam com *L* e terminam com *O*?

c) Quantos contêm as letras RO juntas e nessa ordem?

d) Quantos anagramas começam com *I* ou terminam com *V*?

Resolução

a) Queremos formar anagramas (agrupamentos) com um total de 5 letras distintas. Nesse caso, os agrupamentos diferem entre si pela ordem das letras.

$$\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{5 letras}}$$

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; 120 anagramas

b) Os anagramas que iniciam com a letra *L* e têm a letra *O* no final são do tipo:

$$L\underbrace{\_\,\_\,\_}_{\text{3 letras}}O$$

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; 6 anagramas

c) Se as letras RO ficarem juntas, nessa ordem, temos:

$$\underbrace{RO}_{\text{1 só letra}}\ \underbrace{\_\,\_\,\_}_{\text{3 letras}}$$

As letras RO serão contadas como uma só letra e, com as 3 letras restantes, teremos um total de 4 letras para serem agrupadas 4 a 4. Assim, obtemos:
$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; 24 anagramas

d) Anagramas que começam com *I*:

$$I\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{4 letras}}$$

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; 24 anagramas

Anagramas que terminam com *V*:

$$\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{4 letras}}V$$

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; 24 anagramas

Veja que temos também os anagramas que começam com *I* e terminam com *V*:

$$I\underbrace{\_\,\_\,\_}_{\text{3 letras}}V$$

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; 6 anagramas

Portanto, temos de excluir essa intersecção, assim teremos:

$24 + 24 - 6 = 42$; 42 anagramas

13 Calcule *x*, sendo $x = P_5 + 2 \cdot \dfrac{P_6 - P_4}{P_2}$.

Resolução

$$x = P_5 + 2 \cdot \frac{P_6 - P_4}{P_2} \Rightarrow x = 5! + 2 \cdot \frac{6! - 4!}{2!}$$

$$x = 120 + 2 \cdot \frac{720 - 24}{2} \Rightarrow x = 816$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

24. Considere a palavra FELINO.

a) Quantos são os anagramas dessa palavra? 720

b) Quantos começam com a letra *N*? 120

c) Quantos terminam por vogal? 360

d) Quantos apresentam as letras *E*, *L* e *I* juntas e nessa ordem? 24

e) Quantos apresentam as letras *E*, *L* e *I* juntas e em qualquer ordem? 144

25. (UFSM-RS) Para cuidar da saúde, muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores onde há centros médicos especializados e hospitais mais equipados. Muitas vezes, o transporte até essas cidades é feito por *vans* disponibilizadas pelas prefeituras.

Em uma *van* com 10 assentos, viajarão 9 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 9 passageiros podem ocupar suas poltronas na *van*?

a) 4 032

b) 36 288

c) 40 320

X d) 362 880

e) 403 200

26. Calcule *E*, sendo $E = P_4 - 2\left(\dfrac{P_8 - P_7}{P_4}\right)$. $-2\,916$

27. (UFMG) Permutando-se os algarismos do número 123456, formam-se números de seis algarismos.

Supondo-se que todos os números formados com esses seis algarismos tenham sido colocados numa lista em ordem crescente,

a) determine quantos números possui essa lista. 720

b) determine a posição do primeiro número que começa com o algarismo 4. 361

c) determine a posição do primeiro número que termina com o algarismo 2. 34

28. Quantos anagramas da palavra EDITORA:

a) começam com *A*? 720 anagramas

b) começam com *A* e terminam com *E*? 120 anagramas

29. Um estudante ganhou quatro livros diferentes de Matemática, três diferentes de Física e dois diferentes de Química. De quantos modos distintos esses livros podem ser enfileirados em uma prateleira de uma estante, mantendo juntos os da mesma disciplina? 1 728 modos

30. Calcule o valor de *m* que verifica a relação:

$$\frac{P_m + m \cdot P_{m-2}}{P_{m-1}} = \frac{3}{8} \quad m = 3$$

Permutação com elementos repetidos

Até agora, estudamos permutações com elementos distintos.

Mas o que acontece quando permutamos *n* elementos de uma sequência e entre eles há determinada quantidade de elementos repetidos?

Acompanhe o exemplo a seguir:

Quantos anagramas tem a palavra RIGOROSO?

Para calcular o número de anagramas, vamos distribuir as 8 letras em 8 posições.

Vamos distribuir, inicialmente, as letras iguais.

Se, apenas para facilitar o raciocínio, distinguíssemos as 3 letras *O* em O_1, O_2 e O_3, elas ocupariam as 8 posições de um arranjo simples de 8 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $A_{8,\,3}$ maneiras diferentes. Por exemplo:

	O_1		O_2			O_3	

ou

	O_3		O_2			O_1	

No primeiro exemplo, em que O_1, O_2 e O_3 ocupam a 2ª, a 4ª e a 7ª posições, permutando-as, poderíamos formar 3! agrupamentos. No entanto, essas letras não se diferenciam e, para não contarmos 3! vezes o mesmo anagrama, devemos dividir $A_{8,\,3}$ por 3!, ou seja, $\frac{A_{8,\,3}}{3!}$.

Fixadas as três letras *O*, restam 5 posições. Analogamente, a distribuição das 2 letras *R* (R_1 e R_2) pode ser feita dividindo $A_{5,\,2}$ por 2!, ou seja, $\frac{A_{5,\,2}}{2!}$.

Finalmente, fixadas as letras *O*, *O*, *O*, *R* e *R*, sobram 3 posições. As letras *I*, *G* e *S* podem ser distribuídas nas posições de $A_{3,\,3} = P_3$ maneiras diferentes.

Usando o princípio multiplicativo, o número de maneiras diferentes de distribuir as 8 letras nas 8 posições é:

$$\frac{A_{8,\,3}}{3!} \cdot \frac{A_{5,\,2}}{2!} \cdot P_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

Embora RIGOROSO seja uma palavra com significado, no exemplo visto aqui, deve ser entendido como um agrupamento com 3 letras (elementos) *O* repetidas, 2 letras *R* repetidas e mais 3 letras distintas (*I*, *G* e *S*).

Podemos generalizar esse raciocínio considerando os anagramas de um agrupamento de *n* elementos, supondo:

α elementos iguais a a_1
β elementos iguais a a_2
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
γ elementos iguais a a_m

em um total de: $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$ elementos.

O número de permutações distintas que podemos obter com esses elementos é indicado por $P_n^{\alpha,\,\beta,\,\ldots,\,\gamma}$ e dado pela expressão:

$$P_n^{\alpha,\,\beta,\,\ldots,\,\gamma} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \ldots \cdot \gamma!}$$

No exemplo anterior, temos:

$$P_8^{3,\,2} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 3\,360$$

Portanto, a quantidade de anagramas da palavra RIGOROSO é 3 360.

Exercícios resolvidos

14 Desconsiderando o acento, quantos anagramas tem a palavra NATÁLIA?

Resolução

A palavra NATÁLIA tem 7 letras, sendo 3 iguais a A; portanto:

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840;\ 840 \text{ anagramas}$$

15 Quantos anagramas tem a palavra ARITMÉTICA?

Resolução

A palavra ARITMÉTICA tem 10 letras, sendo: 2 iguais a A; 2 iguais a I; 2 iguais a T. Logo:

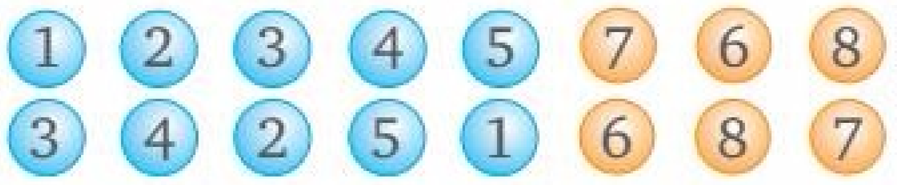
$$P_{10}^{2,2,2} = \frac{10!}{2!\,2!\,2!} = 453\,600$$

Portanto, a palavra ARITMÉTICA tem 453 600 anagramas.

16 Uma urna contém 8 bolas: 5 azuis e 3 laranja. De quantas maneiras é possível retirar, uma a uma, as 8 bolas dessa urna?

Resolução

Caso todas as bolas fossem diferentes, teríamos uma permutação de 8 elementos, isto é: $8! = 40\,320$ maneiras. Como há 5 bolas azuis e 3 bolas laranja, o número de maneiras de retirada é menor. Agora, suponha que as bolas azuis fossem numeradas de 1 a 5 e as laranja, de 6 a 8. As posições abaixo seriam diferentes:



Ilustrações: Editoria de arte

Nas bolas azuis, temos $5! = 120$ permutações que não fazem diferença, uma vez que as bolas são iguais (as permutações são consideradas repetições, como contar anagramas com letras iguais). Da mesma forma, para as bolas laranja não devemos contar as 6 repetições ($3! = 6$). Elas devem ser contadas uma única vez.

Assim, o número de maneiras de retirar, uma a uma, as 8 bolas dessa urna, sem contar as repetições, é:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{40\,320}{120 \cdot 6} = 56$$

Portanto, é possível retirar as 8 bolas de 56 maneiras diferentes.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

31. Quantos anagramas tem cada palavra a seguir?

a) PATA 12

b) PARALELOGRAMO 129 729 600

c) GUANABARA 15 120

32. Determine a quantidade de números distintos obtidos da permutação dos algarismos dos números:

a) 73 431 60

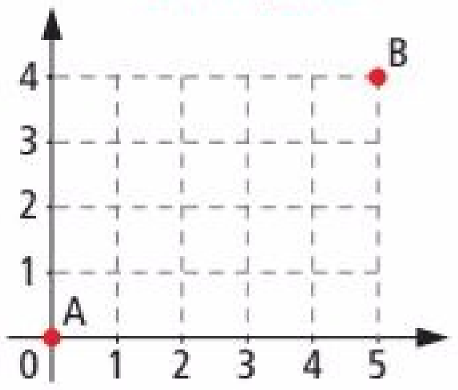
b) 343 434 20

33. Uma cesta contém 10 frutas: 6 maçãs e 4 peras. Ana quer retirar, uma a uma, as 10 frutas dessa cesta. De quantas maneiras ela poderá retirá-las? 210 maneiras.

34. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA que começam com vogal? (desconsidere o acento.) 75 600

35. A palavra ARAPONGA tem quantos anagramas, de modo que a letra *P* ocupe sempre o último lugar? 840 anagramas.

36. Na figura ao lado, quantos caminhos diferentes podem ser feitos de *A* a *B*, deslocando-se uma unidade de cada vez, para cima ou para a direita? 126 caminhos



37. Alfredo, Armando, Ricardo, Renato e Ernesto querem criar uma sigla com cinco símbolos, sendo cada símbolo a primeira letra de seus nomes. Qual o número total de siglas possíveis de se formar? 30

38. (Fatec-SP) Uma pessoa dispõe de 4 discos diferentes de MPB, 4 discos diferentes de *rock* e dois discos diferentes de música clássica. O número de modos distintos como essa pessoa pode organizá-los em uma estante, de tal forma que discos do mesmo gênero estejam sempre juntos e os de *rock* sempre na mesma ordem, é:

a) 144 c) 48 [✓ e) 288]

b) 1 152 d) 50

39. (FGV-SP) Uma senha de internet é constituída de seis letras e quatro algarismos em que a ordem é levada em consideração. Eis uma senha possível: (a, a, b, 7, 7, b, a, 7, a, 7).

Quantas senhas diferentes podem ser formadas com quatro letras "a", duas letras "b" e quatro algarismos iguais a 7?

a) 10! [✓ c) 3 150] e) $\frac{10!}{4!6!}$

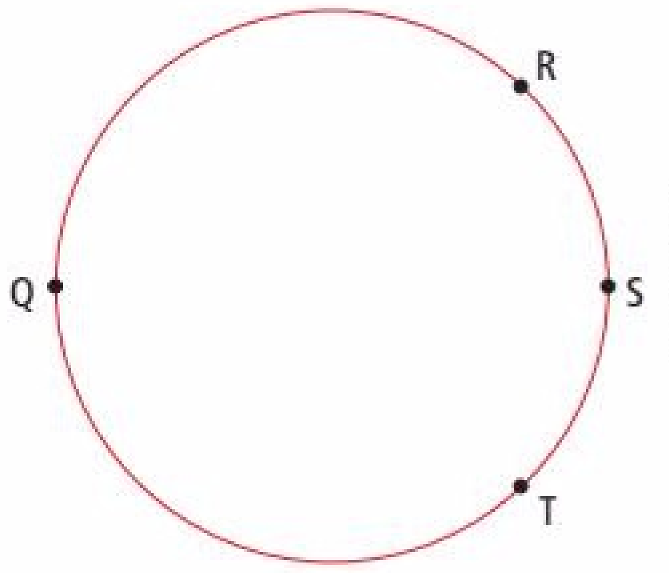
b) 2 520 d) 6 300

Combinação simples

Até agora estudamos problemas de Análise combinatória envolvendo agrupamentos que diferem entre si pela ordem ou pela natureza dos elementos que os compõem.

Agora, vamos estudar os agrupamentos que diferem entre si apenas pela **natureza** de seus elementos. Acompanhe a situação a seguir.

Observe os pontos *R*, *S*, *T* e *Q* na circunferência abaixo. Quantos segmentos de reta podemos traçar com extremidades em 2 desses 4 pontos?



Editoria de arte

Escolhendo o ponto *Q* como uma das extremidades, a outra extremidade será *R* ou *S* ou *T*. Escolhendo o ponto *R* como uma das extremidades, a outra será *S* ou *T* ou *Q*.

Então, para cada um dos 4 pontos escolhidos, temos 3 possibilidades para formar um dos segmentos de reta pedidos.

Logo, temos $4 \cdot 3 = 12$ pares de pontos que são extremidades de segmentos de reta:

QR, QS, QT, RS, RT, RQ, ST, SQ, SR, TQ, TR, TS

No entanto, observe que $\overline{QR}$ e $\overline{RQ}$, por exemplo, representam o mesmo segmento de reta, pois a ordem das extremidades não os diferencia. Isso significa que cada segmento de reta foi contado duas vezes.

Logo, o número de segmentos de reta com extremidades em 2 desses pontos é $n = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Assim, podemos formar 6 segmentos de reta.

Esse tipo de agrupamento, que difere apenas pela natureza de seus elementos, chamamos de **combinação simples**.

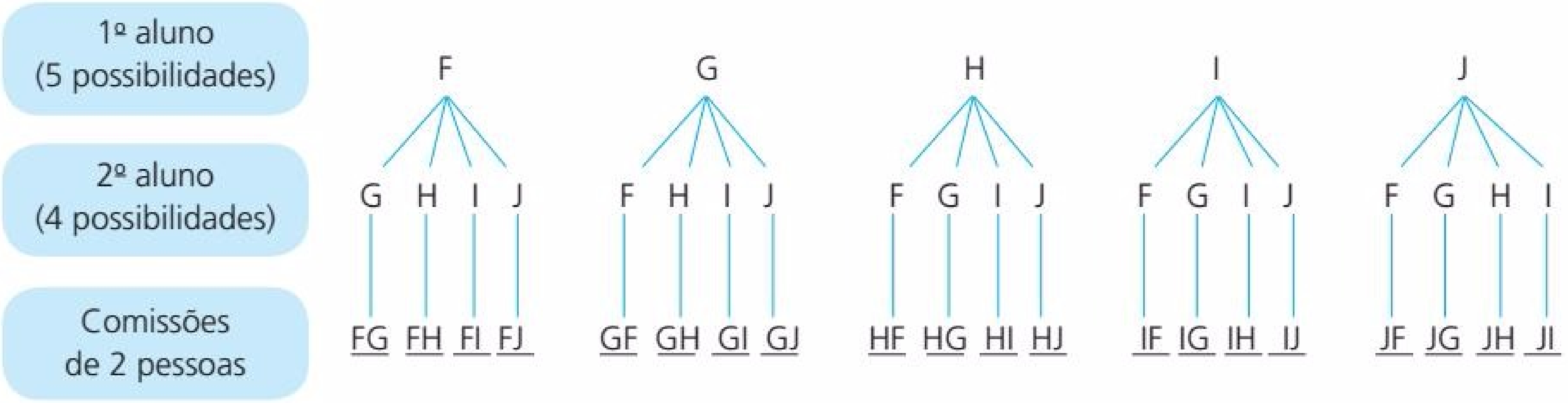
Seja *E*, um conjunto com *n* elementos e $p \leq n$, com $n, p \in \mathbb{N}^*$. Denomina-se **combinação simples** dos *n* elementos de *E*, tomados *p* a *p*, todo subconjunto de *E* com *p* elementos.

Indicamos o número dessas combinações simples por $C_{n,\,p}$, ou C_n^p (lê-se: combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*).

Agora acompanhe outra situação:

Fabíola (F), Gerson (G), Hélio (H), Ivelise (I) e Jacira (J) disputam 2 vagas no conselho da escola. Quantas comissões de 2 pessoas podem ser formadas com os 5 alunos?

Construindo a árvore de possibilidades, temos:


1º aluno (5 possibilidades)
2º aluno (4 possibilidades)
Comissões de 2 pessoas
F
G H I J
FG FH FI FJ
G
F H I J
GF GH GI GJ
H
F G I J
HF HG HI HJ
I
F G I J
IF IG IH IJ
J
F G H I
JF JG JH JI

Do esquema acima, verificamos que o número de comissões é igual a:

$$A_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

Porém, dessa forma, estamos contando duas vezes a mesma comissão (grupo) de alunos.

Note que a ordem em que os alunos de uma comissão são escolhidos não faz diferença. Por exemplo, escolhendo primeiro o aluno *F* e depois o *G* ou primeiro o *G* e depois o *F*, a comissão é a mesma. Veja todas as demais comissões no esquema abaixo.

Sequências	
FG	HI
FH	HJ
FI	IF
FJ	IG
GF	IH
GH	IJ
GI	JF
GJ	JG
HF	JH
HG	JI

separando as repetições →

Comissões	**Repetições**
FG	GF
FH	HF
FI	IF
FJ	JF
GH	HG
GI	IG
GJ	JG
HI	IH
HJ	JH
IJ	JI

Portanto, na formação de comissões, os agrupamentos são conjuntos, não sequências, pois os agrupamentos obtidos diferem entre si pelos **elementos componentes** (natureza), não importando a **ordem** (posição) em que aparecem.

Para obter o número de comissões, devemos tirar as repetições. Cada comissão gera 2! sequências de 2 elementos. Vamos, então, dividir $A_{5,\,2}$ por $P_2 = 2!$, que é o número de vezes em que cada um desses grupos se repete na contagem. Assim:

$$\frac{A_{5,\,2}}{P_2} = \frac{20}{2!} = 10$$

Isso significa que podemos formar 10 comissões de 2 alunos.

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado na situação anterior é possível concluir que o número de combinações simples de *n* elementos, em grupos de *p* elementos cada, é igual ao número de arranjos de *n* elementos, tomados *p* a *p*, dividido por p!, isto é:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Portanto, $\boxed{C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

Casos particulares

- Um conjunto com *n* elementos admite um único subconjunto com zero elemento, que é o conjunto vazio. Esse caso também está contemplado na fórmula do número de combinações.

  Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $p = 0$, temos: $C_{n,\,0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

- Um conjunto com zero elemento admite um único subconjunto com zero elemento, que é o próprio conjunto vazio. Esse caso também está contemplado na fórmula do número de combinações.

  Se $n = p = 0$, temos: $C_{0,\,0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = \dfrac{0!}{0!} = 1$

Exercícios resolvidos

17 Quantas comissões de 3 participantes podem ser formadas com 5 pessoas?

Resolução

Para classificar um agrupamento como arranjo ou combinação, procedemos da seguinte forma:

1º: Formamos o agrupamento sugerido pelo problema;
2º: Mudamos a ordem de seus elementos;
3º: Se com essa mudança de ordem obtivermos um agrupamento em que a ordem dos elementos for relevante, esses agrupamentos serão combinações.

As comissões devem ter 3 participantes, isto é, nem todos os participantes farão parte da comissão.

Vamos chamar de *A*, *B*, *C*, *D* e *E* as 5 pessoas que podem ser indicadas para a comissão. Se tivermos, por exemplo, uma comissão formada por *A*, *B*, *C*, mesmo se invertermos a ordem para *B*, *A*, *C* ou *C*, *B*, *A*, continuaremos com a mesma comissão. Assim, devemos retirar as repetições, pois cada comissão gera 3! sequências de 3 participantes. Temos:

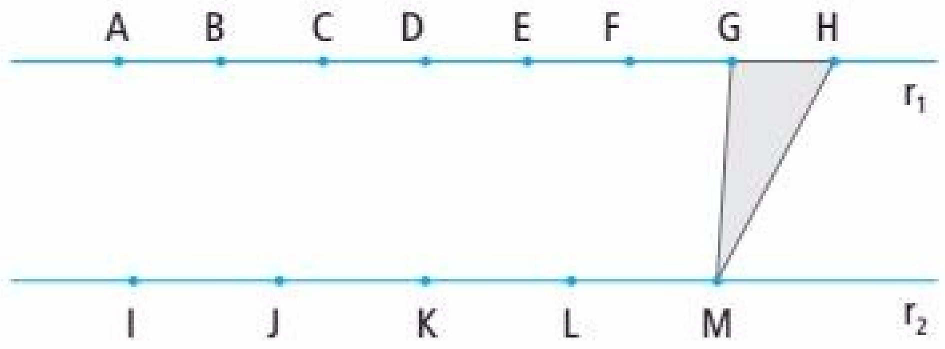
$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{A_{5,\,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{60}{6} = 10 \text{ ou}$$

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Portanto, podemos formar 10 comissões.

18 Sobre uma reta marcam-se 8 pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 pontos quaisquer do total desses pontos?

Resolução



Editoria de arte

1º modo:

O triângulo GMH é o mesmo que o triângulo HMG. Logo, a questão é de combinação.

Com as 13 letras, podemos obter uma combinação simples de 13 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $C_{13,\,3}$.

- Para a reta r_1: $C_{8,\,3}$ não formam triângulos porque os pontos estão alinhados.
- Para a reta r_2: $C_{5,\,3}$ também não formam triângulos.

Logo, o total de triângulos obtidos é dado por:
$C_{13,\,3} - C_{8,\,3} - C_{5,\,3} = 286 - 56 - 10 = 220$
Portanto, serão obtidos 220 triângulos.

2º modo:

Três pontos vão determinar um triângulo se dois deles pertencerem a r_1 e um pertencer a r_2, ou dois deles pertencerem a r_2 e um, a r_1. Assim, podemos escolher dois pontos em r_1 e um ponto em r_2 de $C_{8,2} \cdot C_{5,1}$ maneiras, e dois pontos em r_2 e um em r_1 de $C_{5,2} \cdot C_{8,1}$ maneiras. Logo, o número total de triângulos será:

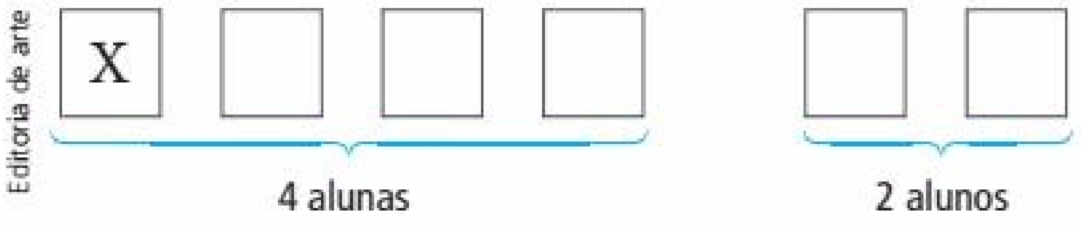
$$C_{8,2} \cdot C_{5,1} + C_{5,2} \cdot C_{8,1} = 28 \cdot 5 + 10 \cdot 8 = 140 + 80 = 220$$

Portanto, serão obtidos 220 triângulos.

19 Uma classe tem 10 alunas e 5 alunos. Formam-se comissões de 4 alunas e 2 alunos. Determine o número de comissões em que participa a aluna *X* e não participa o aluno *Y*.

Resolução

A comissão deve ter 6 pessoas.



- Como a aluna *X* faz parte da comissão, restam 9 alunos dentre os quais devemos escolher 3, isto é, $C_{9,3}$.
- Como o aluno *Y* não faz parte da comissão, restam 4 alunos dentre os quais devemos escolher 2, isto é, $C_{4,2}$.

Então, pelo princípio fundamental da contagem, o número de comissões é dado por:

$$C_{9,3} \cdot C_{4,2} = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \Rightarrow C_{9,3} \cdot C_{4,2} = 504$$

Portanto, serão 504 comissões.

20 Resolva a equação $A_{n+1,2} + C_{n,2} = 26$.

Resolução

Devemos ter $n \geqslant p$, logo, $n \geqslant 2$.

Desenvolvendo, temos:

$$A_{n+1,2} + C_{n,2} = 26 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 26$$

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} + \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} = 26$$

$$n^2 + n + \frac{n^2 - n}{2} = 26$$

$$2n^2 + 2n + n^2 - n = 52$$

$$3n^2 + n - 52 = 0 \begin{array}{l} \nearrow n_1 = 4 \\ \searrow n_2 = -\frac{13}{3} \text{ (não satisfaz)} \end{array}$$

Portanto, $S = \{4\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

40. De quantas maneiras é possível escalar um time de futebol de salão dispondo de 8 jogadores? 56

41. Em uma empresa, há 6 sócios brasileiros e 4 japoneses. A diretoria será composta de 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses. De quantos modos essa composição poderá ocorrer? 120

42. Em uma sala, temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos de 2 rapazes e 3 moças podemos formar? 200 grupos

43. Ao elaborar uma prova de Matemática contendo 5 questões, um professor dispõe de 5 questões de Álgebra e 6 de Trigonometria. Calcule o número de provas diferentes que é possível elaborar usando em cada prova 2 questões de Álgebra e 3 de Trigonometria. 200 provas

44. Calcule:

a) $\dfrac{C_{6,3}}{C_{4,1} + C_{5,4} + C_{11,1}}$ 1

b) $C_7^2 + C_8^3 - C_5^0$ 76

45. Determine *n*:

a) $C_{n,1} + C_{n,2} = 6$ n = 3

b) $C_{n+2,4} = A_{n+1,3}$ n = 22

46. Em uma reunião de professores, cada participante cumprimentou todos os seus colegas, registrando-se 210 apertos de mãos. Determine o número de professores presentes à reunião. 21 professores

47. Em uma turma de 30 alunos, 9 têm *skate* e outros 8, bicicleta. Quantos grupos diferentes de 7 alunos é possível formar naquela turma, de modo que tenha 4 *skates* e 2 bicicletas em cada grupo? 45 784 grupos

48. (Unesp-SP) Na convenção de um partido para lançamento da candidatura de uma chapa ao governo de certo estado, havia 3 possíveis candidatos a governador, sendo dois homens e uma mulher, e 6 possíveis candidatos a vice-governador, sendo quatro homens e duas mulheres. Ficou estabelecido que a chapa governador/vice-governador seria formada por duas pessoas de sexos opostos. Sabendo que os nove candidatos são distintos, o número de maneiras possíveis de formar a chapa é:

a) 18
b) 12
[✓ c) 8]
d) 6
e) 4

Conexões — Exame Nacional do Ensino Médio – Enem

49. Leia o texto a seguir e faça o que se pede.

> O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade.
>
> A partir de 2009 passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. Foram implementadas mudanças no Exame que contribuem para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES), para a mobilidade acadêmica e para induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio.
>
> Respeitando a autonomia das universidades, a utilização dos resultados do Enem para acesso ao ensino superior pode ocorrer como fase única de seleção ou combinado com seus processos seletivos próprios.
>
> O Enem também é utilizado para o acesso a programas oferecidos pelo Governo Federal, tais como o Programa Universidade para Todos – ProUni.

Adriano Vizoni/Folhapress

O Enem é aplicado anualmente desde sua criação.

INEP. Sobre o Enem.
Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Matriz de referência do Enem

Eixos cognitivos (comuns a todas as áreas de conhecimento).

I. Dominar linguagens: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. Compreender fenômenos: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. Enfrentar situações-problema: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. Construir argumentação: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

INEP. Matriz de referência do ENEM.
Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Além dos eixos comuns, o Enem é dividido em quatro áreas do conhecimento:

- Ciências da natureza e suas tecnologias – engloba Biologia, Física e Química.
- Ciências humanas e suas tecnologias – engloba História, Geografia, Filosofia, Sociologia e conhecimento geral.
- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias – engloba Língua portuguesa, Literatura, Língua estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Informática.
- Matemática e suas Tecnologias. Avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade.

a) Com que objetivo o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), foi criado em 1998?

b) Dentre as quatro áreas do conhecimento presentes no Enem, qual ou quais você mais se identifica? Você pretende seguir seus estudos ou trabalhar nesses campos? Resposta pessoal. Professor, espera-se que os alunos reflitam sobre suas aptidões e interesses. Estimule-os a pensar na profissão que pretendem seguir e quais os melhores caminhos para alcançarem estes objetivos: Ensino Superior, Ensino Técnico etc.

c) A prova do Enem é realizada em 2 dias, sendo 90 questões aplicadas no primeiro dia de prova e outras 90 questões e uma redação, no segundo dia. $C_{20}^{250} + C_{15}^{180} + C_{10}^{80}$

Suponha que para a confecção das questões do Enem de Matemática e suas Tecnologias, o Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), responsável por elaborar as provas, possua em seu banco de questões, 510 questões. Estas questões estão divididas em 3 grupos: Álgebra, Geometria e Probabilidade/Estatística, sendo respectivamente: 250, 180 e 80 questões no banco de questões do INEP.

Se a prova possui a seguinte distribuição de questões: 20, 15, 10, respectivamente, para cada grupo citado, qual a expressão combinatória que representa a quantidade de provas de Matemática e suas Tecnologias, distintas, possíveis de serem criadas, segundo as regras descritas e a quantidade de questões disponíveis para serem utilizadas?

Binômio de Newton

Número binomial

Como vimos durante o estudo de combinação simples, o número total de combinações de *n* elementos, tomados *p* a *p*, é representado por $C_{n,\,p}$ ou C_n^p. Outra forma de expressar o número de combinações é $\binom{n}{p}$, que representa o **número binomial** ou **coeficiente binomial**.

Dados dois números naturais *n* e *p*, com $n \geqslant p$, definimos o **número binomial** ou **coeficiente binomial** de *n* sobre *p* e o número $\binom{n}{p}$, em que *n* é o numerador e *p* é o denominador. Assim:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},\ \text{com}\ n \geqslant p \geqslant 0$$

(Lê-se: binomial de *n* sobre *p*.)

Exemplos:

a) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 8 \cdot 7 = 56$

b) $\binom{12}{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!\ 2 \cdot 1} = 6 \cdot 11 = 66$

Observações:

- Quando $p = 0$, temos $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
- Quando $p = 1$, temos $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
- Quando $p = n$, temos $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Números binomiais complementares

Dois números binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma de seus numeradores for igual ao numerador.

$$\binom{n}{p}\ \text{e}\ \binom{n}{q}\ \text{são complementares se}\ p + q = n$$

Por exemplo: $\binom{5}{2}$ e $\binom{5}{3}$; $\binom{7}{2}$ e $\binom{7}{5}$.

Propriedades

- Dois números binomiais complementares são iguais. Para $p + q = n$, tem-se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, pois:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)!\left[n-(n-q)\right]!} = \frac{n!}{q!(n-q)!} = \binom{n}{q}$$

- Dois números binomiais de mesmo numerador são iguais se tiverem denominadores iguais ou se forem complementares: $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow p = q$ ou $p + q = n$, em que *n*, *p*, *q* são números naturais tais que $n \geqslant p$ e $n \geqslant q$.

Triângulo de Pascal

Os números binomiais podem ser dispostos ordenadamente em um quadro denominado **triângulo de Pascal** ou **triângulo de Tartaglia**.

Distribuindo os números binomiais de mesmo numerador na mesma linha e os números binomiais de mesmo denominador na mesma coluna, temos:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\
\hline
0 & \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & \\
3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & & \\
4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & \\
5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & \\
6 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
n & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \binom{n}{6} & \dots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Se no triângulo de Pascal substituirmos cada número binomial pelo respectivo valor, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Propriedades do triângulo de Pascal

1ª propriedade:

Todos os elementos da 1ª coluna são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$.

2ª propriedade:

O último elemento de cada linha é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = 1$.

3ª propriedade:

Em uma linha qualquer, dois binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

Na linha 6, por exemplo, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

A 3ª propriedade pode ser expressa por: $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$

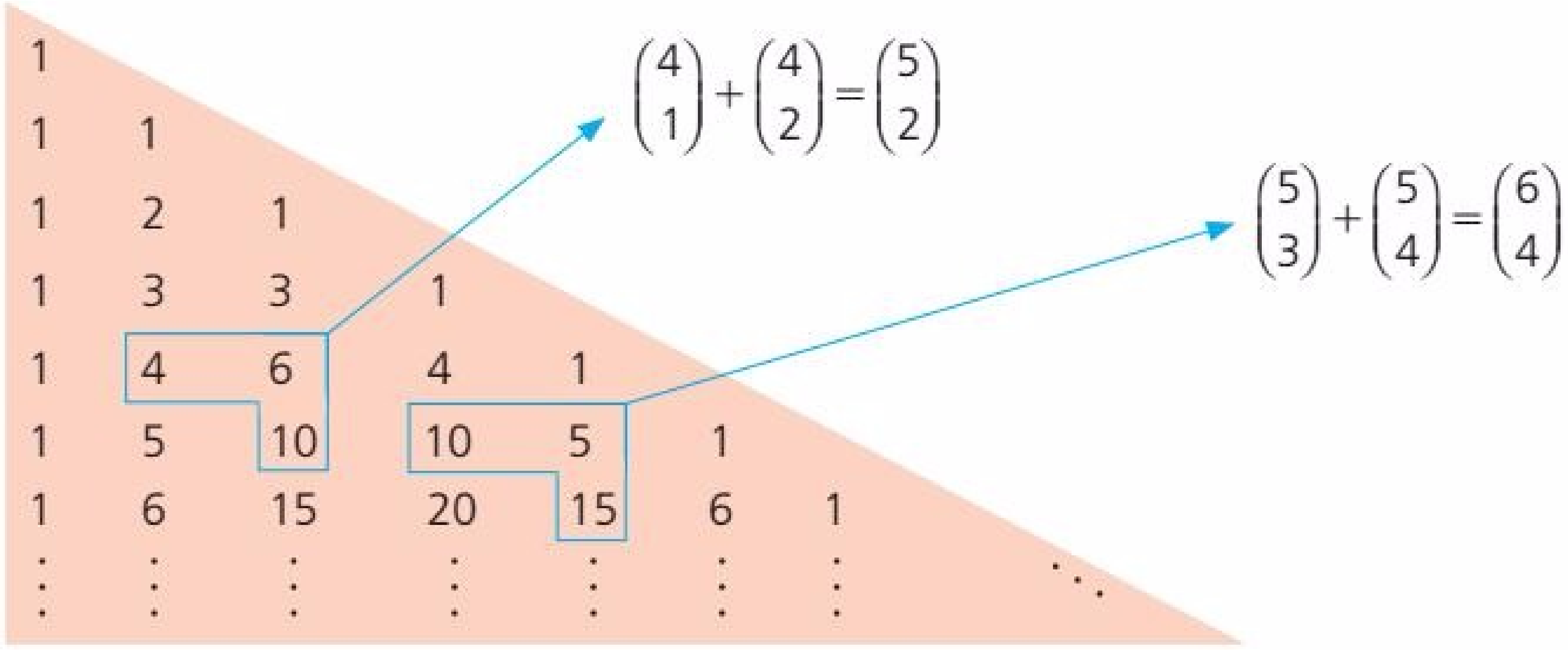
Tal igualdade pode ser justificada com o seguinte argumento: se um conjunto tem *n* elementos, sempre que formamos um subconjunto com *p* elementos, formamos também um subconjunto com os n − p elementos restantes.

Esses dois números binomiais, cuja soma dos denominadores é igual ao numerador, como vimos, são chamados **complementares**.

4ª propriedade:

Cada binomial $\binom{n}{p}$ da linha *n* é igual à soma de dois binomiais da linha (n − 1): aquele que está na coluna (p − 1) com aquele que está na coluna *p*.

Por exemplo:



1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$$

Essa propriedade pode ser generalizada pela igualdade denominada **relação de Stiffel**:

$$\boxed{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}}$$

5ª propriedade:

A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2, cujo expoente é igual ao numerador desses números binomiais.

Observe:

linha 0 → 1 ⟶ $2^0 = 1$
linha 1 → 1 + 1 ⟶ $2^1 = 2$
linha 2 → 1 + 2 + 1 ⟶ $2^2 = 4$
linha 3 → 1 + 3 + 3 + 1 ⟶ $2^3 = 8$
linha 4 → 1 + 4 + 6 + 4 + 1 ⟶ $2^4 = 16$
linha 5 → 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 ⟶ $2^5 = 32$

Daí, temos:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

Exercícios resolvidos

21 Calcule $E=\binom{5}{2}+\binom{3}{3}+\binom{5}{0}+\binom{7}{1}$.

Resolução

Desenvolvendo os números binomiais, temos:

$$E=\frac{5!}{2!(5-2)!}+\frac{3!}{3!(3-3)!}+\frac{5!}{0!(5-0)!}+\frac{7!}{1!(7-1)!}=$$

$$=10+1+1+7 \Rightarrow E=19$$

22 Determine *x* na igualdade: $\binom{12}{5x}=\binom{12}{x+8}$.

Resolução

Temos dois casos:

1º caso: binomiais iguais

$$\binom{12}{5x}=\binom{12}{x+8} \Rightarrow 5x=x+8 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$$

2º caso: binomiais complementares

$$\binom{12}{5x}=\binom{12}{x+8} \Rightarrow 5x+x+8=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x=4 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \text{ (não satisfaz)}$$

Portanto, $x=2$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

50. Calcule o valor dos seguintes números binomiais:

a) $\binom{5}{4}$ 5

b) $\binom{20}{18}$ 190

c) $\binom{30}{1}$ 30

d) $\binom{10}{7}$ 120

51. Determine o conjunto solução da equação:

$$S=\binom{n-3}{2}=21$$ S ={10}

52. Determine o conjunto solução das equações:

a) $\binom{5}{2x}=\binom{5}{x+2}$ S = {1, 2}

b) $\binom{14}{3p}=\binom{14}{p+6}$ S = {2, 3}

53. Resolva a equação: $\binom{8}{6}+\binom{8}{7}=\binom{9}{x+3}$ S = {−1, 4}

54. Calcule *x* na equação: $\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=35$ S = {6}

55. Determine o número natural *a* que satisfaz a equação:

$$\binom{a}{2}+21=A_{a,2}.$$ 7

56. Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$, mostre que:

a) $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$ Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$

57. Calcule *A*, sendo $A=\binom{4}{0}+\binom{8}{2}+\binom{9}{7}+\binom{10}{1}$. 75

58. Calcule *n*, sabendo que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2\,048$$ n = 11

59. Calcule o valor de:

a) $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}$ 2^{10}

b) $C_{20}^{1}+C_{20}^{2}+C_{20}^{3}+\ldots+C_{20}^{20}$ $2^{20}-1$

60. Resolva a equação $\dfrac{\binom{x}{2}+\binom{x}{3}}{A_{x,4}}=\dfrac{1}{6}$. S = {5}

61. Resolva o sistema: $\begin{cases}\binom{x+y}{2}=28\\ \binom{x-y}{2}=1\end{cases}$ S = {(5, 3)}

Fórmula do binômio de Newton

Uma aplicação do cálculo combinatório é o desenvolvimento da potência n-ésima do binômio $(x + a)$.
Observe os seguintes desenvolvimentos da potência $(x + a)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{lcl}
n = 0 & \longrightarrow & (x + a)^0 = 1 \\
n = 1 & \longrightarrow & (x + a)^1 = 1x + 1a \\
n = 2 & \longrightarrow & (x + a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2 \\
n = 3 & \longrightarrow & (x + a)^3 = 1x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 1a^3 \\
n = 4 & \longrightarrow & (x + a)^4 = 1x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + 1a^4 \\
\vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

Note que os coeficientes desses desenvolvimentos coincidem com os elementos das linhas do triângulo de Pascal, e o número da posição da linha é igual ao expoente de $(x + a)$.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Linha 0:} & 1 & & & & \text{———} \quad \binom{0}{0} \\
\text{Linha 1:} & 1 \quad 1 & & & & \text{———} \quad \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
\text{Linha 2:} & 1 \quad 2 \quad 1 & & & & \text{———} \quad \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
\text{Linha 3:} & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & & & & \text{———} \quad \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
\text{Linha 4:} & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & & & & \text{———} \quad \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
\vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & & & & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots
\end{array}
$$

Fazendo a substituição dos coeficientes pelos respectivos números binomiais, temos:

$$
\begin{aligned}
(x + a)^0 &= \binom{0}{0} a^0x^0 \\
(x + a)^1 &= \binom{1}{0} a^0x^1 + \binom{1}{1} a^1x^0 \\
(x + a)^2 &= \binom{2}{0} a^0x^2 + \binom{2}{1} a^1x^1 + \binom{2}{2} a^2x^0 \\
(x + a)^3 &= \binom{3}{0} a^0x^3 + \binom{3}{1} a^1x^2 + \binom{3}{2} a^2x^1 + \binom{3}{3} a^3x^0 \\
(x + a)^4 &= \binom{4}{0} a^0x^4 + \binom{4}{1} a^1x^3 + \binom{4}{2} a^2x^2 + \binom{4}{3} a^3x^1 + \binom{4}{4} a^4x^0 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
(x + a)^n &= \binom{n}{0} a^0x^n + \binom{n}{1} a^1x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n} a^nx^0
\end{aligned}
$$

Assim, temos a seguinte igualdade denominada **fórmula do binômio de Newton**:

$$
(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \binom{n}{p} a^{n-p}x^p + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n} a^n
$$

Observações:

- O desenvolvimento de $(x + a)^n$ possui $(n + 1)$ termos.
- Os expoentes de *x* decrescem de *n* até zero.
- Os expoentes de *a* crescem de zero até *n*.
- O expoente de *a* é igual ao denominador do coeficiente binomial, e o expoente de *x* é igual à diferença entre o numerador e o denominador de tal coeficiente.
- A soma dos expoentes em cada termo é sempre *n*.

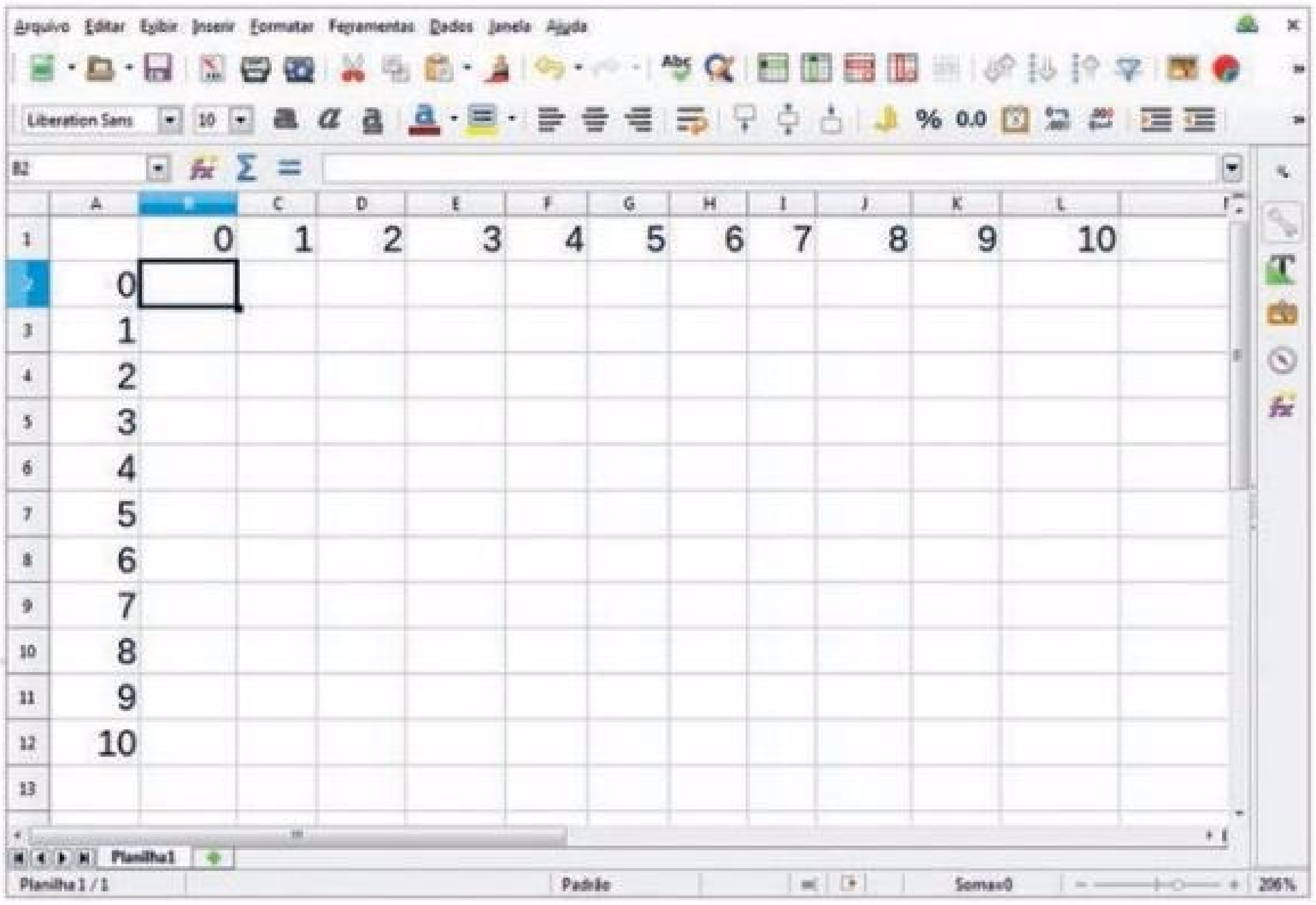
Explorando a tecnologia

O triângulo de Pascal indica-nos a quantidade de combinações possíveis de se fazer a partir de certa quantidade de elementos. Por exemplo, se temos três elementos, podemos fazer: um grupo com nenhum elemento, três grupos com 1 elemento, três grupos com dois elementos, e um grupo com três elementos. No triângulo, isso é observado na "linha 3": 1 3 3 1. Essas combinações são importantes para o cálculo de probabilidades.

Nesta seção vamos aprender a utilizar uma planilha eletrônica para criar o triângulo de Pascal. Siga o roteiro:

1. Abra uma planilha no Libre Office, nomeie-a e salve-a como TRIANGULO_PASCAL.

2. Construa uma tabela: nas linhas, a partir da célula A2, insira o número de elementos inteiros de 0 a 10 e nas colunas, até A12. A partir da célula B1, insira o número de elementos por agrupamento de 0 a 10, até L1.

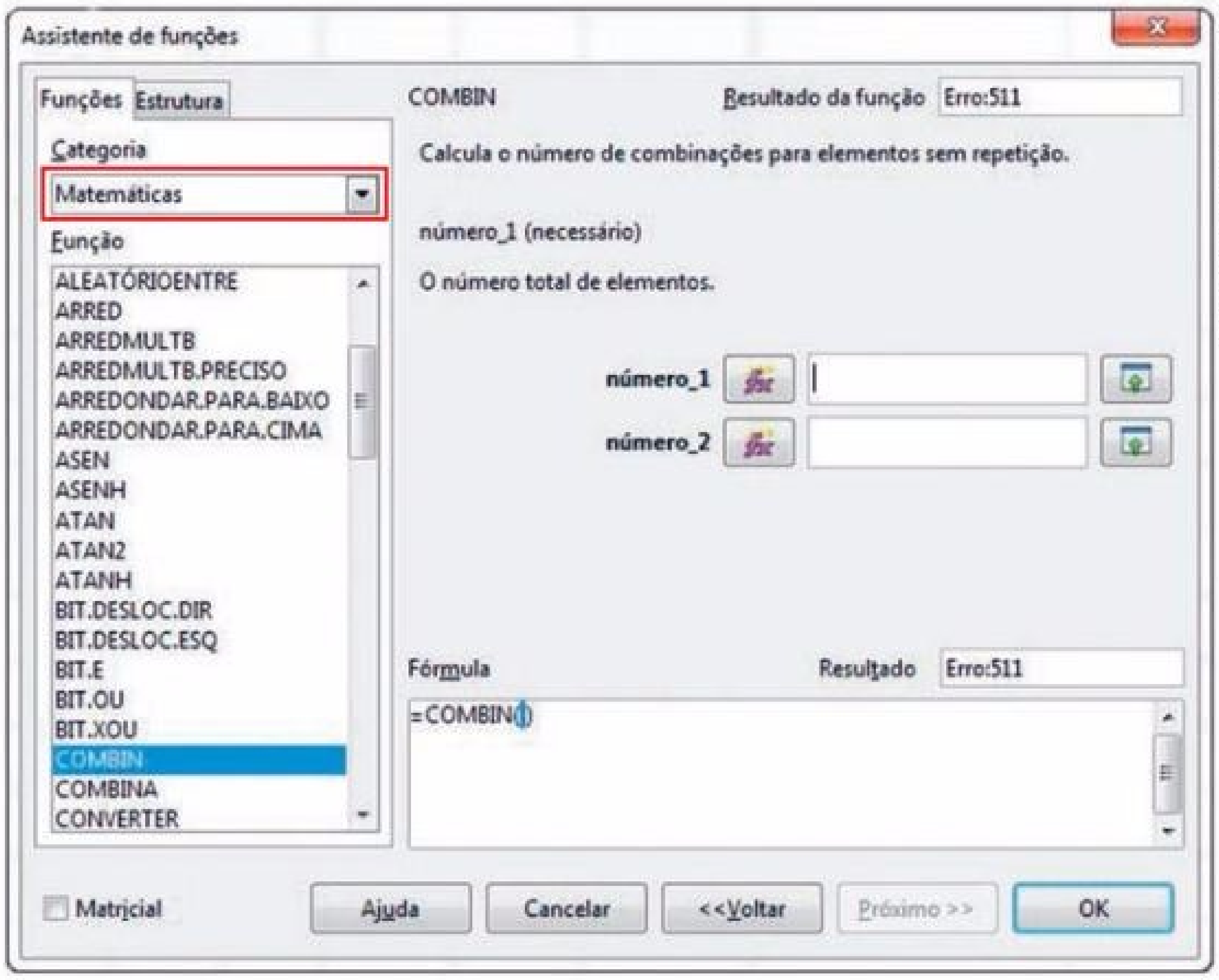


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0											
3	1											
4	2											
5	3											
6	4											
7	5											
8	6											
9	7											
10	8											
11	9											
12	10											
13												

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda
Liberation Sans
10
B2
Planilha1
Planilha 1 / 1
Padrão
Soma=0
206%

3. Selecione a célula B2 e, em seguida, no **Assistente de funções** *fx*, selecione no campo **Categoria** a opção **Matemáticas** (destaque em vermelho) e no campo **Função** selecione **COMBIN**. Clique duas vezes sobre essa função e aparecerão dois campos em aberto.

   O campo **número_1** representa o número de elementos a serem agrupados (linha) e o campo **número_2** representa a quantidade de elementos agrupados (coluna).



Assistente de funções

Categoria: Matemáticas

COMBIN

Resultado da função: Erro:511

Calcula o número de combinações para elementos sem repetição.

número_1 (necessário)

O número total de elementos.

Fórmula: =COMBIN()

Resultado: Erro:511

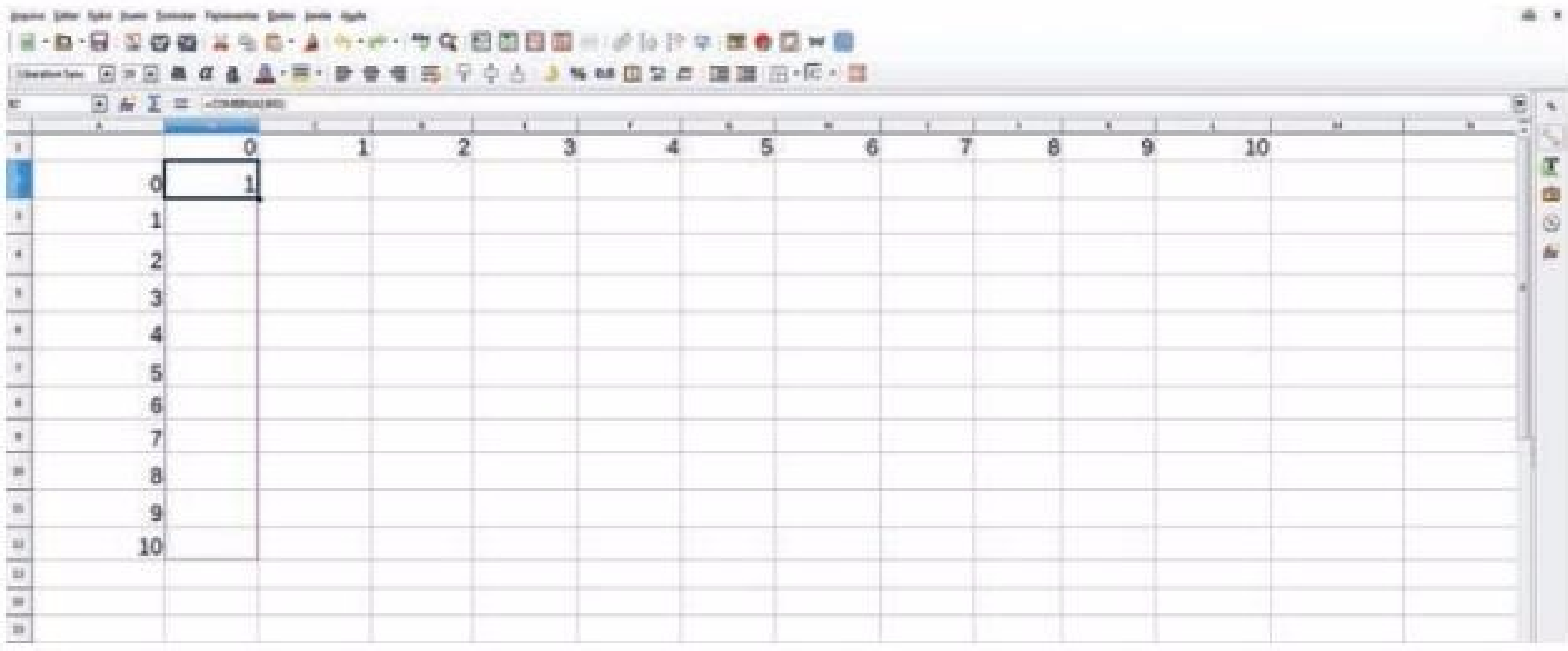
Funções
Estrutura
Função
ALEATÓRIOENTRE
ARRED
ARREDMULTB
ARREDMULTB.PRECISO
ARREDONDAR.PARA.BAIXO
ARREDONDAR.PARA.CIMA
ASEN
ASENH
ATAN
ATAN2
ATANH
BIT.DESLOC.DIR
BIT.DESLOC.ESQ
BIT.E
BIT.OU
BIT.XOU
COMBIN
COMBINA
CONVERTER
número_1
número_2
Matricial
Ajuda
Cancelar
<<Voltar
Próximo >>
OK

Crédito das imagens: Libre Office

4. Insira no campo número_1, A2 e no campo número_2, B$1 e clique em "OK".

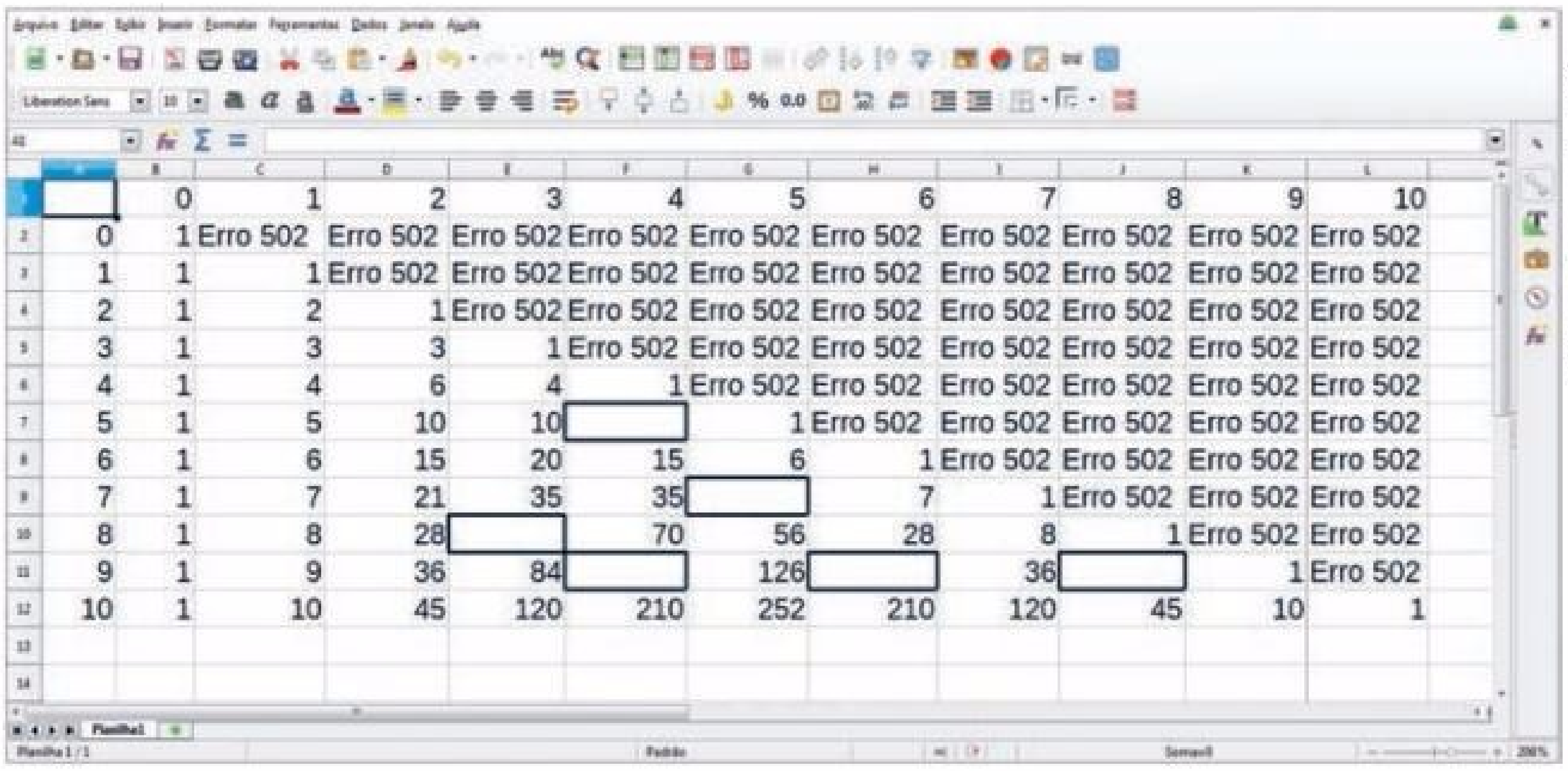
5. Clicando sobre o quadrado preto no canto inferior direito da célula B2, arraste até a célula B12 e aparecerão todas as combinações restantes, ou seja, $\binom{1}{0}, \binom{2}{0}, \ldots, \binom{10}{0}$.

O "$" entre a letra e o número (B$1) é utilizado para fixar a célula quando combinamos os valores: (A2; B1), (A3; B1), ..., (A12; B1), ou seja, $\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \ldots, \binom{0}{10}$. Assim, na célula B2 teremos o resultado da combinação $\binom{0}{0}$ uma vez que A2 = 0 e B1 = 0, por isso o resultado na célula B2 é 1.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

6. Podemos realizar o mesmo procedimento para as células C2, D2, E2 até L2, fixando no campo número_1, A2, e no campo número_2 devemos digitar C$1 para a célula C2, D$1 para a célula D2, E$1 para a célula E2 e assim por diante até a célula L2.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
1	1	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
2	1	2	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
3	1	3	3	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
4	1	4	6	4	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
5	1	5	10	10		1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
6	1	6	15	20	15	6	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502	Erro 502
7	1	7	21	35	35		7	1	Erro 502	Erro 502	Erro 502
8	1	8	28		70	56	28	8	1	Erro 502	Erro 502
9	1	9	36	84		126		36		1	Erro 502
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Crédito de imagens: Libre Office

Como não está definido $C_{n,p}$ para valores de $n < p$, você observará que na tabela aparecerão algumas células da planilha com "Erro". Por exemplo, a combinação $C_{1,2}$, representada pela célula D3, apresentará "Erro" ao inserir os valores na fórmula acima, pois $1 < 2$.

Atividades

Escreva no caderno

1. Utilize a função **COMBIN** para encontrar os valores das células E10, F7, F11, G9, H11 e J11.

E10 = 56, F7 = 5, F11 = 126, G9 = 21, H11 = 84 e J11 = 9.

2. Aplique a 4ª propriedade do triângulo de Pascal para construir os elementos das linhas 11 e 12.

Linha 11: 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11,1 e Linha 12: 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1.

3. Empregue e, se necessário amplie, o triângulo de Pascal para escrever o desenvolvimento dos seguintes binômios:

a) $(x + y)^7$ a) $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

b) $(2x - 1)^4$ b) $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

c) $(x - y)^{11}$ c) $x^{11} - 11x^{10}y + 55x^9y^2 - 165x^8y^3 + 330x^7y^4 - 462x^6y^5 + 462x^5y^6 - 330x^4y^7 + 165x^3y^8 - 55x^2y^9 + 11xy^{10} - y^{11}$

Exercício resolvido

23 Desenvolva:

a) $(x + 3)^4$

b) $(2x^3 - 5)^5$

Resolução

a) Usando a fórmula do binômio de Newton, temos:

$$(x + 3)^4 = \binom{4}{0} x^4 \cdot 3^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot 3^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot 3^4$$

$$(x + 3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

b) Desenvolvendo, temos: $(2x^3 - 5)^5 =$

$$= \binom{5}{0} 5^0 \cdot (2x^3)^5 - \binom{5}{1} 5^1 \cdot (2x^3)^4 + \binom{5}{2} 5^2 \cdot (2x^3)^3 - \binom{5}{3} 5^3 \cdot (2x^3)^2 + \binom{5}{4} 5^4 \cdot (2x^3)^1 - \binom{5}{5} 5^5 \cdot (2x^3)^0 =$$

$$= 1 \cdot 32x^{15} - 5 \cdot 5 \cdot 16x^{12} + 10 \cdot 25 \cdot 8x^9 - 10 \cdot 125 \cdot 4x^6 + 5 \cdot 625 \cdot 2x^3 - 1 \cdot 3\,125 \cdot 1$$

$$(2x^3 - 5) = 32x^{15} - 400x^{12} + 2\,000x^9 - 5\,000x^6 + 6\,250x^3 - 3\,125$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

e) $a^{18} - 6a^{15}x^2y + 15a^{12}x^4y^2 - 20a^9x^6y^3 + 15a^6x^8y^4 - 6a^3x^{10}y^5 + x^{12}y^6$

62. Desenvolva as potências dos binômios a seguir:

a) $(x - 1)^3$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b) $(k^2 + 1)^5$ $k^{10} + 5k^8 + 10k^6 + 10k^4 + 5k^2 + 1$

c) $\left(1 + \frac{3a}{2}\right)^6$ $1 + 9a + \frac{135}{4}a^2 + \frac{135}{4}a^3 + \frac{1\,215}{16}a^4 + \frac{729}{16}a^5 + \frac{729}{64}a^6$

d) $(2a - 3b)^4$ $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

e) $(a^3 - x^2y)^6$

f) $\left(\frac{1}{x^2} + x\right)^3$ $\frac{1}{x^6} + 3 \cdot \frac{1}{x^3} + 3 + x^3$

63. Determine $\left(1+\sqrt{5}\right)^5$. $176 + 80\sqrt{5}$

64. Calcule, utilizando a fórmula do binômio de Newton:

a) $\left(4-\sqrt{2}\right)^3$ $88 - 50\sqrt{2}$

b) $\left(1+\sqrt{3}\right)^4$ $28 + 16\left(\sqrt{3}\right)$

65. Calcule a soma dos coeficientes de $(a + b)^n$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. 2^n

66. Qual é a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento das potências de:

a) $(x + 1)^4$? 16

b) $(2x + 3)^5$? 3 125

c) $(x + y)^8$? 256

67. Desenvolva a potência do binômio: $\left(\frac{1}{2} - 2x\right)^6$

$\frac{1}{64} - \frac{3}{8}x + \frac{15}{4}x^2 - 20x^3 + 60x^4 - 96x^5 + 64x^6$

68. (Cesgranrio-RJ) Desenvolvendo o binômio $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^4$ encontramos um termo em x^2. O coeficiente desse termo é:

a) 12

X b) 24

c) 36

d) 48

e) 192

69. (UFV-MG) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^m$ é 625. O valor de *m* é:

a) 5

b) 6

c) 10

d) 3

X e) 4

70. (Unioeste-PR) O valor da expressão

$153^4 - 4 \cdot 153^3 \cdot 3 + 6 \cdot 153^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 153 \cdot 3^3 + 3^4$ é igual a:

a) $153(153 - 3)^3 + 3$

b) 147^4

c) $15^4 \cdot 3^4$

d) 153^4

X e) $15^4 \cdot 10^4$

Termo geral do binômio de Newton

Observe o desenvolvimento da potência:

$$(x + a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^0 \cdot x^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}a \cdot x^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}a^2 \cdot x^{n-2}}_{T_3} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}a^n \cdot x^0}_{T_{n+1}}$$

1º termo: $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0} a^0 \cdot x^n$

2º termo: $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1} a^1 \cdot x^{n-1}$

3º termo: $T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2} a^2 \cdot x^{n-2}$

⋮ ⋮

(p + 1)-ésimo termo: $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p \cdot x^{n-p}$

Desse modo, um termo qualquer de ordem (p + 1), segundo os expoentes decrescentes de *x*, é dado por:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p \cdot x^{n-p}}$$

Observação:

Para o desenvolvimento de $(x - a)^n$, temos: $(x - a)^n = [x + (-a)]^n$.
Assim, o termo geral é dado pela expressão:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p}(-a)^p \cdot x^{n-p}} \quad \text{ou} \quad \boxed{T_{p+1} = (-1)^p\binom{n}{p}a^p \cdot x^{n-p}}$$

Exercícios resolvidos

24 Determine o 4º termo no desenvolvimento de $(x + 2)^7$.

Resolução

Para o 4º termo, temos:

$p + 1 = 4 \Rightarrow p = 3$; $n = 7$; $a = 2$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p \cdot x^{n-p}$$

$$T_{3+1} = \binom{7}{3} 2^3 \cdot x^{7-3}$$

$$T_4 = \frac{7!}{3!(7-3!)} \cdot 8 \cdot x^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} \cdot 8 \cdot x^4 = 35 \cdot 8 \cdot x^4$$

$$T_4 = 280x^4$$

Portanto, o 4º termo é $280\,x^4$.

25 Obtenha o termo independente de *k* do desenvolvimento de $(2k - 1)^6$.

Resolução

O termo geral é dado por: $n = 6$; $x = 2k$; $a = 1$

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p \cdot x^{n-p}$$

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{6}{p} 1^p \cdot (2k)^{6-p} = (-1)^p \binom{6}{p} 2^{6-p} \cdot k^{6-p}$$

O termo independente de *k* é o que contém k^0; logo:

$6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$

Substituindo no termo geral, temos:

$$T_7 = (-1)^6 \binom{6}{6} 2^0 \cdot k^0 \Rightarrow T_7 = 1$$

Portanto, o termo independente de *k* é 1.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

71. Calcule o 6º termo no desenvolvimento de $(a + 3b)^9$. $30\,618\,a^4b^5$

72. Calcule o 4º termo no desenvolvimento de $(x - 1)^{20}$. $-1\,140x^{17}$

73. Calcule o termo em x^5 no desenvolvimento de $\left(2x^2 - \frac{1}{x_3}\right)^5$. $80x^5$

74. Verifique se o desenvolvimento $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$ tem um termo médio.

Se a resposta for negativa, quais os valores dos termos centrais? Não. $T_3 = 40x^4$ e $T_4 = -80x$

75. Determine *n*, sabendo que o 5º termo do desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de *x*, é $1\,120x^4$. 8

76. Calcule a ordem e o valor do termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{x}\right)^9$. 7º termo; $\frac{28}{9}$

77. Determine o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^9$. 84

78. (IME-RJ) Determine o termo independente de *x* de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$. $-15\,120$

79. (Uespi-PI) O valor que deve ser atribuído a *k*, de modo que o termo independente de *x*, no desenvolvimento de $\left(x + \frac{k}{x}\right)^6$, seja igual a 160, é igual a:

a) 1

[✓ b) 2]

c) 6

d) 8

e) 10

80. (Unit-SE) Se a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento do binômio $(5x - 2y)^n$ é igual a 729, então *n* é igual a:

a) 4

b) 5

[✓ c) 6]

d) 7

e) 8

81. (UFU-MG) No desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{27}$, o coeficiente de x^{18} é igual a:

[✓ a) $\frac{27!}{12!15!}$]

b) $\frac{27!}{18!9!}$

c) $\frac{27!}{25!2!}$

d) $\frac{27!}{24!3!}$

82. (UFV-MG) O coeficiente do termo independente de *x* de $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^8$ para $x \neq 0$, é:

[✓ a) 28]

b) 56

c) 3

d) 0

e) 36

83. (UECE-CE) Quando simplificado, o terceiro termo de $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{a^2}\right)^6$ é:

a) $\frac{6x^2}{a^9}$

b) $-\frac{6x^2}{a^9}$

c) $-\frac{15}{x}$

[✓ d) $\frac{15}{x}$]

84. (FGV-SP) Sendo *k* um número real positivo, o terceiro termo do desenvolvimento de $(-2x + k)^{12}$, ordenado segundo expoentes decrescentes de *x*, é $66x^{10}$. Assim, é **correto** afirmar que *k* é igual a:

a) $\frac{1}{66}$

b) $\frac{1}{64}$

c) $\frac{1}{58}$

d) $\frac{1}{33}$

[✓ e) $\frac{1}{32}$]

85. (UFSM-RS) Ao chegar a uma das livrarias do *shopping*, um professor selecionou alguns livros de Matemática para o Ensino Médio, cujo conteúdo permitiu que ele elaborasse a questão a seguir.

Resolva essa questão, assinalando a resposta **correta**.

Desenvolvendo o binômio $(2x - 1)^8$, o quociente entre o quarto e o terceiro termos é:

a) $-4x$

b) $-x$

c) x

[✓ d) $-\frac{1}{x}$]

e) $4x$

CAPÍTULO 9

Probabilidade

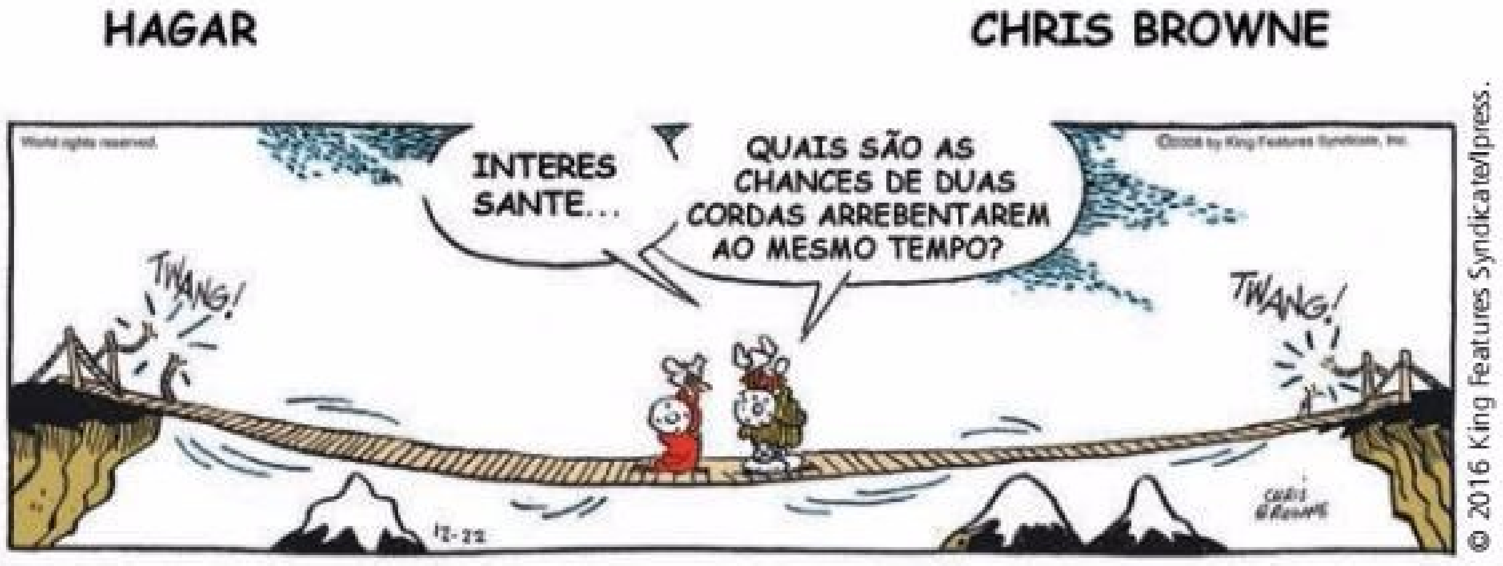
Ao aquecermos a água, a que temperatura ela entra em ebulição?

Se largarmos uma bola em determinada altura, com que velocidade ela atingirá o chão?

Conhecidas certas condições, é perfeitamente possível responder a essas duas perguntas antes mesmo da realização desses experimentos.

Esses experimentos são denominados **determinísticos**, pois neles os resultados podem ser previstos.

Agora, observe a seguinte situação.


HAGAR
CHRIS BROWNE
TWANG!
INTERESSANTE...
QUAIS SÃO AS CHANCES DE DUAS CORDAS ARREBENTAREM AO MESMO TEMPO?
TWANG!

© 2016 King Features Syndicate/Ipress.

A preocupação da personagem da tirinha sobre a **chance** de acontecer determinada situação é uma preocupação que persegue a humanidade, pois a maioria dos acontecimentos na vida não pode ser previsto com certeza, apesar de muitas vezes ser possível descobrir as possibilidades de ocorrência de situações relacionadas a eles.

Sabemos que a chance não pode ser controlada, mas é possível medi-la, e isso é possível graças à teoria das probabilidades.

Neste capítulo, você vai estudar situações em que o acaso é a principal característica e também alguns processos de cálculo de probabilidade.

Experimentos aleatórios

Considere agora os seguintes experimentos:

- No lançamento de uma moeda, qual é a face voltada para cima?
- No lançamento de um dado comum, na forma de um cubo com as faces numeradas de 1 a 6, que face ficou para cima?
- Uma carta foi retirada de um baralho completo. Que carta é essa?

No lançamento de uma moeda, podemos obter "cara" ou "coroa"; no lançamento do dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 ou 6; e para as cartas, temos 52 resultados possíveis (em um baralho de 52 cartas diferentes).

Mesmo se esses experimentos forem repetidos várias vezes, nas mesmas condições, não poderemos prever o resultado.

Photodisc/Getty images

Quando uma moeda cai, não sabemos se sairá "cara" ou "coroa", mas sabemos que são apenas duas possibilidades.

Um experimento cujo resultado, embora único, é imprevisível, é denominado experimento aleatório.

Um experimento ou fenômeno aleatório apresenta as seguintes características:

- pode se repetir várias vezes nas mesmas condições;
- é conhecido o conjunto de todos os resultados possíveis;
- não se pode prever o resultado exato.

Como não podemos prever o resultado de um experimento aleatório, procuraremos determinar as possibilidades de ocorrência de situações relacionadas a ele.

A teoria da probabilidade surgiu para medir a "chance" de ocorrer determinado resultado em um experimento aleatório.

Espaço amostral e evento

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral**, que vamos indicar por *U*.

Nota: Indicaremos por n(U) o número de elementos de *U*.

Vamos analisar alguns experimentos aleatórios:

- No lançamento de uma moeda, temos como espaço amostral sair "cara" ou sair "coroa". Logo, U = {cara, coroa} e n(U) = 2.
- No lançamento de um dado comum, o espaço amostral é o conjunto U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e n(U) = 6.
- Na escolha casual de uma nota musical, temos como espaço amostral o conjunto U = {Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi, Fá} e n(U) = 7.
- No lançamento de uma moeda três vezes consecutivas, temos como espaço amostral o conjunto: U = {(K, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)}, em que *K* representa cara e *C* representa coroa, e n(U) = 8.

Neste capítulo, trataremos apenas de espaços amostrais finitos.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado **evento**.

No lançamento de um dado, por exemplo, em relação à face voltada para cima, podemos ter os eventos:

- A, o número é par: A = {2, 4, 6} e n(A) = 3.
- B, o número é menor que 5: B = {1, 2, 3, 4} e n(B) = 4.
- C, o número é múltiplo de 10: C = { } e n(C) = 0.

Tipos de eventos

Vamos considerar o experimento aleatório: lançamento de dois dados comuns, um branco e outro vermelho, e observar o número da face voltada para cima.

O espaço amostral que descreve esse experimento é:

U = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

Sergey Nivens/Shutterstock/Glow Images

Pessoa lançando dois dados.

O primeiro número de cada par acima indica o resultado no dado branco, e o segundo número indica o resultado no dado vermelho. Por exemplo, o resultado (3, 6) indica que no dado branco saiu 3 e no vermelho saiu 6.

Vamos agora conhecer alguns tipos de eventos que utilizam o espaço amostral *U* como referência. Considere os eventos:

1º) *A*: a soma dos resultados nos dois dados é menor que 4.

A = {(1, 1) (1, 2), (2, 1)}, pois $1 + 1 < 4$, $1 + 2 < 4$, $2 + 1 < 4$. Então n(A) = 3.

2º) *B*: a soma dos resultados nos dois dados é menor que 1.

B = ∅, a soma dos resultados é sempre maior que 1, pois a menor soma possível é 2. Então n(B) = 0.

Quando um evento é o conjunto vazio, dizemos que o evento é **impossível**.

3º) *C*: a soma dos resultados nos dois dados é menor ou igual a 12.

C = U, pois a maior soma possível dos resultados é 12, logo n(C) = 36.

Quando um evento é o próprio espaço amostral *U*, dizemos que o evento é **certo**.

4º) *D*: o resultado no dado branco é 5 e no vermelho é 3.
O evento, nesse caso, é $D = \{(5, 3)\}$; logo: $n(D) = 1$

Quando um evento é um conjunto unitário, dizemos que o evento é **simples** ou **elementar**.

5º) *E*: o resultado no dado branco é um número ímpar.
F: o resultado no dado branco é um número par.

Assim:

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$ e

$F = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Nesse caso, os conjuntos *E* e *F* são tais que $E \cup F = U$ e $E \cap F = \varnothing$, ou seja, *E* e *F* são conjuntos complementares.

Quando dois eventos, *E* e *F*, são tais que $E \cup F = U$ e $E \cap F = \varnothing$, dizemos que os eventos *E* e *F* são **complementares**.

Indicamos o complementar de um evento *A* por $\overline{A}$.
Podemos observar que entre dois eventos complementares valem as igualdades:

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A = U - \overline{A} \qquad \overline{A} = U - A$$

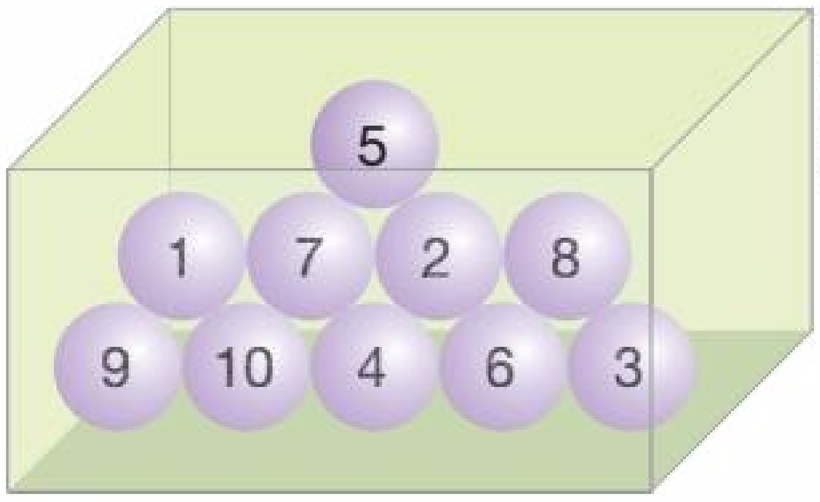
6º) *G*: a soma dos resultados dos dois dados é igual a 5.
H: a soma dos resultados dos dois dados é menor ou igual a 3.

Assim: $G = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ e $H = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
Observe que: $G \cap H = \varnothing$

Quando dois eventos, *G* e *H* são tais que $G \cap H = \varnothing$, dizemos que os eventos *G* e *H* são eventos **mutuamente exclusivos**.

Exercícios resolvidos

1 Uma urna contém 10 bolas idênticas numeradas de 1 a 10.
Retira-se uma bola ao acaso e observa-se o número indicado.



Editoria de arte

Descreva de forma explícita os conjuntos a seguir e dê o número de elementos de cada um.

a) O espaço amostral *U*.

b) O evento *A*: o número da bola é ímpar.

c) O evento *B*: o número da bola é maior que 6.

Resolução

a) O conjunto de todos os resultados possíveis é representado pelo seguinte espaço amostral:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Logo, $n(U) = 10$.

b) Se o número da bola é ímpar, temos o evento:
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Logo, $n(A) = 5$.

c) Se o número da bola é maior que 6, temos o evento:
$B = \{7, 8, 9, 10\}$. Logo, $n(B) = 4$.

2 Em um cesto há 6 bolas de vôlei, sendo 3 brancas e 3 vermelhas. Desse cesto são retiradas, sucessivamente, 3 bolas. Calcule o número de elementos dos eventos a seguir.

a) As três bolas têm a mesma cor.

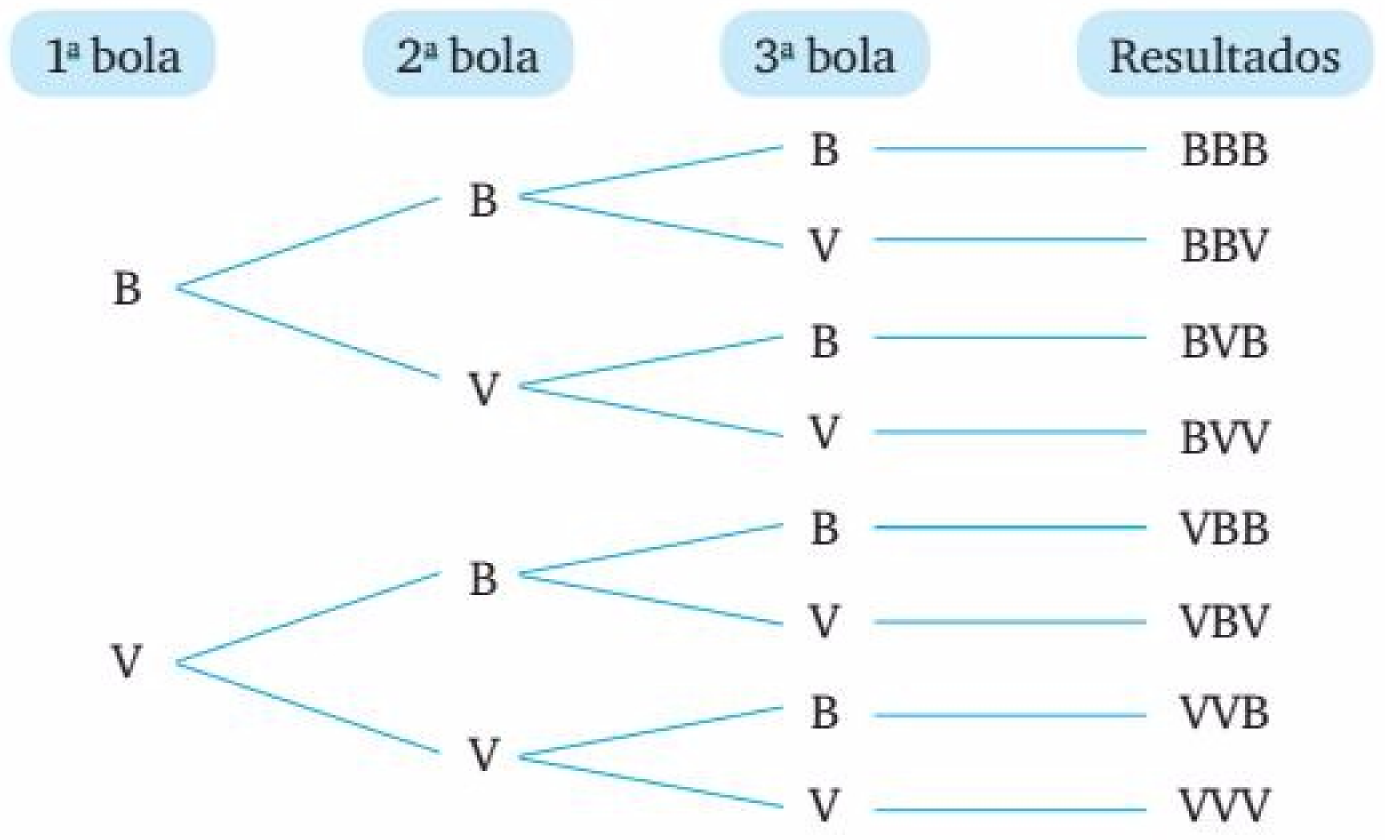
b) Duas das bolas são brancas.

c) As três bolas são vermelhas.

d) O número de bolas brancas é igual ao número de bolas vermelhas.

Resolução

Chamando a bola branca de *B* e a vermelha de *V* e construindo a árvore das possibilidades, temos:



O espaço amostral desse experimento é:

$U = \{(BBB), (BBV), (BVB), (BVV), (VBB), (VBV), (VVB), (VVV)\}$ e $n(U) = 8$

a) Se as três bolas têm a mesma cor, o evento é: $A = \{(BBB), (VVV)\}$ e $n(A) = 2$

b) Se duas das bolas são brancas, temos: $B = \{(BBV), (BVB), (VBB)\}$ e $n(B) = 3$

c) O evento em que três bolas são vermelhas é: $C = \{(VVV)\}$ e $n(C) = 1$

d) Observando o espaço amostral, verifica-se que em qualquer resultado possível o número de bolas brancas nunca é igual ao número de bolas vermelhas. Logo, esse evento é representado pelo conjunto vazio:

$D = \emptyset$ e $n(D) = 0$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Determinar o espaço amostral nos seguintes experimentos.

a) Joga-se uma moeda e verifica-se a face voltada para cima. Faça C = cara e K = coroa. $U = \{C, K\}$

b) Joga-se um dado comum e verifica-se o número da face voltada para cima. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) Jogam-se duas moedas diferentes e verifica-se as faces voltadas para cima. $U = \{(C, C), (C, K), (K, K), (K, C)\}$

2. Considere o experimento: lançamento de dois dados, um branco e outro verde, e a observação da face superior. Determine: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) o espaço amostral;

b) o evento: ocorrência de números iguais nos dois dados;

c) o evento: ocorrência de números cuja soma seja 5;

d) o número de elementos de cada item anterior.

3. Considere a extração, ao acaso, de 1 (uma) carta de um baralho de 52 cartas. Dê exemplo de dois eventos (acontecimentos): Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) impossíveis;

b) complementares.

4. Em uma caixa há 5 papeletas numeradas de 1 a 5. Retiram-se duas delas ao acaso e calcula-se a soma dos números escritos. Determine os eventos para obter uma soma:

a) par e múltipla de 3; $\{(1, 5), (2, 4)\}$

b) ímpar ou múltipla de 3; $\{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (1, 5), (2, 4), (4, 5)\}$

c) múltipla de 7. $\{(2, 5), (3, 4)\}$

5. Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente e se observam as faces superiores. Determine: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) o espaço amostral desse experimento;

b) o evento: sai “cara” e número ímpar;

c) o evento: sai “coroa” e número par.

6. Considere o lançamento de três dados com as faces numeradas de 1 a 6. Determine o número de possibilidades dos seguintes eventos:

a) soma dos pontos das faces superiores dos três dados igual a 3; 1 possibilidade

b) soma dos pontos das faces dos três dados igual a 10. 27 possibilidades

Probabilidade

Considere as seguintes situações em que temos somente eventos simples.

1ª situação: No lançamento de um dado perfeito, isto é, não viciado, com as faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de sair "3" é menor do que a probabilidade de sair "5"?

Espaço amostral: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Evento *A*: sair 3.
  $A = \{3\} \Rightarrow A$ é um evento simples.
- Evento *B*: sair 5.
  $B = \{5\} \Rightarrow B$ é um evento simples.

Portanto, a probabilidade de "sair 3" é de "1 em 6". A probabilidade de "sair 5" também é de "1 em 6".

Dizemos que a **probabilidade** de ocorrer o evento *A* é igual a $\frac{1}{6} = 0{,}1666...$ ou, ainda, de 16,66...%.

Analogamente, a probabilidade de ocorrer o evento *B* é igual a $\frac{1}{6}$ ou, ainda, de 16,66...%.

Portanto, a probabilidade de sair 3 é igual à probabilidade de sair 5.

Para cada um dos outros números do espaço amostral, a probabilidade continua a mesma: $\frac{1}{6}$.

2ª situação: No lançamento de uma moeda, não adulterada, qual a probabilidade de sair "cara"?

Temos: $U = \{\text{cara, coroa}\}$

- Evento *B*: sair "cara".
  $B = \{\text{"cara"}\} \Rightarrow B$ é um evento simples.

Nesse caso, a probabilidade de sair "cara" é de "1 em 2" ou de $\frac{1}{2} = 0{,}50$ ou, ainda, de 50%.

Observe que a probabilidade de sair "coroa" também é de $\frac{1}{2}$.

3ª situação: Ao retirarmos uma carta de um baralho de 52 cartas, não adulterado, qual a probabilidade de sair um "rei de copas"?

Nesse caso, a probabilidade é de "1 em 52" ou de $\frac{1}{52} \simeq 0{,}019$ ou, ainda, de aproximadamente 1,9%.

Também, nesse caso, a probabilidade de ser retirada ao acaso qualquer uma das outras 51 cartas do baralho completo é de $\frac{1}{52}$.

4ª situação: Em uma partida do Campeonato Brasileiro de Futebol, há um sorteio para definir os jogadores que farão exame *antidoping* após a partida. Suponha que no jogo Vitória × Atlético Mineiro um jogador de cada time, entre os 11 titulares e os 7 reservas, foi sorteado. Qual a probabilidade de o goleiro titular ser o sorteado pelo time do Vitória?

- Evento *A*: Ser sorteado o goleiro titular do Vitória.
  Como são $11 + 7 = 18$ jogadores, temos $n(U) = 18$.
  O goleiro titular é 1 entre os 18 jogadores, isto é, $n(A) = 1$.
  Então, a probabilidade de ele ser escolhido é "1 em 18", ou seja,
  $\frac{1}{18} \simeq 0{,}0555...$ ou, ainda, aproximadamente 5,5%.

Na verdade, qualquer jogador da equipe terá a mesma probabilidade (5,5%) de ser escolhido para o exame *antidoping*.

Considere um experimento aleatório em que, para cada um dos *n* eventos simples, do espaço amostral *U*, a chance de ocorrência é a mesma. Nesse caso, dizemos que o espaço amostral é um **espaço equiprovável** e que a probabilidade de cada evento simples é $\frac{1}{n}$.

Para um evento simples *A*, indicamos a probabilidade de *A* por P(A), e temos:

$$P(A) = \frac{1}{n(U)}$$

em que n(U) é o número de elementos do espaço amostral *U*.

Vamos analisar agora a seguinte situação:

5ª situação: No lançamento de dois dados, um branco e um vermelho, qual a probabilidade de a soma dos resultados dos dois dados ser maior que 7?

Observe o espaço amostral *U* desse evento:

$$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Como *U* é um espaço equiprovável e n(U) = 36, a probabilidade de cada evento simples é $\frac{1}{36}$.

Vamos chamar de *E* o evento "A soma dos resultados dos dois dados é maior que 7".

$$E = \{(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Logo, n(E) = 15.

Podemos entender P(E) como a soma das probabilidades dos 15 eventos simples de probabilidade $\frac{1}{36}$.

$$P(E) = \underbrace{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{36}}_{\text{15 vezes}} = \frac{15}{36}$$

A probabilidade do evento *E* é dada por: $P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{15}{36}$

Dessa maneira, podemos ampliar a definição de probabilidade de um evento simples para a probabilidade de um evento qualquer P(A):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

em que n(U) é o número de elementos do espaço amostral *U* e n(A) é o número de elementos do evento *A*.

A probabilidade de ocorrência de um evento *A* qualquer é um número entre zero e um, ou seja, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Assim, se P(A) = 0, *A* é um evento impossível. Se P(A) = 1, *A* é um evento certo.

Exercícios resolvidos

3 No lançamento de um dado comum, determine a probabilidade de se obter:

a) o número 2;

b) um número par;

c) um número múltiplo de 3.

Dado.

Wavebreak Media LTD/Low-Budget/Easypix

Resolução

O espaço amostral é U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, portanto, n(U) = 6.

a) Ocorrência do número 2:

A = {2}, portanto, n(A) = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}1667$$

$P(A) \simeq 0{,}1667$

$P(A) \simeq 16{,}67\%$

b) Ocorrência de número par:

B = {2, 4, 6}, portanto, n(B) = 3

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

$P(B) = 50\%$

c) Ocorrência de número múltiplo de 3:

C = {3, 6}, portanto, n(C) = 2

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0{,}3333$$

$P(C) \simeq 33{,}33\%$

4 Uma confederação de Futebol, em respeito ao Estatuto do Torcedor, realiza um sorteio para definir os árbitros das partidas de cada rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol.

Trio de arbitragem em partida de futebol.

Vinicius Costa/Futura Press

O quadro a seguir mostra a quantidade de árbitros por estado que entraram no sorteio para os jogos de uma determinada rodada do campeonato.

Estado	Quantidade de árbitros
SP	19
RJ	17
SC	11
PR	10
MG	7
GO	9
RS	9
DF	6
CE	5
PA	7

Fonte: Confederação Brasileira de Futebol. **Relação de árbitros**. Disponível em: <http://www.cbf.com.br/Arbitragem/Informações>. Acesso em: 15 mar. 2016.

Para o jogo Flamengo (RJ) × Cruzeiro (MG), qual a probabilidade de:

a) o árbitro sorteado ser um paulista;

b) o árbitro sorteado não ser originário dos estados desses clubes;

c) o árbitro sorteado não ser paranaense.

Resolução

a) Há no total 100 árbitros no sorteio, dos quais 19 são paulistas.

Sendo o evento *A*: árbitro sorteado ser paulista, temos:

n(U) = 100 e n(A) = 19

$$P(A) = \frac{19}{100} = 19\%$$

b) Os clubes são do Rio de Janeiro (17 árbitros) e Minas Gerais (7 árbitros).

Portanto, são 100 − (17 + 7) = 76 árbitros possíveis.

Sendo o evento *B*: árbitro sorteado não ser originário dos estados desses clubes, temos:

$$P(B) = \frac{76}{100} = 76\%$$

c) Para calcular a probabilidade do árbitro não ser paranaense, devemos considerar que ele pode ser de qualquer estado, menos do Paraná. Temos:

$n(\overline{PR}) = 90$, em que $\overline{PR}$ significa não ser do estado do Paraná.

Assim, podemos concluir que a probabilidade de o árbitro não ser paranaense é:

$$P(\overline{PR}) = \frac{90}{100} = 90\%$$

5 Considere os números de três algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos 2, 3 e 4. Imagine que uma dessas permutações foi escolhida ao acaso e considere os eventos:

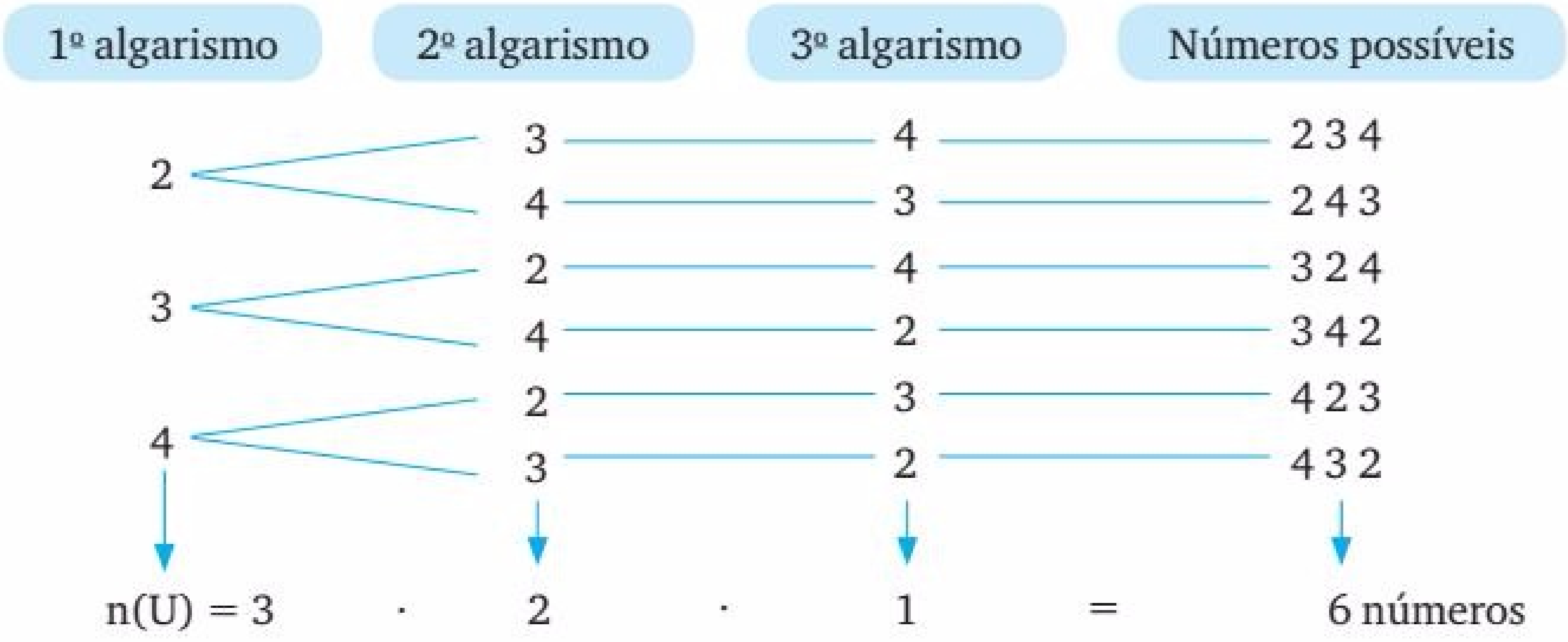
A: o número sorteado é múltiplo de 3;

B: o número sorteado é múltiplo de 5.

Qual a probabilidade de ocorrer cada um desses eventos?

Resolução

Vamos construir a árvore das possibilidades para obter o espaço amostral desse experimento.



U = {234, 243, 324, 342, 423, 432}. Logo, n(U) = 6.

Lembrando que um número é múltiplo de 3 quando a soma dos valores de seus algarismos é divisível por 3. Assim, concluímos que os seis números formados são múltiplos de 3.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{ou} \quad P(A) = 100\%$$

Por outro lado, entre os números formados não há múltiplos de 5 (números que terminam em 0 ou 5).

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{0}{6} = 0 \quad \text{ou} \quad P(B) = 0\%$$

Assim, é certo que será sorteado um múltiplo de 3 e é impossível ser sorteado um múltiplo de 5, portanto, $P(A) = 1$ e $P(B) = 0$.

6 Considere um conjunto de 10 frutas em que 3 estão estragadas. Escolhendo aleatoriamente 2 frutas desse conjunto, determine a probabilidade de:

a) ambas não estarem estragadas;

b) pelo menos uma estar estragada.

Resolução

a) Cálculo do número de maneiras de escolher 2 frutas entre 10:

$$n(U) = C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} = 45$$

Seja *A* o evento "ambas as frutas escolhidas não estão estragadas".

O cálculo do número de maneiras de escolher 2 frutas não estragadas entre 7 (10 − 3 = 7) é:

$$n(A) = C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 5!} = 21$$

Logo, a probabilidade desse evento é: $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{21}{45} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{15}$

b) O evento *B* "pelo menos uma esteja estragada" significa que ou uma fruta ou duas frutas devem estar estragadas.

O evento *B* é o complementar $\overline{A}$ do evento *A*, ou seja, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = U$. Assim devemos ter:

$$n(A) + n(\overline{A}) = n(U)$$

Como $n(U) \neq 0$: $\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(\overline{A})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)} \Rightarrow P(A) + (P(\overline{A}) = 1$

$$\frac{7}{15} + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{15} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{8}{15}$$

Observação:

- Sejam *A* e $\overline{A}$ dois eventos complementares de um espaço amostral *U*, então:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

7. Uma caixa contém 30 bolas de madeira e todas com o mesmo tamanho, sendo 18 azuis e 12 amarelas. Retirando-se uma bola qualquer dessa urna, qual a probabilidade de ela ser azul? E a probabilidade de ser amarela? P(azul) = $\frac{3}{5}$ e P(amarela) = $\frac{2}{5}$

8. No lançamento de um dado de forma cúbica com as faces numeradas de 1 a 6, determine a probabilidade de se obter:

a) o número 1; $\frac{1}{6}$

b) um número primo; $\frac{1}{2}$

c) um número divisível por 2; $\frac{1}{2}$

d) um número menor que 5; $\frac{2}{3}$

e) um número maior que 6. 0

9. Com os algarismos 3, 5 e 7 formamos todos os números de 3 algarismos possíveis, sem repetição. Escolhendo um desses números ao caso, qual a probabilidade de essa escolha recair em um número:

a) múltiplo de 3? 1 ou 100% b) par? 0

10. No lançamento simultâneo de dois dados comuns, um branco e um vermelho, determine a probabilidade dos seguintes eventos:

a) os números são iguais; $\frac{1}{6}$

b) a soma dos números é igual a 9; $\frac{1}{9}$

c) a soma dos números é menor que 4; $\frac{1}{12}$

d) a soma dos números é igual a 8 e um dos dados apresenta o número 6. $\frac{1}{18}$

11. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 20. Retirando-se uma bola, ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer:

a) número ímpar? $\frac{1}{2}$

b) número maior que 7? $\frac{13}{20}$

c) número múltiplo de 5? $\frac{1}{5}$

d) número divisível por 3? $\frac{3}{10}$

12. De um baralho de 52 cartas, tira-se ao acaso uma das cartas. Determine a probabilidade de que a carta seja:

a) uma dama; $\frac{1}{13}$

b) uma dama de paus; $\frac{1}{52}$

c) uma carta de ouros; $\frac{1}{4}$

d) uma figura. $\frac{3}{13}$

13. Em uma gaveta, há 3 canetas que escrevem em azul, 2 em preto, 4 em verde e 3 que não possuem carga. Escolhendo, ao acaso, uma dessas canetas, determine a probabilidade de que a caneta:

a) escreva; $\frac{3}{4}$ c) escreva em azul. $\frac{1}{4}$

b) não escreva; $\frac{1}{4}$

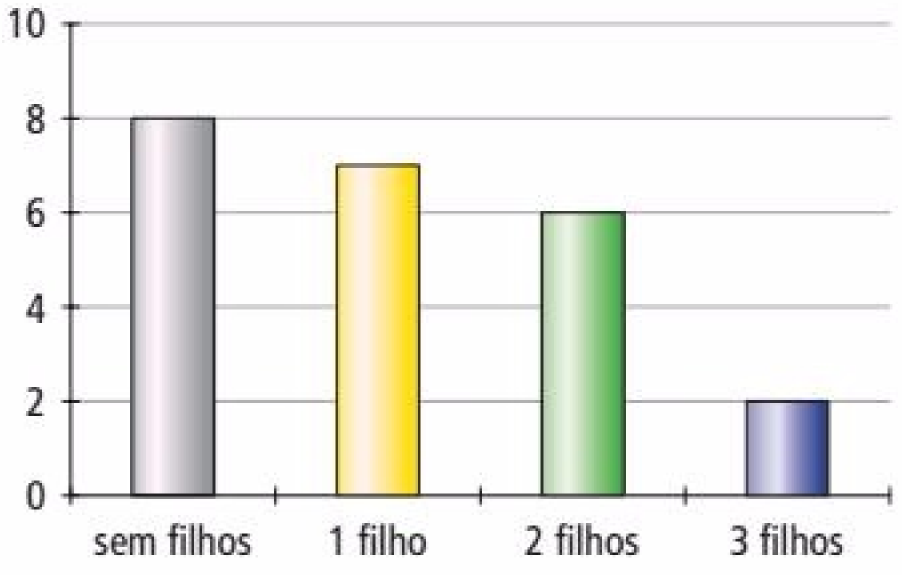
14. Considere o lançamento de dois dados. Determine:

a) a probabilidade de se obter uma total de 7 pontos; $\frac{1}{6}$

b) a probabilidade de não se obter um total de 7 pontos. $\frac{5}{6}$

15. Verificou-se em uma pesquisa que a probabilidade de que uma mulher fumante com idade acima de 40 anos tenha câncer é de aproximadamente 75,6%. Qual a probabilidade de que uma mulher fumante com mais de 40 anos não tenha câncer? 24,4%

16. (Enem/MEC) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.



Editoria de arte

Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{7}{23}$ x e) $\frac{7}{25}$

17. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra COVEST, qual a probabilidade de suas primeira e última letras serem consoantes?

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{1}{5}$ x d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

18. (Enem/MEC) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{19}{100}$ x c) $\frac{20}{100}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{80}{100}$

19. (UEA-AM) Em um aquário, há 6 peixinhos com 2 cm de comprimento cada um, 15 peixinhos pretos com 3 cm de comprimento cada um e 9 peixinhos dourados com 5 cm de comprimento cada um. Retirando-se aleatoriamente um peixinho desse aquário, a probabilidade de que o comprimento dele seja, no mínimo, 3 cm é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ x e) $\frac{4}{5}$

20. (UFPel-RS) As corridas de cavalos começaram nas chamadas canchas retas e se constituem em grande atrativo para seus apreciadores, reunindo bom número de pessoas e sendo motivo de festa nos lugares em que se realizam.

Existem diferentes modalidades de apostas, entre eles a trifeta, que pode ser simples, combinada ou parcial. Se você pedir no guichê, por exemplo, “trifeta simples 2-6-5”, para acertar é necessário que o cavalo de número 2 (dois) chegue em primeiro, o de número 6 (seis), em segundo e, é claro, o de número 5 (cinco), em terceiro.

Disponível em: <http://www.jcb.com.br>. Acesso em: 18 jul. 2005.

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que a probabilidade de um apostador acertar a “trifeta simples” num páreo de que participam 7 cavalos é de:

a) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{3}{7}$
x c) $\frac{1}{210}$
d) $\frac{1}{70}$
e) $\frac{3}{70}$

21. (Enem/MEC) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega-sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: <www.caixa.gov.br>. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega-sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente:

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor
b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor
x c) 4 vezes menor
d) 9 vezes menor
e) 14 vezes menor

História da Matemática

O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística

A teoria da Probabilidade apareceu como ramo da Matemática em meados do século XV, embora tenha se iniciado como ciência empírica muito antes desse período. Suas raízes apareceram principalmente nos jogos e apostas. Há registros de que, por volta do 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar (astragalus) fosse utilizado formando faces como as de um dado.

Mesmo antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já havia jogos utilizando ossinhos. Os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados e cartas que, durante a Idade Média, foram proibidos pela Igreja Cristã.

No século XVI, o matemático e jogador italiano, Jerónimo Cardano (1501-1576), decidiu estudar as probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Analisou seriamente as probabilidades de retirar ases de um baralho de cartas e de obter “setes” com dois dados e publicou os resultados dessas pesquisas em um manual para jogadores chamado “Liber de Ludo Aleae” (O livro dos jogos de azar - 1526).

Cardano é considerado iniciador da teoria das probabilidades, pois foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto[1] e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades. Ele afirmou que, ao jogar dados, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis.

Apesar disso, muitos autores atribuem a origem dessa teoria às correspondências trocadas entre Pascal e Fermat em que falavam do objetivo de se obter solução dos problemas de jogos de azar propostos, em 1653, por Chevalier de Méré, conhecido como filósofo do jogo que também interessou-se pelo uso da Matemática para determinar as apostas nos jogos de azar.

LOPES, Celi Espasandin; MEIRELLES, Elaine. **O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística.** Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2016.

Atividades

Escreva no caderno

1. Quais as principais raízes da teoria da Probabilidade?

Jogos e apostas.

2. O texto expõe que Cardano estudou as probabilidades de ganhar em vários jogos de azar, tendo analisado "seriamente as probabilidades de retirar azes de um baralho de cartas e de obter ‘setes’ com dois dados". Determine as probabilidades dos eventos descritos. Considere um baralho de 52 cartas e dados de 6 faces.

P(ases) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e P(soma sete) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

---

[1] Entende-se por dado honesto, o dado não viciado, no qual todas as faces têm a mesma chance de sair.

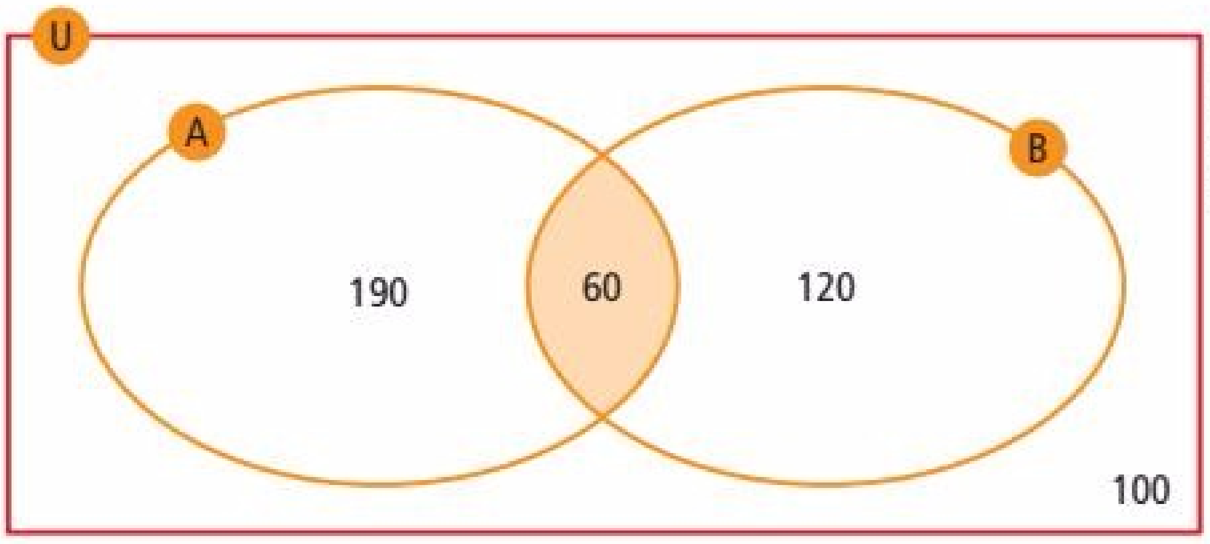
Probabilidade da união de dois eventos

Vamos estudar agora algumas situações em que é necessário saber a probabilidade da ocorrência de duas condições separadas e da ocorrência dessas condições simultaneamente.

Acompanhe a análise de uma situação envolvendo a pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais. Foram consultadas 470 pessoas, e o resultado foi o seguinte: 250 delas leem o jornal *A*, 180 leem o jornal *B* e 60 leem ambos os jornais. Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, vamos discutir a probabilidade de ele ser:

a) leitor dos jornais *A* e *B*;

Vamos construir um diagrama em que os leitores do jornal *A* são representados pelo conjunto *A*, os leitores do jornal *B* pelo conjunto *B* e todas as pessoas envolvidas na pesquisa, nosso espaço amostral, pelo conjunto *U*. Temos:



Editoria de arte

Como 60 pessoas leem ambos os jornais, marcamos 60 na intersecção de *A* com *B*. Se 250 leem o jornal *A*, marcamos 190 (250 − 60 = 190) na parte de *A* do conjunto que não está em *B*. Se 180 leem o jornal *B*, marcamos 120 (180 − 60 = 120) na parte de *B* do conjunto que não está em *A*. Como foram consultadas 470 pessoas e já marcamos 370 (190 + 60 + 120 = 370), concluímos que 100 pessoas não leem nenhum dos dois jornais. Assim, a probabilidade de que a pessoa leia ambos os jornais é:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{60}{470} = \frac{6}{47}$$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{6}{47}$.

b) leitor do jornal *A* ou do jornal *B*.

Quando adicionarmos o número de pessoas que leem o jornal *A* com o número de pessoas que leem o jornal *B*, contamos duas vezes aquelas que leem os dois jornais, por isso devemos subtrair esse grupo:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo essa igualdade por n(U), vem:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento *A* ou o evento *B* é dada pela soma das probabilidades de os dois eventos ocorrerem separadamente, menos a probabilidade de eles ocorrerem simultaneamente.

Esse resultado vale para a situação dos leitores dos jornais aqui exposta e também para o caso geral de dois eventos *A* e *B* quaisquer.

Calculando a probabilidade de escolher um leitor do jornal *A* ou do jornal *B*, temos:

- $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{250}{470} = \frac{25}{47}$
- $P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{180}{470} = \frac{18}{47}$
- $P(A \cap B) = \frac{6}{47}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  $P(A \cup B) = \frac{25}{47} + \frac{18}{47} - \frac{6}{47} = \frac{37}{47}$

  $P(A \cup B) = \frac{37}{47}$

Exercício resolvido

7 Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de ocorrer um rei ou um valete?

Resolução

Vamos considerar os eventos:

- A: sair um rei.
- B: sair um valete.

Veja que não há elementos em comum entre os dois eventos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, e como vimos neste capítulo, esses eventos são chamados de mutuamente exclusivos e, por isso, $P(A \cap B) = 0$.

Utilizando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos e considerando $P(A \cap B) = 0$, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Como em um baralho há 4 reis e 4 valetes, obtemos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{13}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

22. Em um grupo de 80 alunos, 50 jogam futebol, 40 jogam vôlei e 20 jogam futebol e vôlei. Escolhendo ao acaso um dos alunos, qual a probabilidade de ele:

a) jogar vôlei; $\frac{1}{2}$

b) jogar futebol; $\frac{5}{8}$

c) jogar vôlei e futebol; $\frac{1}{4}$

d) jogar vôlei ou futebol; $\frac{7}{8}$

e) jogar somente futebol; $\frac{3}{8}$

f) não praticar nenhum desses esportes. $\frac{1}{8}$

23. Seja o lançamento de um dado comum. Qual a probabilidade de sair a face com:

a) um número par? $\frac{1}{2}$

b) um múltiplo de 3? $\frac{1}{3}$

c) um número par ou múltiplo de 3? $\frac{2}{3}$

24. Um professor passou dez questões para seus alunos Jorge, César e Teresa resolverem. Sabe-se que Jorge fez três questões, César concluiu duas e Teresa, quatro, e que as questões resolvidas eram diferentes. Escolhendo uma questão ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha sido resolvida por:

a) Jorge? $\frac{3}{10}$

b) Jorge ou César? $\frac{1}{2}$

c) Jorge, César ou Teresa? $\frac{9}{10}$

25. (FGV-SP) Roberto J., administrador recém-formado, envia um currículo para duas empresas, *A* e *B*, à procura de emprego.

A probabilidade de ser aceito pela empresa *A* é 25% e a de ser aceito pela *B* é 20%; a probabilidade de ser aceito por ambas é 8%.

a) Qual a probabilidade de ser aceito por ao menos uma das empresas? 37%

b) Qual a probabilidade de ser aceito por exatamente uma empresa? 29%

26. Uma urna contém 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja:

a) par? $\frac{1}{2}$

b) ímpar? $\frac{1}{2}$

c) par e menor que 15? $\frac{7}{30}$

d) múltiplo de 4 ou 5? $\frac{2}{5}$

27. Se $P(A) = \frac{8}{30}$, $P(A \cup B) = \frac{47}{120}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, calcule $P(\overline{B})$. $\frac{31}{40}$

28. Na gaveta de um armário, há duas chaves tipo *A* e uma tipo *B*. Em outra gaveta, há um cadeado que é aberto pelas chaves do tipo *A* e três que são abertos pelas chaves do tipo *B*. Uma pessoa escolhe, ao acaso, uma chave da primeira gaveta e um cadeado da segunda gaveta. Qual a probabilidade de o cadeado ser aberto pela chave escolhida? $\frac{5}{12}$

29. (UFRJ) Um ponto *P* é aleatoriamente selecionado num retângulo *S* de dimensões 50 cm por 20 cm. Considere, a partir de *S*, as seguintes regiões:

Região A – retângulo de dimensões 15 cm por 4 cm com centro no centro de *S;*

Região B – círculo de raio 4 cm com centro no centro de *S*.

Suponha que a probabilidade de que o ponto *P* pertença a uma região contida em *S* seja proporcional à área da região.

Determine a probabilidade de que *P* pertença simultaneamente às regiões *A* e *B*. $\left(\frac{16\pi + 24\sqrt{3}}{3000}\right)$

30. Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de sair um rei ou uma carta de espadas? $\frac{4}{13}$

31. (Unicamp-SP) Três candidatos, *A*, *B* e *C*, concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato *A*, 70 votariam apenas em *B*, e 100 votariam apenas no candidato *C*. Além disso, 190 disseram que não votariam em *A*, 110 disseram que não votariam em *C*, e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em *A* como em *C*, mas não em *B*. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em *B* ou em *C*, mas não votariam em *A*? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em *B*? 20 e 150

b) Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição, mas ainda não tenha se decidido por um único candidato? 400 e $\frac{1}{10}$

32. (UFCG-PB) Em um consultório médico há vários pacientes esperando fazer testes ergométricos. Esses pacientes estão divididos em faixas etárias, segundo tabela abaixo.

Idade	Número de pacientes
21	2
24	1
30	2
33	3
45	3

Os testes são feitos com dois pacientes, escolhidos aleatoriamente, já que chegaram ao consultório no mesmo horário. A probabilidade de que a soma das idades de dois desses pacientes com idades distintas, escolhidos para fazer o exame, seja estritamente inferior a 60 anos é:

a) $\frac{2}{47}$

b) $\frac{47}{55}$

Xc) $\frac{17}{55}$

d) $\frac{12}{53}$

e) $\frac{15}{52}$

33. (OBMEP) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3}$

X d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{3}{4}$

34. (UFLA-MG) Um grupo de 100 pessoas apresenta a seguinte composição:

	Louras	**Morenas**	**Total**
Olhos azuis	10	20	30
Olhos castanhos	30	40	70
Total	40	60	100

Marcando-se um encontro com uma delas, escolhendo seu nome ao acaso, qual a probabilidade de sair:

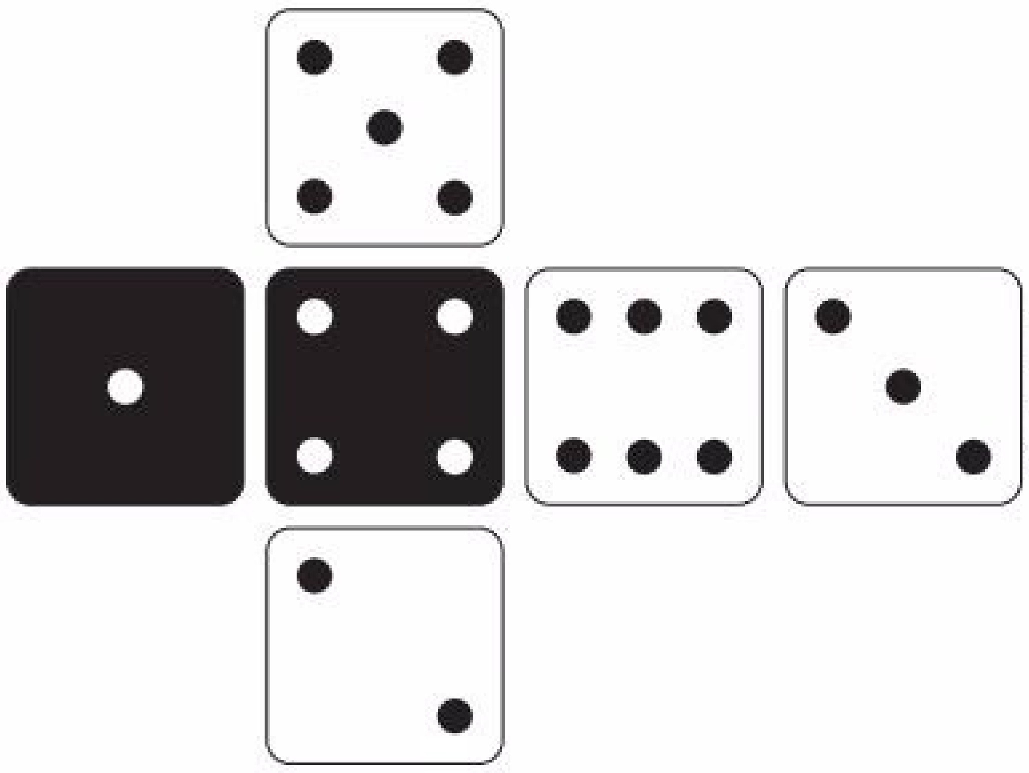
a) Uma loura? $\frac{2}{5}$

b) Uma loura de olhos castanhos ou uma morena de olhos azuis? $\frac{1}{2}$

c) Uma morena de olhos castanhos? $\frac{2}{5}$

35. (UFSCar-SP) A tabela indica as apostas feitas por cinco amigos em relação ao resultado decorrente do lançamento de um dado, cuja planificação está indicada na figura.

Ana	Face branca ou número par.
Bruna	Face branca ou número 5.
Carlos	Face preta ou número menor que 2.
Diego	Face preta ou número maior que 2.
Érica	Face branca ou número menor que 4.


Editoria de arte

Se trocarmos o conectivo "ou" pelo conectivo "e" na aposta de cada um, o jogador que terá maior redução nas suas chances de acertar o resultado, em decorrência dessa troca, será:

a) Ana

b) Bruna

c) Carlos

Xd) Diego

e) Érica

Conexões

Mercado de trabalho

36. O desemprego preocupa a todos os trabalhadores, empregados ou não. Com taxas de desocupação ou desemprego significativamente mais elevadas que entre os adultos, os jovens encontram mais dificuldade de inserção no mercado de trabalho. A seguir veremos algumas demarcações e números sobre o desemprego entre jovens e adultos.

O trabalho é estruturante do modo e do padrão de desenvolvimento de todas as sociedades. É pelo trabalho, em grande medida, que a riqueza econômica é produzida. É através das relações sociais de produção que também é realizada a distribuição da riqueza e da renda. Parte relevante da sociabilidade que vem da amizade, solidariedade e cooperação constrói-se no trabalho; é pelo trabalho que se gera riqueza e renda, promove-se a atividade econômica e organiza-se a vida em sociedade.

Desse modo, a condição de desocupado ou desempregado desestrutura a vida das pessoas, das famílias; fragiliza ou rompe relações e redes sociais; enfraquece a produção de riqueza e renda; reduz o nível de atividade econômica, o consumo, a receita do estado; aumenta os dispêndios com políticas públicas e gera outros graves problemas. [...]

Monkey Business Images/Shutterstock.com

Além da necessidade e da busca de renda, o ingresso dos jovens no mercado de trabalho auxilia na escolha da profissão.

Os jovens

As características e questões que marcam o ingresso dos jovens no mercado de trabalho envolvem, frequentemente, a necessidade e a busca de renda, o que os leva, muitas vezes, a entrar muito cedo no mercado de trabalho, abandonando o estudo pela dificuldade de combinar ambas as atividades. Outras vezes, a ocupação é, para o jovem, um teste para escolha profissional e para a empresa serve como uma oportunidade de formação, observação e seleção. A baixa qualidade dos postos de trabalho no Brasil, em grande quantidade oferecida aos jovens, com condições de trabalho ruins e baixo rendimento, jornadas amplas e inadequadas para combinar com estudos, não só não incentiva a continuidade no posto de trabalho, como acelera o seu rompimento. Além disso, algumas características nesta fase da vida permitem maior flexibilidade para arriscar novas oportunidades, sem contar as inquietudes decorrentes das dificuldades nas escolhas. [...]

DIEESE. **Rotatividade e políticas públicas para o mercado de trabalho**. São Paulo: DIEESE, 2014. Disponível em: <http://www.dieese.org.br/livro/2014/livroRotatividade.pdf>. Acesso em: 4 maio 2016.

a) Cite alguns problemas que atingem o trabalhador e a sociedade, em virtude da desocupação ou desemprego, mencionados no texto. A condição de desocupado ou desempregado desestrutura a vida das pessoas, das famílias; fragiliza ou rompe relações sociais; reduz o nível de atividade econômica, o consumo etc.

b) A seguir, são apresentadas taxas de desemprego, referentes a março de 2016, na região metropolitana de Salvador.

Taxas de desemprego por atributos pessoais (em %) - Março/2015

Atributos		%
Sexo	Homem	18,9
	Mulher	24,0
Faixa etária	16 a 24 anos	43,9
	25 a 39 anos	21,1
	40 a 49 anos	13,6
Raça/cor	Negros	21,5
	Não negros	18,7
Total		**21,3**

DIEESE. **Boletim Mensal do mercado de trabalho formal da Bahia**. Bahia: DIEESE, 2016. Disponível em: <http://observatorios.dieese.org.br/ws2/producao-tecnica/arquivo/2/754?>. Acesso em: 18 maio 2016.

A partir dos dados apresentados na tabela acima, considere o conjunto F representado pelas pessoas desempregadas cuja faixa etária é de "16 a 24 anos" e o conjunto M representado pelas mulheres desempregadas. Se escolhermos aleatoriamente uma pessoa que participou da pesquisa, e supondo que a probabilidade de essa pessoa fazer parte do conjunto F ou M seja de 35%, determine a probabilidade de que ela faça parte da intersecção de F e M. 32,9%

c) Discuta com os colegas e opine sobre as razões da dificuldade de empregabilidade por parte dos jovens. Resposta pessoal. Professor, espera-se que os alunos reflitam sobre a dificuldade do jovem em conseguir o primeiro emprego, além da baixa qualificação em muitos casos, o que dificulta a inserção no mercado de trabalho, entre outros pontos que podem surgir. Estimule a troca de ideias entre os alunos.

Probabilidade condicional

Vamos voltar ao experimento do lançamento de dois dados comuns, um branco e um vermelho. Considere os eventos:

- *A*: a soma dos pontos obtidos é menor que 7;
- *B*: sair a face com 4 pontos em, pelo menos, um dado.

O espaço amostral *U* é:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Os eventos são:

$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$

$B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 4)\}$

Vamos calcular, agora, a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser menor que 7 sabendo que, em um dos dados, pelo menos, saiu a face com 4 pontos. Note que queremos a ocorrência de somas menores do que 7 em um universo cujos elementos apresentem um número 4. Nesse caso, dizemos que a ocorrência do evento *A* está condicionada à ocorrência do evento *B*. Indicamos: A/B (lê-se: *A* dado *B*).

A/B significa a ocorrência do evento *A*, sabendo que *B* vai ocorrer ou já ocorreu, ou seja, os eventos *A* e *B* são dependentes. Essa probabilidade é chamada **probabilidade condicional** ou **probabilidade de *A* dado *B*** e é representada por P(A/B).

Da definição de probabilidade de um evento, temos:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \qquad \text{\textcircled{I}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \Rightarrow n(A \cap B) = n(U) \cdot P(A \cap B) \qquad \text{\textcircled{II}}$$

e

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} \Rightarrow n(B) = n(U) \cdot P(B) \qquad \text{\textcircled{III}}$$

Substituindo $\text{\textcircled{II}}$ e $\text{\textcircled{III}}$ em $\text{\textcircled{I}}$, temos: $P(A/B) = \dfrac{n(U) \cdot P(A \cap B)}{n(U) \cdot P(B)}$

Portanto, $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Voltando ao nosso experimento, temos: $A \cap B = \{(1, 4), (2, 4), (4, 1), (4, 2)\}$

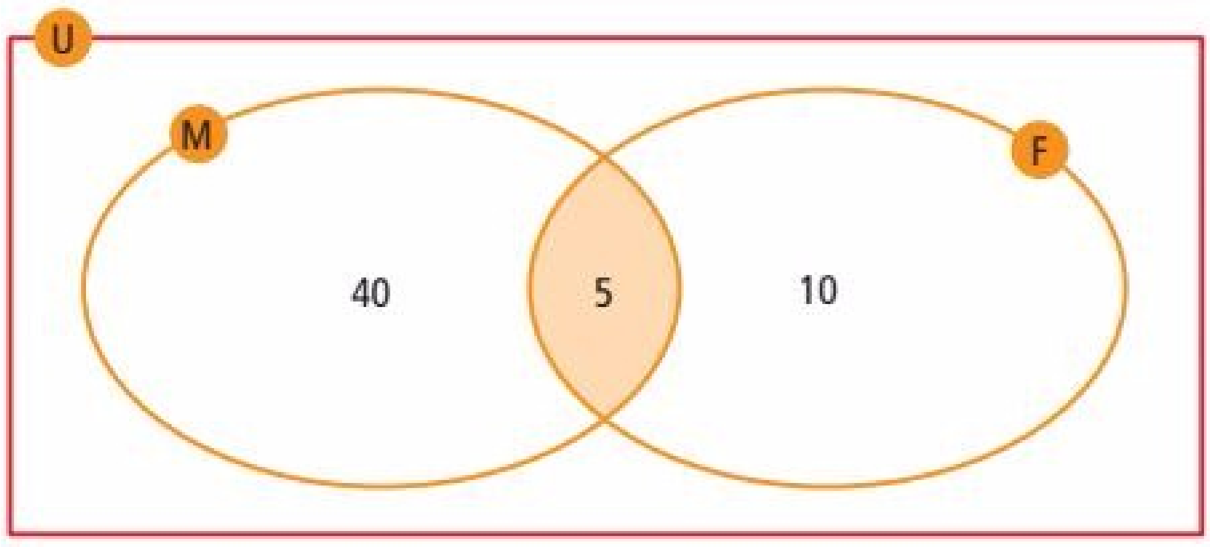
Sendo $n(A \cap B) = 4$ e $n(B) = 11$, obtemos: $P(A/B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{4}{11}$ ou $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{4}{11}$

Exercícios resolvidos

8 Em uma escola com 600 alunos, farão recuperação, só de Matemática, 40 alunos; só de Física, 10; e de Matemática e Física, 5. Determine a probabilidade de um aluno que fará recuperação de Matemática fazer também recuperação de Física.

Resolução

Construindo um diagrama, temos:



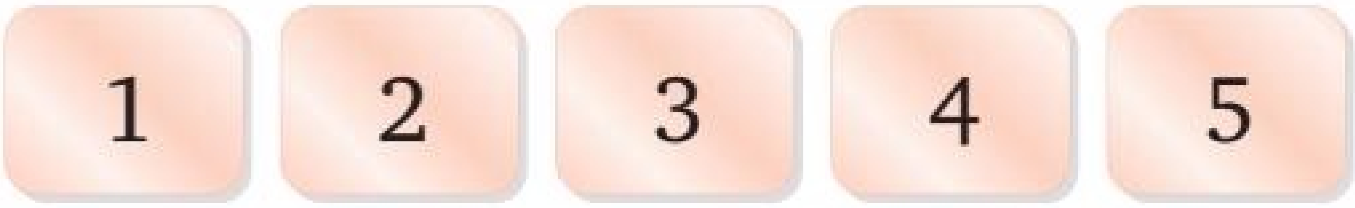
Ilustrações: Editoria de arte

Queremos obter P(F/M), ou seja, a probabilidade de um aluno fazer recuperação de Física, sabendo que ele fará recuperação de Matemática.

$$P(F/M) = \frac{n(F \cap M)}{n(M)} \Rightarrow P(F/M) = \frac{5}{45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(F/M) = \frac{1}{9}$$

9 Em uma caixa há os cartões:



Retirando-se dois cartões, sucessivamente, sem reposição do primeiro, determine a probabilidade de que os dois números retirados sejam ímpares.

Resolução

Considerando os eventos:

- *A*: sair número ímpar na 1ª retirada;
- *B*: sair número ímpar na 2ª retirada;
- B/A: sair número ímpar na 2ª retirada, sabendo que na 1ª já saiu número ímpar.

Note que $n(A) = 3$ em um espaço amostral com 5 elementos, e que $n(B/A) = 2$ em um espaço amostral de 4 elementos, pois não houve reposição da 1ª retirada.

Logo:

$P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Sabemos que: $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, então: $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A)$

Assim, a probabilidade de sair um número ímpar na 1ª e na 2ª retirada é:

$P(B \cap A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}30$ ou $P(B \cap A) = 30\%$

Portanto, $P(B \cap A) = 0{,}30$ ou 30%.

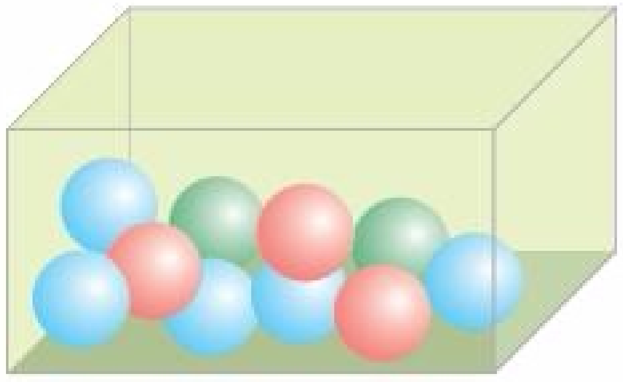
10 Extraindo sucessivamente e sem reposição duas bolas da caixa da figura, qual a probabilidade de se retirar:

a) duas bolas azuis?

b) duas bolas da mesma cor?

c) uma bola vermelha na 2ª extração?

d) nenhuma bola vermelha nas duas extrações?

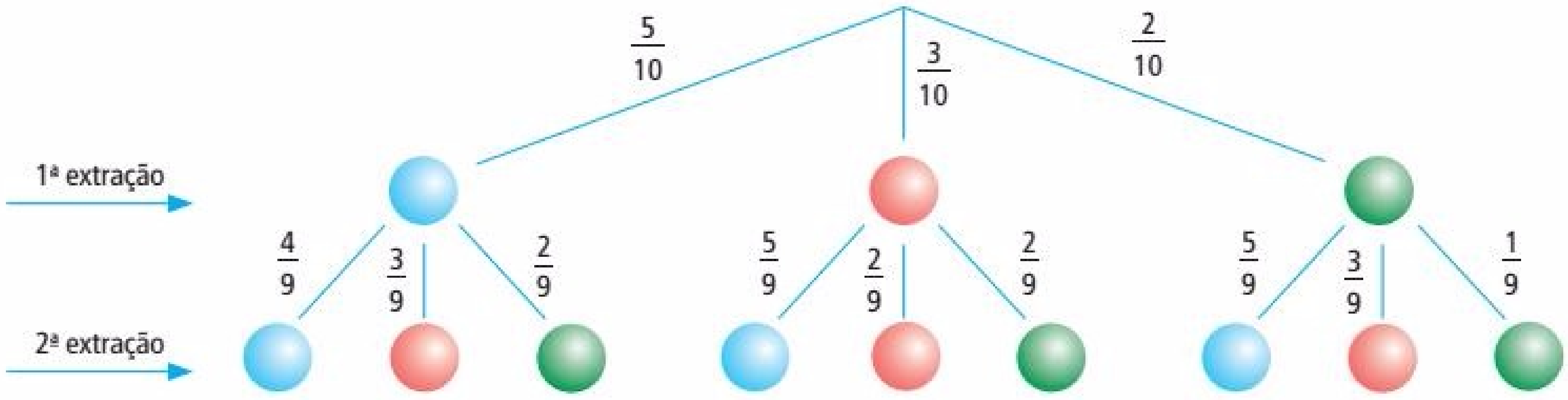


Resolução

Vamos chamar de:

- A_1: o evento tirar bola azul na 1ª extração;
- A_2: o evento tirar bola azul na 2ª extração;
- V_1: o evento tirar bola vermelha na 1ª extração;
- V_2: o evento tirar bola vermelha na 2ª extração;
- M_1: o evento tirar bola verde na 1ª extração;
- M_2: o evento tirar bola verde na 2ª extração.

Construindo a árvore das possibilidades, e escrevendo ao lado das "ramificações" as respectivas probabilidades, temos:

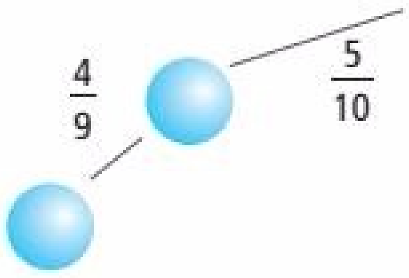


Ilustrações: Editoria de arte

a) A probabilidade de as duas bolas serem azuis é igual a:

$P(A_2 \cap A_1) = P(A_2/A_1) \cdot P(A_1) \Rightarrow P(A_2 \cap A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{9} \Rightarrow P(A_2 \cap A_1) = \frac{2}{9}$

Essa probabilidade pode ser obtida por meio da árvore das possibilidades, fazendo a multiplicação:



$$P(A_2 \cap A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{9}$$

Observe que a soma das probabilidades na 1ª extração é 1 $\left(\frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = 1\right)$. Essa é a probabilidade do evento certo: na 1ª extração, tirar uma bola azul ou uma bola vermelha ou uma bola verde.

Em símbolos:

$A_1 \cup V_1 \cup M_1 = U_1$ e $A_1 \cap V_1 \cap M_1 = \varnothing$

Logo: $P(A_1 \cup V_1 \cup M_1) = P(A_1) + P(V_1) + P(M_1) = P(U_1) = 1$ em que U_1 é o espaço amostral da 1ª extração. Analogamente, a soma das probabilidades de todos os casos da 2ª extração é igual a 1.

b) Como as duas bolas devem ser da mesma cor, temos os casos: duas azuis ou duas vermelhas ou duas verdes. Logo, devemos somar as probabilidades desses três casos.

Observando a árvore das possibilidades, obtemos a probabilidade de sair duas bolas da mesma cor:

$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \Rightarrow P = \frac{20+6+2}{90} \Rightarrow P = \frac{14}{45}$

c) Observando a árvore das possibilidades e sabendo que a 2ª bola é vermelha, devemos somar as probabilidades dos três casos: azul e vermelha, vermelha e vermelha, verde e vermelha.

$P(V_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \Rightarrow P = \frac{15+6+6}{90} \Rightarrow P = \frac{3}{10}$

d) Observando a árvore e somando as probabilidades das "ramificações" em que não há bola vermelha, temos:

$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} \Rightarrow P = \frac{20+10+2+10}{90} \Rightarrow P = \frac{7}{15}$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

37. Dois jogadores, Kleber e Arnaldo, lançam um dado uma única vez cada. Vence o jogo quem tirar o maior número. Sabendo que Kleber tirou 4, qual é a probabilidade de:

a) Kleber vencer? $\frac{1}{2}$

b) haver empate? $\frac{1}{6}$

c) Arnaldo vencer? $\frac{1}{3}$

38. Na extração de uma carta de um baralho de 52 cartas, considere os eventos:

- *A*: sair um rei;
- *B*: sair uma carta de paus.

Determine:

a) P(A) e P(B) $\frac{1}{13}; \frac{1}{4}$

b) P(A/B) e P(B/A) $\frac{1}{13}; \frac{1}{4}$

39. Um levantamento feito com 200 funcionários de uma empresa apresentou o seguinte resultado:

	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Fumantes (F)	70	40	110
Não fumantes (nF)	30	60	90
Total	100	100	200

Fonte: Dados fictícios.

Sorteia-se um funcionário ao acaso:

a) Qual a probabilidade de que seja homem? E de que seja mulher? $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

b) Se o sorteio for feito entre os não fumantes, qual a probabilidade de que seja homem? E de que seja mulher? $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$

c) Calcule: P(H/F), P(M/F), P(F/M), P(F/H) e P(nF/M). $\frac{7}{11}; \frac{4}{11}; \frac{4}{10}; \frac{7}{10}; \frac{6}{10}$

40. Daniel ganhou o concurso de um programa de televisão. Como prêmio, conquistou o direito a conhecer um estado brasileiro. Contudo, esse estado seria escolhido aleatoriamente em um sorteio ao vivo. Cada nome dos 26 estados brasileiros foi escrito em um cartão. O apresentador sorteou um nome e, antes de indicar o estado sorteado, falou que pertencia à região Nordeste. Nesse caso:

a) Qual a probabilidade de o estado do Espírito Santo ter sido sorteado? 0%

b) Qual a probabilidade de o estado de Alagoas ter sido sorteado? $\frac{1}{9}$

41. (Fuvest-SP) Uma pessoa dispõe de um dado honesto, que é lançado sucessivamente quatro vezes. Determine a probabilidade de que nenhum dos números sorteados nos dois primeiros lançamentos coincida com algum dos números sorteados nos dois últimos lançamentos. $\frac{35}{72}$

42. Ana Cláudia foi a uma loja comprar um vestido. Havia diferentes opções de cores e tamanhos, conforme a tabela a seguir.

Opções de cores e tamanhos

Tamanho / Cor	Pequeno	Médio	Grande	Total
Verde	4	6	3	13
Vermelho	6	5	3	14
Azul	3	6	4	13
Preto	6	8	12	26
Branco	6	8	8	22
Estampado	8	6	8	22
Total	33	39	38	110

Fonte: Dados fictícios.

Sabendo que Ana Cláudia usa tamanho médio, qual a probabilidade de ela ter escolhido um vestido estampado? $\frac{2}{13}$

43. (Fuvest-SP) Num torneio de tênis, no qual todas as partidas são eliminatórias, estão inscritos 8 jogadores. Para definir a primeira rodada do torneio realiza-se um sorteio casual que divide os 8 jogadores em 4 grupos de 2 jogadores cada um.

a) De quantas maneiras diferentes pode ser constituída a tabela de jogos da primeira rodada? 105

b) No torneio estão inscritos quatro amigos, *A*, *B*, *C* e *D*. Nenhum deles gostaria de enfrentar um dos outros logo na primeira rodada do torneio. Qual é a probabilidade de que esse desejo seja satisfeito? $\frac{8}{35}$

c) Sabendo que pelo menos um dos jogos da primeira rodada envolve 2 dos 4 amigos, qual é a probabilidade condicional de que *A* e *B* se enfrentem na primeira rodada? $\frac{5}{27}$

44. Doze rapazes de uma turma escolar se candidataram a participar de uma gincana entre escolas. Sabendo que 6 estudavam na escola *A*, 3 estudavam na escola *B*, 2 estudavam na escola *C*, e 1 estudava na escola *D*, qual é a probabilidade de: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) 2 estudantes da escola *B* serem chamados para a gincana?

b) 2 estudantes da mesma escola serem chamados para a gincana?

c) 1 estudante da escola *A* ser chamado na segunda escolha?

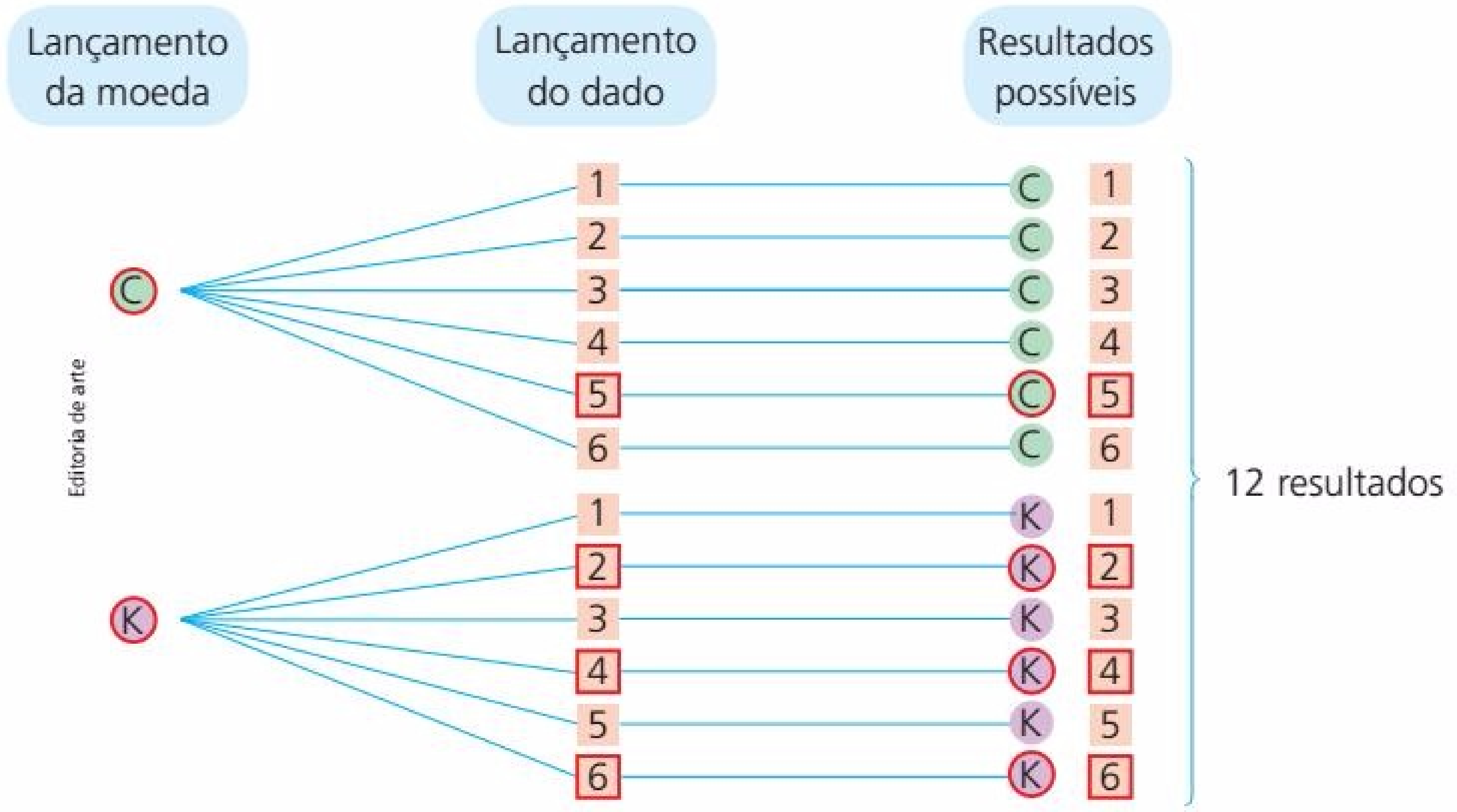
45. Jogando um dado e sabendo que foi obtido um número maior que 4, qual a probabilidade de ser um número par? 50%

Eventos independentes

Considere o experimento de lançarmos sucessivamente uma moeda e um dado:

- Qual a probabilidade de se obter o resultado (“cara”, 5)?
- E a probabilidade de se obter (“coroa”, número par)?

Fazendo C = cara e K = coroa, vamos construir a árvore das possibilidades.



Editoria de arte

A probabilidade de ocorrer cada um desses eventos é igual a:

$$P[(C, 5)] = \frac{1}{12} \text{ e } P[(K, 2), (K, 4), (K, 6)] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Observe que, dos 12 resultados possíveis de se obter, metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ apresenta “cara”. Dessa metade, apenas a sexta parte $\left(\frac{1}{6}\right)$ apresenta “5”. Portanto, temos a metade da sexta parte apresentando “cara e 5”, ou seja, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Como a probabilidade de ocorrer 5 não dependeu da probabilidade de sair cara, ou seja, $P\big[(5/C)\big] = P(5)$, esses eventos são ditos independentes. Acompanhe:

$$P\big[(5/C)\big] = \frac{P\big[(5 \cap C)\big]}{P(C)} \Rightarrow P(5) = \frac{P\big[(5 \cap C)\big]}{P(C)} \Rightarrow P\big[(5 \cap C)\big] = P(5) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Do mesmo modo, metade dos resultados possíveis apresenta “coroa” e, dessa metade, somente três sextos $\left(\frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)$ apresentam número par. Temos, nesse caso, a metade da metade apresentando “coroa e número par”, ou seja, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Note que a probabilidade de ocorrer número par não dependeu da probabilidade de ocorrer coroa, ou seja, $P\big[(\text{número par}/K)\big] = P(\text{número par})$, logo esses eventos também são independentes. Veja:

$$P\big[(\text{núm. par}/K)\big] = \frac{P\big[(\text{núm. par} \cap K)\big]}{P(K)} \Rightarrow P(\text{núm. par}) = \frac{P\big[(\text{núm. par} \cap K)\big]}{P(K)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\big[(\text{núm. par} \cap K)\big] = P(\text{núm. par}) \cdot P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Como $P(A/B) = P(A)$, temos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dois eventos, *A* e *B*, são ditos independentes quando a ocorrência de um não influi na ocorrência do outro:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Se um acontecimento é composto de vários eventos sucessivos e independentes, de tal modo que:

- o primeiro evento é *A* e sua probabilidade é p_1;
- o segundo evento é *B* e sua probabilidade é p_2;
- o terceiro evento é *C* e sua probabilidade é p_3;

⋮ ⋮ ⋮

- o k-ésimo evento é *K* e sua probabilidade é p_k;

então a probabilidade de que os eventos *A*, *B*, *C*, ..., *K* ocorram nessa ordem é:

$$P(A, B, C, \ldots, K) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$$

Há casos em que os eventos não são sucessivos, e sim simultâneos. Entretanto, é conveniente tratá-los como sucessivos.

Exercícios resolvidos

11 Retirando-se duas cartas ao acaso, sem reposição, de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade do naipe da primeira ser de paus e o da segunda ser de copas?

Resolução

Das 52 cartas do baralho, 13 são de paus, 13 de copas, 13 de ouros e 13 de espadas. A probabilidade de ocorrer o evento independente *A*: "a 1ª carta é de paus" é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \Rightarrow P(A) = \frac{13}{52} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

Como a 2ª carta é retirada sem reposição da 1ª, restam 51 cartas do baralho (retiramos uma carta de paus). A probabilidade de ocorrer o evento independente *B*: "a 2ª carta é de copas" é:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} \Rightarrow P(B) = \frac{13}{51}$$

A probabilidade de a 1ª carta ser de paus e a 2ª de copas é dada pelo produto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{51} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{13}{204}$$

12 Considere duas caixas, I e II. Na caixa I há 4 bolas pretas e 6 bolas azuis; e na caixa II há 8 bolas pretas e 2 azuis. Se você escolher ao acaso uma caixa e, em seguida, retirar uma bola, qual a probabilidade dessa bola ser:

a) preta?

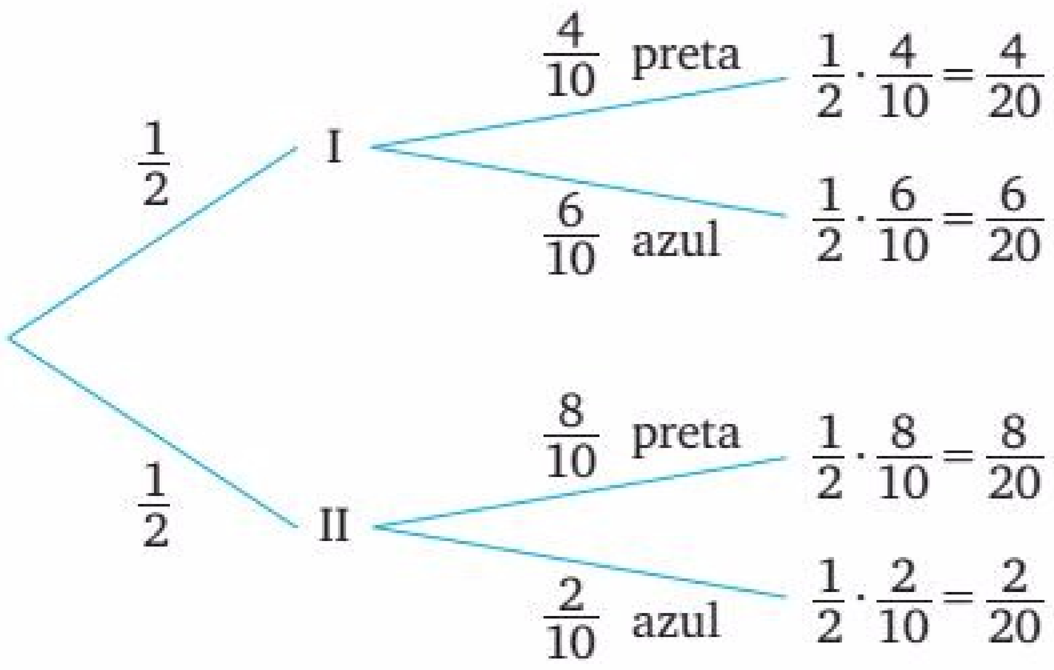
b) azul?

Resolução

Na caixa I há 10 bolas, sendo 4 pretas e 6 azuis. Na caixa II também há 10 bolas, porém são 8 pretas e 2 azuis. Como são duas caixas, a probabilidade de escolher uma delas é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade de retirada de cada bola é:

- Caixa I: bola azul é $\frac{6}{10}$ e a bola preta é $\frac{4}{10}$.
- Caixa II: bola azul é $\frac{2}{10}$ e a bola preta é $\frac{8}{10}$.

Construindo a árvore de possibilidades e sabendo que os eventos são independentes, temos:



$\frac{1}{2}$
I
$\frac{4}{10}$ preta
$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{20}$
$\frac{6}{10}$ azul
$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{20}$
$\frac{1}{2}$
II
$\frac{8}{10}$ preta
$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{8}{20}$
$\frac{2}{10}$ azul
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{20}$

a) *A*: a bola escolhida é preta.

$$P(A) = \frac{4}{20} + \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

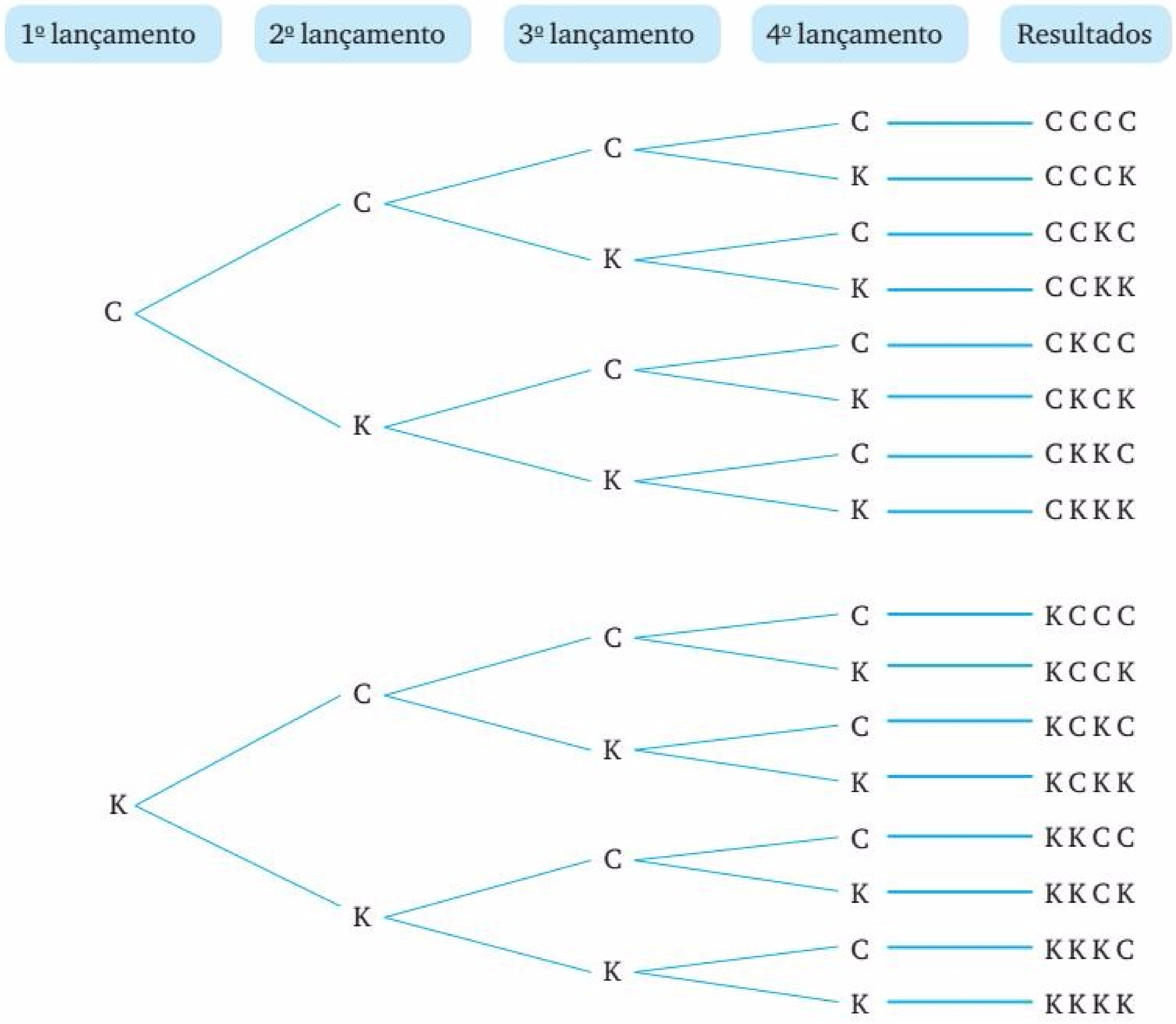
b) *B*: a bola escolhida é azul.

$$P(B) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

13 Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual a probabilidade de sair pelo menos uma "cara"?

Resolução

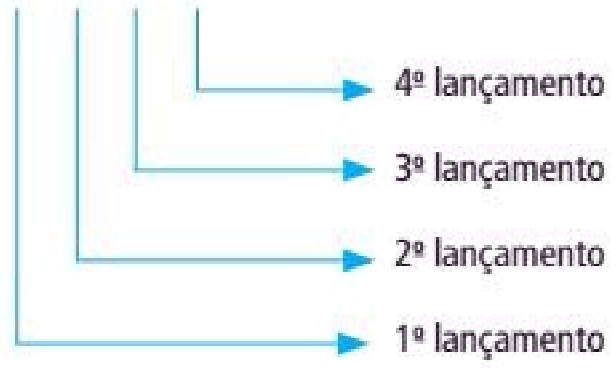
Considere o evento A: sair pelo menos uma "cara".
Fazendo cara = C e coroa = K, temos a seguinte árvore de possibilidades:


1º lançamento
2º lançamento
3º lançamento
4º lançamento
Resultados
C C C C
C C C K
C C K C
C C K K
C K C C
C K C K
C K K C
C K K K
K C C C
K C C K
K C K C
K C K K
K K C C
K K C K
K K K C
K K K K

Desses 16 resultados possíveis, 15 apresentam pelo menos uma "cara". Portanto: $P(A) = \frac{15}{16}$.

Um modo mais prático de resolver essa questão é calcular inicialmente a probabilidade dos casos desfavoráveis ao evento A, isto é, a probabilidade de "não sair nenhuma cara" (evento complementar $\overline{A}$). A única maneira de não sair "cara" é sair "coroa" (K) nos quatro lançamentos. Assim:

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$


4º lançamento
3º lançamento
2º lançamento
1º lançamento

Portanto, a probabilidade de sair pelo menos uma "cara" é:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{16-1}{16} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

46. Um dado comum é lançado duas vezes. Qual a probabilidade de saírem números menores que 3 nos dois lançamentos? $\frac{1}{9}$

47. Qual a probabilidade de se obter três vezes o número 1 no lançamento de três dados? $\frac{1}{216}$

48. Retiram-se duas cartas de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de que pelo menos uma seja de ouros? Sugestão: use o evento complementar. $\simeq 44{,}12\%$

49. No lançamento de um dado e uma moeda, qual a probabilidade de obtermos cara e número maior que 3? $\frac{1}{4}$

50. Qual é a probabilidade de um casal ter 4 filhos, todos do sexo feminino? $\frac{1}{16}$

51. Retirando duas cartas ao acaso, com reposição, de um baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser a primeira de ouros e a segunda de espadas? $\frac{1}{16}$

52. Um grupo de 30 pessoas apresenta a composição: 20 italianos e 10 portugueses; 15 homens e 15 mulheres; 5 casados e 25 solteiros. Determine a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso seja um homem casado e português. $\frac{1}{36}$

53. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

53. O volante da Loteria Esportiva contém 13 jogos. Usando somente palpites simples, qual a probabilidade de:

a) acertar os 13 jogos?

b) acertar 12 jogos?

c) acertar apenas 1 jogo?

d) errar todos os jogos?

54. (Enem/MEC) O fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \times (0{,}2\%)^4$

b) $4 \times (0{,}2\%)^2$

X c) $6 \times (0{,}2\%)^2 \times (99{,}8\%)^2$

d) $4 \times (0{,}2\%)$

e) $6 \times (0{,}2\%) \times (99{,}8\%)$

55. De um baralho de 52 cartas, extraem-se três cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de se obter:

a) 3 damas? $\frac{1}{5525}$

b) um ás, um valete e um rei, nessa ordem? $\frac{8}{16575}$

$\frac{13}{102}$ c) duas cartas pretas e uma vermelha, nessa ordem?

56. Em um recipiente adequado estão colocadas 7 bolas, sendo 3 pretas e 4 brancas. Retirando do recipiente aleatoriamente uma bola, repondo-a depois de anotada sua cor e repetindo essa operação mais duas vezes, calcule a probabilidade de que as três bolas retiradas sejam brancas. $\frac{64}{343}$

57. (Enem/MEC) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-la na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa.

Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

a) $\frac{1}{25}$ X b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

58. (Enem/MEC) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é:

a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

d) 25% assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

X e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

59. (Enem/MEC) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades obtém-se

a) $P(I) < P(III) < P(II)$

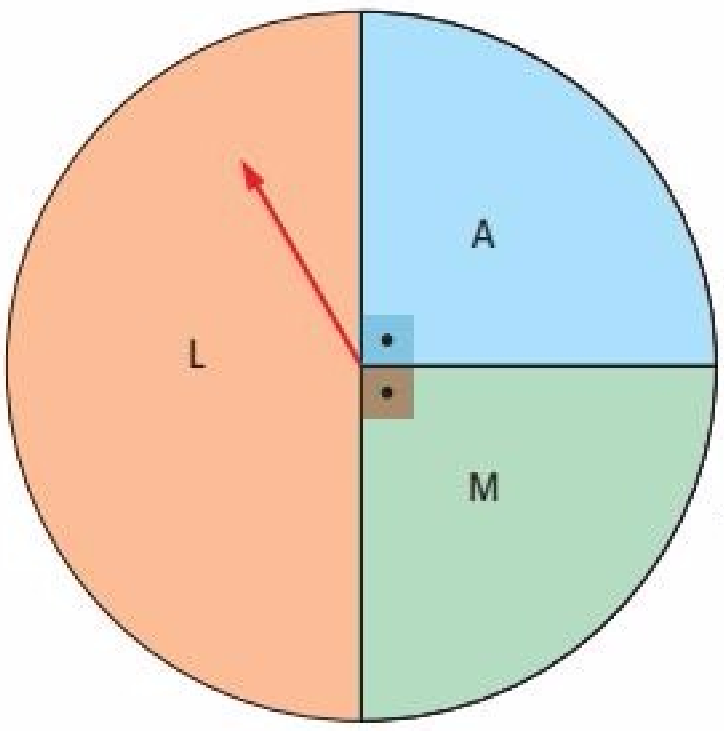
b) $P(II) < P(I) < P(III)$

c) $P(I) < P(II) = P(III)$

d) $P(I) = P(II) < P(III)$

X e) $P(I) = P(II) = P(III)$

Experimentos não equiprováveis



Ilustrações: Editoria de arte

Observe a roleta ao lado. Vamos considerar o experimento: girar o ponteiro e verificar em que região ele para.

O espaço amostral é dado pelas regiões: U = {A, M, L}. Representando áreas diferentes, os eventos elementares {A}, {M} e {L} não são **equiprováveis**, isto é, não têm a mesma chance de ocorrência, pois:

- a área de *A* corresponde à quarta parte do círculo;
- a área de *M* corresponde à quarta parte do círculo;
- a área de *L* corresponde à metade do círculo.

As probabilidades desses eventos são dadas pelas razões das áreas de cada região pela área da roleta:

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(M) = \frac{1}{4} \qquad P(L) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Então, temos: $P(L) = 2P(A) = 2P(M)$, ou seja, $P(A) \neq P(L) \neq P(M)$.

Portanto, esse experimento é dito não equiprovável, pois todos os eventos elementares do espaço amostral não apresentam a mesma probabilidade de ocorrência. Mesmo assim, a soma das probabilidades é igual a 1.

Exercícios resolvidos

14 O gerente de uma loja tem sobre a sua mesa um prisma triangular que se apoia sobre uma das três faces retangulares.

A: ADIANTE – Estou bem-humorado
B: SILÊNCIO – Estou trabalhando
C: CUIDADO – Estou de mau humor

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{2} \cdot P(B)$ e $P(B) = \frac{1}{4} \cdot P(C)$, calcule P(A) e P(C).

SILÊNCIO
ESTOU TRABALHANDO

Resolução

Do enunciado, temos:

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{2} \cdot P(B) \\ P(B) = \frac{1}{4} \cdot P(C) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8} \cdot P(C)$$

Daí, vem:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\frac{1}{8} \cdot P(C) + \frac{1}{4} \cdot P(C) + P(C) = 1$$

Assim:

$$P(C) = \frac{8}{11}$$

$$P(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{11} = \frac{1}{11}$$

Portanto, $P(A) = \frac{1}{11}$ e $P(C) = \frac{8}{11}$.

15 No lançamento de uma moeda viciada, a chance de ocorrer "cara" é igual a quatro vezes a chance de ocorrer "coroa". Calcule a probabilidade de ocorrer cara em um lançamento dessa moeda.

Resolução

Sejam os eventos:

- *C*: ocorrer "cara"
- *K*: ocorrer "coroa" com $P(C) = 4 \cdot P(K)$

Como os eventos são exclusivos e complementares, temos:

$$P(C) + P(K) = 1 \Rightarrow 4P(K) + P(K) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5P(K) = 1 \Rightarrow P(K) = \frac{1}{5} \text{ ou } P(K) = 20\%$$

Substituindo o valor de P(K), obtemos:

$$P(C) + P(K) = 1 \Rightarrow P(C) + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{4}{5} \text{ ou}$$

$$P(C) = 80\%$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

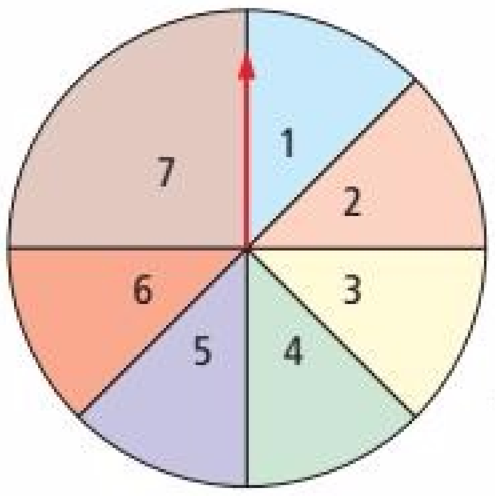
60. Observe os espaços amostrais referentes aos experimentos aleatórios abaixo e classifique-os em espaço equiprovável ou não equiprovável.

a) Um ramalhete contém 3 rosas brancas, 2 e 5 vermelhas. Uma rosa é escolhida ao acaso no ramalhete para ser cheirada. Não equiprovável.

b) Um ramalhete contém 6 rosas cor-de-rosa, 2 brancas e 10 amarelas. Uma rosa é escolhida ao acaso no ramalhete para ser cheirada. Não equiprovável.

c) Dois vasos com meia dúzia de rosas em cada um, um vaso com rosas amarelas e outro com rosas vermelhas, são escolhidos para compor um buquê. Equiprovável.

61. Observe a roleta da figura. O ponteiro gira podendo parar em qualquer número.



Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual a probabilidade de sair o número 3? $\frac{1}{8}$

b) Qual a probabilidade de sair o número 7? $\frac{1}{4}$

c) Qual a probabilidade de se obter um número par? $\frac{3}{8}$

d) E um número ímpar? $\frac{5}{8}$

62. Considere um dado que em três das faces tenha o número 1, em duas faces, o número 2, e na outra, o número 3. Se você lançar esse dado e observar o número da face superior, qual a probabilidade de que obtenha:

a) o número 1? $\frac{1}{2}$

b) o número 2? $\frac{1}{3}$

c) o número 2 ou o número 3? $\frac{1}{2}$

63. (FGV-SP) Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa, são tais que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo da de sair coroa.

Sugestão: construa a árvore de possibilidades considerando que cara e coroa são eventos complementares.

a) Lançando-se uma vez a moeda, qual a probabilidade de sair cara? $\frac{3}{4}$

b) Lançando-se três vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma cara? $\frac{9}{64}$

64. Lança-se um dado viciado com as faces numeradas de 1 a 6, de forma que cada número par sai o triplo de vezes que cada número ímpar. Qual a probabilidade de:

a) Ocorrer um número ímpar? E um número par? $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$

b) Se obter um número menor que 4? $\frac{5}{12}$

c) Que saia um número múltiplo de 2 ou de 3? $\frac{5}{6}$

65. (Enem/MEC) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, Andabem e Bompasseio, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário dos ônibus	
Andabem	**Bompasseio**
...	...
6h00	6h10
6h30	6h40
7h00	7h10
7h30	7h40
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa Andabem é:

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

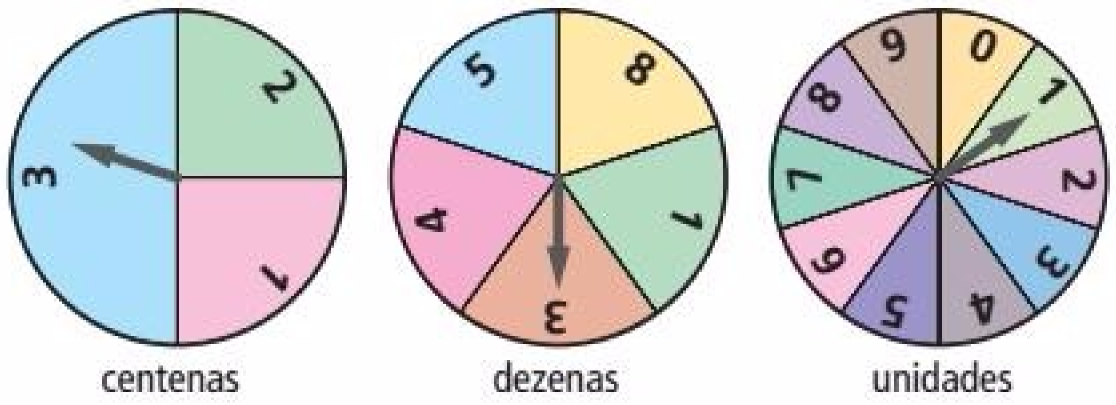
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

x d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

66. Na figura, o círculo das centenas está dividido em três setores, um semicircular e outros dois de mesma área. Cada um dos outros dois círculos está dividido em setores de mesma área. As setas nesses círculos, quando giradas, pararam em algum setor, determinando um número de três algarismos. Por exemplo, na figura, elas determinam o número 331.



centenas dezenas unidades

Qual é a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior que 260?

a) 45%

x b) 55%

c) 60%

d) 65%

e) 70%

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (UFAL) Quantos números inteiros positivos divisíveis por 5, de 4 algarismos distintos, podem ser escritos com os algarismos 1, 3, 5, 7, 9? 24 números.

2. (UFSC) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR aparecem juntas e nessa ordem. 24 anagramas

3. (PUC-SP) Formados e colocados em ordem crescente todos os números naturais de quatro algarismos distintos obtidos com os algarismos 1, 3, 5 e 7, que lugar ocupa o número 5 731? 18º lugar

4. Determine o conjunto solução das equações:

a) $\dfrac{x!}{(x-2)!} = 30$ S = {6}

b) $\dfrac{(x+2)!(x-2)!}{(x+1)!(x-1)!} = 4$ S = {2}

5. Resolva a equação: $(x+1)! = x! + 6x$. S = {0, 3}

6. (Facimpa-MG) O determinante

$$\begin{vmatrix} 0! & \log_3 27 & \sec 300° \\ 2! & 3! & 1 \\ \log_7 7 & \log_5 625 & \text{cotg } 135° \end{vmatrix}$$

é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
x d) 3
e) 4

7. (Ufop-MG) Resolva a equação

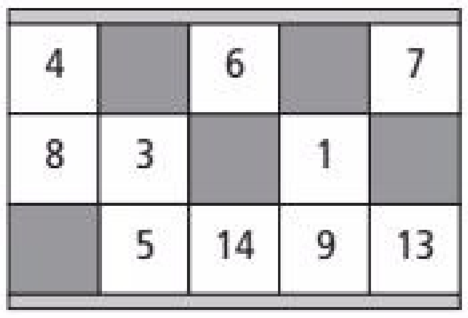
$$\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1!)!} = 6n - 4$$ S = {2}

8. Cinco homens e uma mulher estão em uma sala de espera, onde há apenas um banco de cinco lugares. De quantas maneiras diferentes os homens podem se sentar, nunca deixando em pé a mulher? 600 maneiras.

9. (FEI-SP) Num carro com 5 lugares e mais o lugar do motorista viajam 6 pessoas, das quais 3 sabem dirigir. De quantas maneiras podem dispor-se essas 6 pessoas na viagem? 360 maneiras.

10. (IME-RJ) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes, podem ser feitas? 210 tipos.

11. (UFPel-RS) Para realizar um bingo beneficente, uma associação solicitou a confecção de uma série completa de cartelas com 10 números cada uma, sem repetição, sendo utilizados números de 1 a 15. 3 003 cartelas.



4	▨	6	▨	7
8	3	▨	1	▨
▨	5	14	9	13

Editoria de arte

Calcule quantas cartelas foram confeccionadas.

12. (UFSM-RS) Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas nas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

a) 10
b) 20
c) 120
x d) 320
e) 625

13. (UFPE) Suponha que existam 20 diferentes tipos de aminoácidos. Qual dos valores abaixo mais se aproxima do número de agrupamentos ordenados, formados de 200 aminoácidos, que podem ser obtidos?

Dado: Use a aproximação: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}30$.

a) 10^{220}
b) 10^{230}
c) 10^{240}
d) 10^{250}
x e) 10^{260}

14. (EsPCEx-SP) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e, escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a:

a) 1 000 000
b) 1 111 100
c) 6 000 000
d) 6 666 000
x e) 6 666 600

15. (Mack-SP) Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado, é:

a) $9 \cdot (9!)$
x b) $8 \cdot (9!)$
c) $8 \cdot (8!)$
d) $\dfrac{10!}{2}$
e) $\dfrac{10!}{4}$

16. (Uespi-PI) Resolvendo a equação $A_{n,\,4} = 12 \cdot A_{n,\,2}$, temos:

a) $n = 21$
b) $n^2 = 25$
x c) $n^2 = 36$
d) $2n + 1 = 17$
e) $5n + 1 = 4$

17. (UFSC) Um campeonato de futebol de salão é disputado por várias equipes, jogando entre si, turno e returno. Sabendo-se que foram jogadas 272 partidas, determine o número de equipes participantes. 17

18. (UFG-GO) Em um triângulo ABC marcam-se dois pontos no lado $\overline{AB}$, três no lado $\overline{AC}$ e quatro no lado $\overline{BC}$ distintos dos vértices. O número total de circunferências que passam por três desses pontos será:

a) 84
x b) 79
c) 55
d) 27
e) 24

19. Resolva a equação: $2A_{x,\,4} = 4!C_{x,\,x-5}$. S = {14}

20. (UFPR) Se $A_n^p = 30$ e $C_n^p = 15$, ache o valor de $\dfrac{(n+p)!}{n!}$. 56

21. Qual é o valor de *x* na igualdade

$\dbinom{x}{2} + 3\dbinom{x-1}{2} = 91$? x = 8

22. (FUR-RN) A soma *S* de números binomiais

$$S = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5}$$

é tal que:

X a) S = 63   c) S = 58   e) S = 61

b) S = 64   d) S = 60

23. (Ufop-MG) A condição para que o binomial $\dbinom{n}{k}$ seja o dobro do binomial $\dbinom{n}{k-1}$ é:

a) n = 2k   c) n = 3k + 1

b) n = 3k   X d) n = 3k − 1

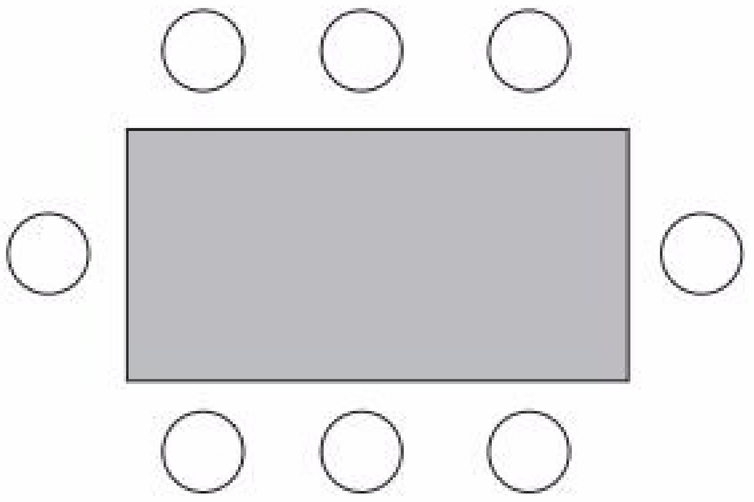
24. (UFBA) No desenvolvimento do binômio $(x + 1)^n$, segundo as potências decrescentes de *x*, o coeficiente do 4º termo é $\dfrac{10}{3}$ do coeficiente do 6º termo. Calcule a soma do 3º, 4º e 5º termos, para $x = -1$. 10

25. (Uneb-BA) O termo médio do desenvolvimento do binômio $(\text{sen}\,(x) - 2\cos\,(x))^4$ é equivalente a:

a) $4\cos\,(2x)$ c) $6\,\text{sen}^2\,(x)$ e) $4\cos^2\,(2x)$

b) $6\,\text{sen}\,(2x)$ X d) $6\,\text{sen}^2\,(2x)$

26. (UPE-PE) Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Editoria de arte

Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?

a) 1 440   c) 2 016 X   e) 5 760

b) 1 920   d) 4 032

27. (UECE) Sejam *r* e *s* duas retas distintas e paralelas.

Se fixarmos 10 pontos em *r* e 6 pontos em *s*, todos distintos, ao unirmos, com segmentos de reta, três quaisquer destes pontos não colineares, formam-se triângulos. Assinale a opção correspondente ao número de triângulos que podem ser formados.

a) 360   b) 380   X c) 400   d) 420

28. (Epcar-MG) Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados 10 soldados, dentre eles o soldado *A* e o soldado *B*, de tal maneira que fiquem 4 soldados na barraca I, 3 na barraca II e 3 na barraca III.

Se o soldado *A* deve ficar na barraca I e o soldado *B* não deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a:

a) 560   c) 1 680

X b) 1 120   d) 2 240

29. (UFV-MG) Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

X a) 32   c) 34   e) 30

b) 28   d) 26

30. Considere o lançamento de dois dados, um branco e um vermelho, e os eventos: *A*: sair 5 no dado branco e *B*: sair 5 no dado vermelho. Calcule:

a) A ∪ B A∪B = {(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)}

b) A ∩ B A ∩ B = {5, 5}

31. Dê o espaço amostral dos seguintes experimentos:
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Lançamento simultâneo de três moedas.

Faça: C = cara, K = coroa.

b) Distribuição dos 4 filhos de uma família, quanto ao sexo, por ordem de nascimento.

32. (Cesgranrio-RJ) Em uma amostra de 500 peças, existem exatamente quatro defeituosas. Retirando-se, ao acaso, uma peça dessa amostra, a probabilidade de ela ser perfeita é de:

X a) 99,0%   c) 99,2%   e) 99,4%

b) 99,1%   d) 99,3%

33. (Ufop-MG) Lançando-se dois dados, um amarelo e outro vermelho, qual a probabilidade de se obter 8 como soma de suas faces superiores? $\frac{5}{36}$

34. (UMC-SP) Uma roleta tem 37 posições numeradas 0, 1, 2, 3, 4, ... 36. Suponhamos que a bola caia em cada posição com probabilidades iguais. Qual é a probabilidade de a bola cair em:

a) um número menor que 5? $\frac{5}{37}$

b) um número maior que 30? $\frac{6}{37}$

35. (UFPR) Uma urna contém 500 bolas, cada uma delas identificada por um número; para essa identificação foram utilizados todos os números da progressão aritmética (1, 3, 5, 7, ..., 999). Retirando-se aleatoriamente da urna uma única bola, calcule a probabilidade em porcentagem de que o número dessa bola tenha o algarismo das unidades igual a 3. $\frac{1}{5}$ ou 20%

36. (Fuvest-SP) Sorteiam-se dois números naturais ao acaso, entre 101 e 1 000 inclusive, com reposição. Calcule a probabilidade de que os algarismos das unidades do produto dos números sorteados não seja zero. $\frac{73}{100}$ ou 73%

37. (Fasp-SP) Um colégio tem 400 alunos. Destes, 100 estudam Matemática, 80 estudam Física, 100 estudam Química, 20 estudam Matemática, Física e Química, 30 estudam Matemática e Física, 30 estudam Física e Química e 50 estudam somente Química. A probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

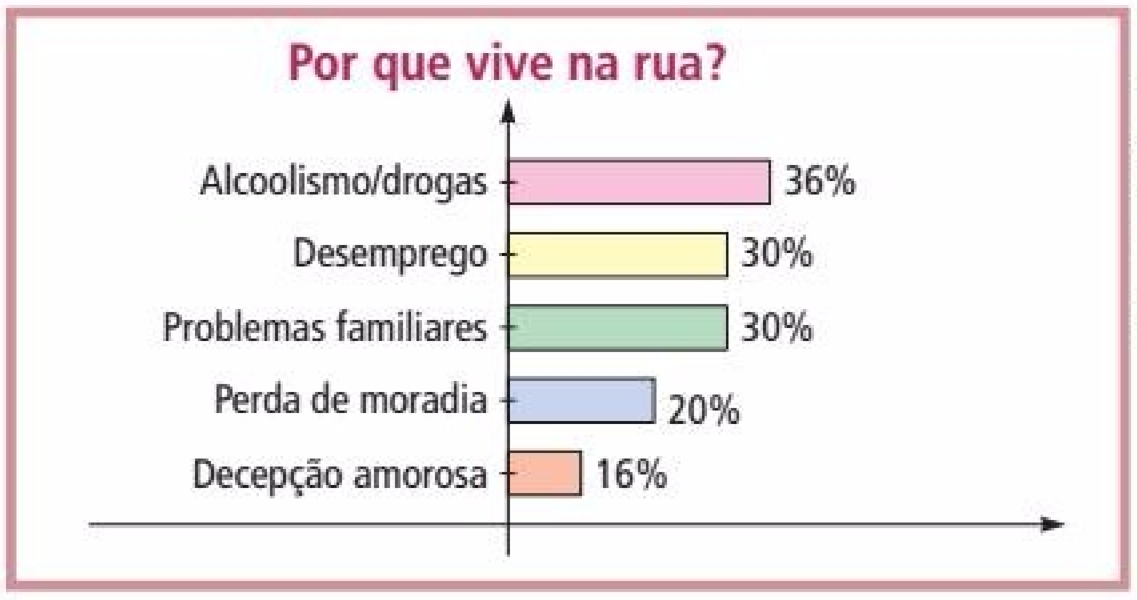
[✓ a) $\frac{1}{10}$] b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{10}$

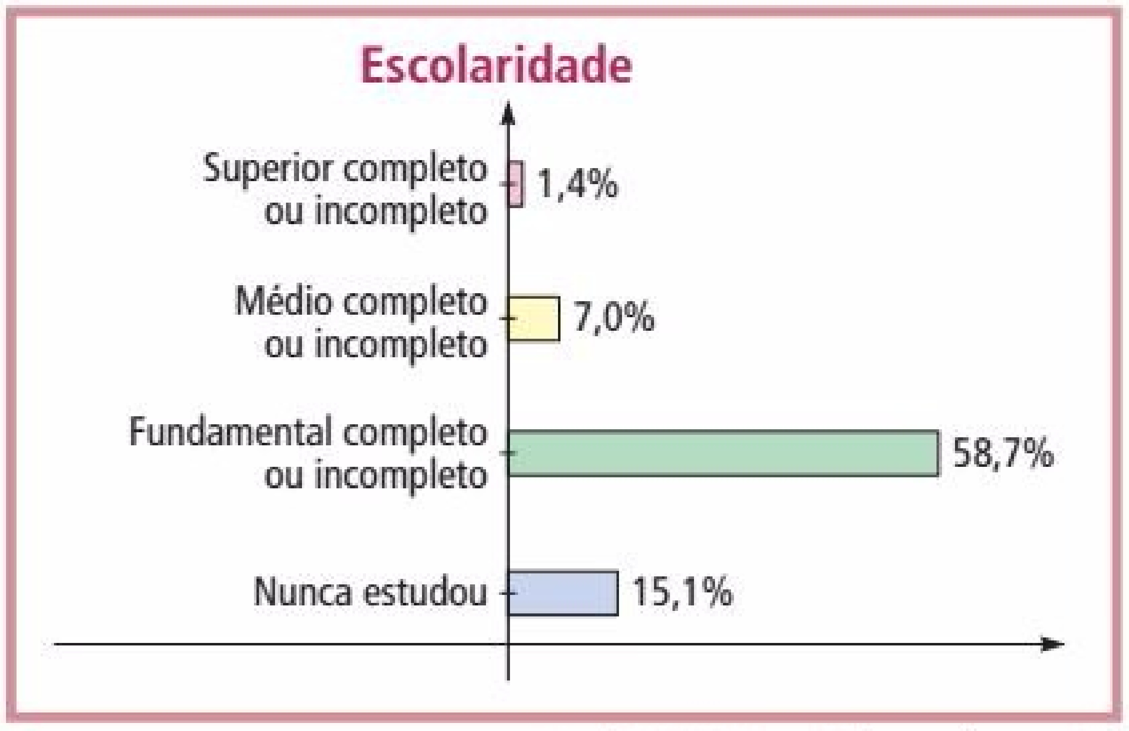
38. Escolhendo ao acaso uma das letras da palavra PROBABILIDADE, responda:

a) Qual a probabilidade de ter escolhido um B? $\frac{2}{13}$

b) Qual a probabilidade de ter escolhido um A ou um D? $\frac{4}{13}$

39. (Enem/MEC) O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.





Ilustrações: Editoria de arte

IstoÉ, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a:

[✓ a) 12%] b) 16% c) 20% d) 36% e) 52%

40. (FGV-SP)

a) Quantos conjuntos de 3 letras distintas podem ser formados usando as letras da palavra INTEGRAL? 56

b) Qual a probabilidade de, escolhendo ao acaso um desses conjuntos, obtermos um que inclua a letra L? $\frac{3}{8}$

41. (OBMEP) Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

a) $\frac{3}{5}$ [✓ b) $\frac{5}{9}$] c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

42. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um natural no conjunto {1, 2, ..., 100} de naturais sucessivos, seja p a probabilidade de este natural ser divisível por 2 ou por 3. Indique 100p. 67

43. (FEI-SP) Jogando-se dois dados, qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 4 ou 5? $\frac{7}{36}$

44. (OBMEP) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3}$

x d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{3}{4}$

45. (FGV-SP) Numa sala existem seis casais. Entre estas 12 pessoas, duas são selecionadas ao acaso.

a) Qual a probabilidade de selecionarmos um homem e sua esposa? $\frac{1}{11}$

b) Qual a probabilidade de selecionarmos dois homens? $\frac{5}{22}$

46. (PUCCamp-SP) Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma nos dois dados é 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles. $\frac{2}{5}$

47. (UFRGS-RS) As máquinas *A* e *B* produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas *A* e *B* é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa, 100 parafusos produzidos por *A* e 100 produzidos por *B*. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina *A* é de:

a) 10% b) 15% c) 30% d) 50% x e) 75%

48. (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas.

Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta? 0,020 ou 2%

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita? 0,526 ou ≃ 52,6%

49. (UERJ) Para a realização de uma partida de futebol são necessários três árbitros: um juiz principal, que apita o jogo, e seus dois auxiliares, que ficam nas laterais. Suponha que esse trio de arbitragem seja escolhido aleatoriamente em um grupo composto de somente dez árbitros, sendo X um deles. Após essa escolha, um segundo sorteio aleatório é feito entre os três para determinar qual deles será o juiz principal.

Calcule a probabilidade de X ser o juiz principal. $\frac{1}{10}$

50. (Unesp-SP) Um piloto de Fórmula 1 estima que suas chances de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20% se não chover. O Serviço de Meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de 75%. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir ao pódio. $\frac{1}{2}$ ou 50%

51. (Fuvest-SP) Francisco deve elaborar uma pesquisa sobre dois artrópodes distintos. Eles são selecionados, ao acaso, da seguinte relação: aranha, besouro, barata, lagosta, camarão, formiga, ácaro, caranguejo, abelha, carrapato, escorpião e gafanhoto.

Qual é a probabilidade de que ambos os artrópodes escolhidos para a pesquisa de Francisco não sejam insetos?

a) $\frac{49}{144}$ b) $\frac{14}{33}$ x c) $\frac{7}{22}$ d) $\frac{5}{22}$ e) $\frac{15}{144}$

52. (UFF-RJ) Os cavalos *X*, *Y* e *Z* disputam uma prova final na qual não poderá ocorrer empate. Sabe-se que a probabilidade de *X* vencer é igual ao dobro da probabilidade de *Y* vencer. Da mesma forma, a probabilidade de *Y* vencer é igual ao dobro da probabilidade de *Z* vencer. Calcule a probabilidade de:

a) *X* vencer. $\frac{4}{7}$

b) *Y* vencer. $\frac{2}{7}$

c) *Z* vencer. $\frac{1}{7}$

53. Um teste para tuberculose foi aplicado a 1 000 pessoas, 8% das quais eram portadoras da doença. Quando a pessoa tem tuberculose, o teste detecta a doença em 90% dos casos, é inconclusivo em 6% dos casos e negativo em 4%. Quando a pessoa não tem tuberculose, o teste indica a doença em 5% dos casos, é inconclusivo em 10% dos casos e negativo em 85%. Se uma pessoa é selecionada ao acaso, qual a probabilidade percentual de ela ter tuberculose, se seu resultado foi inconclusivo? Indique o valor inteiro mais próximo.

a) 3%
d) 6%
b) 4%
e) 7%
x c) 5%

54. (Fuvest-SP) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Qual a frequência da face 1?

a) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{12}$
x c) $\frac{1}{9}$

55. (UEPB) Um administrador de uma empresa de eletrodomésticos estima que a probabilidade de que uma firma concorrente planeje fabricar eletrodomésticos dentro dos próximos 3 anos é 0,30. Se a firma concorrente tem tais planos, há ainda uma probabilidade de 0,60 de que, por outras razões, construa uma nova fábrica. Se iniciar os trabalhos de construção de uma nova fábrica, a probabilidade de que tenha decidido entrar para o campo dos eletrodomésticos será:

a) 0,4873
c) 0,7213
e) 0,3864
x b) 0,4167
d) 0,5300

56. (UFPR) Cem bolas iguais estão identificadas, cada uma delas por um número; para essa identificação foram utilizados os vinte primeiros números da sequência 2, 4, 8, 16... e os oitenta primeiros da sequência 1, 3, 5, 7... . Assim, é correto afirmar:

(01) O maior número par utilizado é igual a 2^{20}.

(02) O maior número ímpar utilizado é igual a 161.

(04) Se todas as bolas estiverem numa urna e for retirada aleatoriamente apenas uma delas, então a probabilidade de que esta bola tenha número par é $\frac{1}{5}$.

(08) Se todas as bolas estiverem num urna e forem retiradas aleatoriamente apenas duas delas, uma de cada vez e sem recolocação na urna, então a probabilidade de que estas duas bolas tenham número ímpar é 64%.

(16) Do conjunto das cem bolas podem ser formadas 9 900 subconjuntos distintos, cada um contendo somente duas bolas. $1 + 4 + 8 = 13$

57. (PUC-RJ) Um baralho tem 26 cartas pretas e 26 cartas vermelhas. As cartas estão ordenadas ao acaso.

a) Retiramos uma carta do baralho completo: qual é a probabilidade de que a carta seja vermelha? $P = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

b) Retiramos três cartas do baralho completo: qual a probabilidade de que as três cartas sejam vermelhas?

c) Retiramos três cartas do baralho completo: qual a probabilidade de que duas cartas sejam vermelhas e uma preta? $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{39}{102}$

b. $P = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{6}{51}$

58. (Unioeste-PR) Numa promoção, uma loja sorteia 3 carros para seus clientes. Após uma compra, o cliente pega sem ver, uma dentre 80 chaves que estão em uma urna, e escolhe um dos três carros. Se a chave escolhida ligar o carro escolhido, o cliente ganha o carro, caso contrário, a chave volta para a urna à espera de outro cliente. Desta forma ocorre até que os três carros sejam ligados e a promoção acaba. As três chaves que ligam os três carros estão na urna, e nenhuma outra das 77 chaves liga qualquer um dos carros. Além disso, os carros são iguais e as chaves parecem iguais também, de forma que a chave não favorece a escolha do carro. Considerando a situação que nenhum dos três carros ainda foi ganho, qual a probabilidade de um cliente ganhar um dos três carros?

x a) 1,25%
c) $\frac{3}{80}$
e) $\frac{1}{77}$
b) 2%
d) 80%

59. (FGV-SP) Uma doença *D* atinge 1% de certa população. Um exame de sangue detecta a doença (dá resultado positivo) em 95% das pessoas que a têm. Por outro lado, o exame detecta erroneamente (dá resultado positivo) em 10% das pessoas que não a têm.

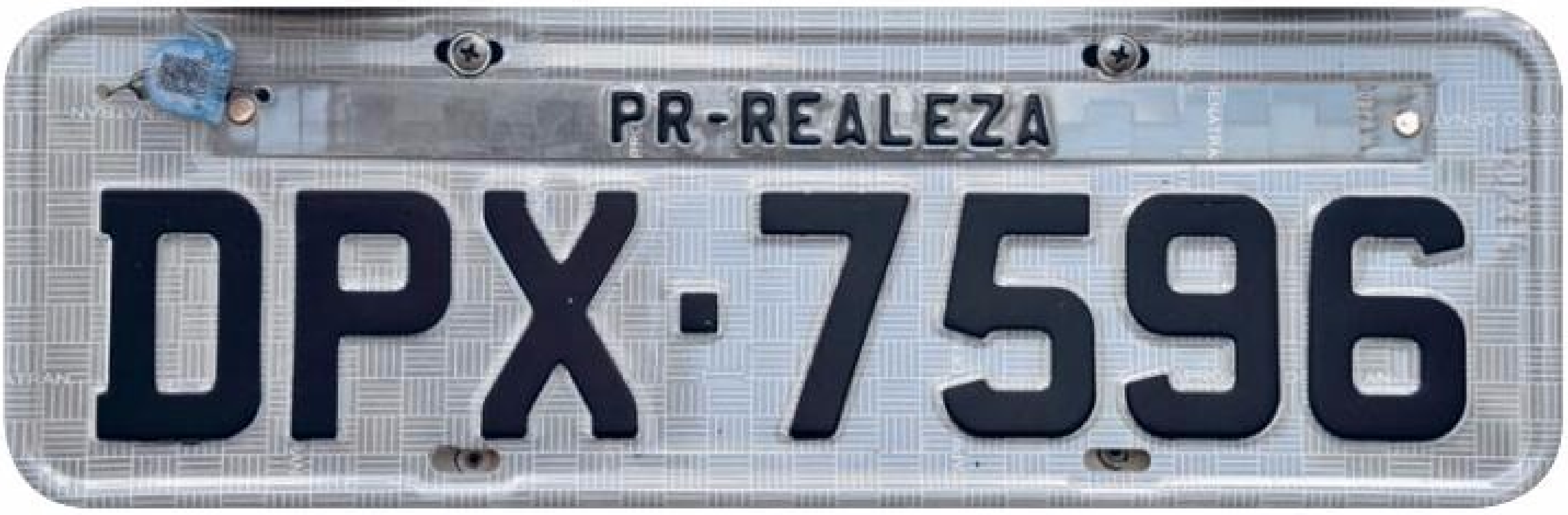
Se uma pessoa, escolhida ao acaso na população, fizer o exame e o resultado for positivo, a probabilidade de que ela tenha, de fato, a doença é aproximadamente:

a) 11%
d) 7%
b) 13%
x e) 9%
c) 5%

Retomando e pesquisando

Na abertura desta unidade abordamos as diversas sinalizações existentes a nossa volta, refletindo sobre sua relevância e importância. Dentre essas sinalizações, estão as placas de identificação de veículos. Elas são utilizadas para a distinção visual entre os veículos. Assim, até mesmo veículos de mesma marca, modelo e cor, são distinguíveis por essa identificação, que compreende um código único para cada veículo registrado em território nacional.

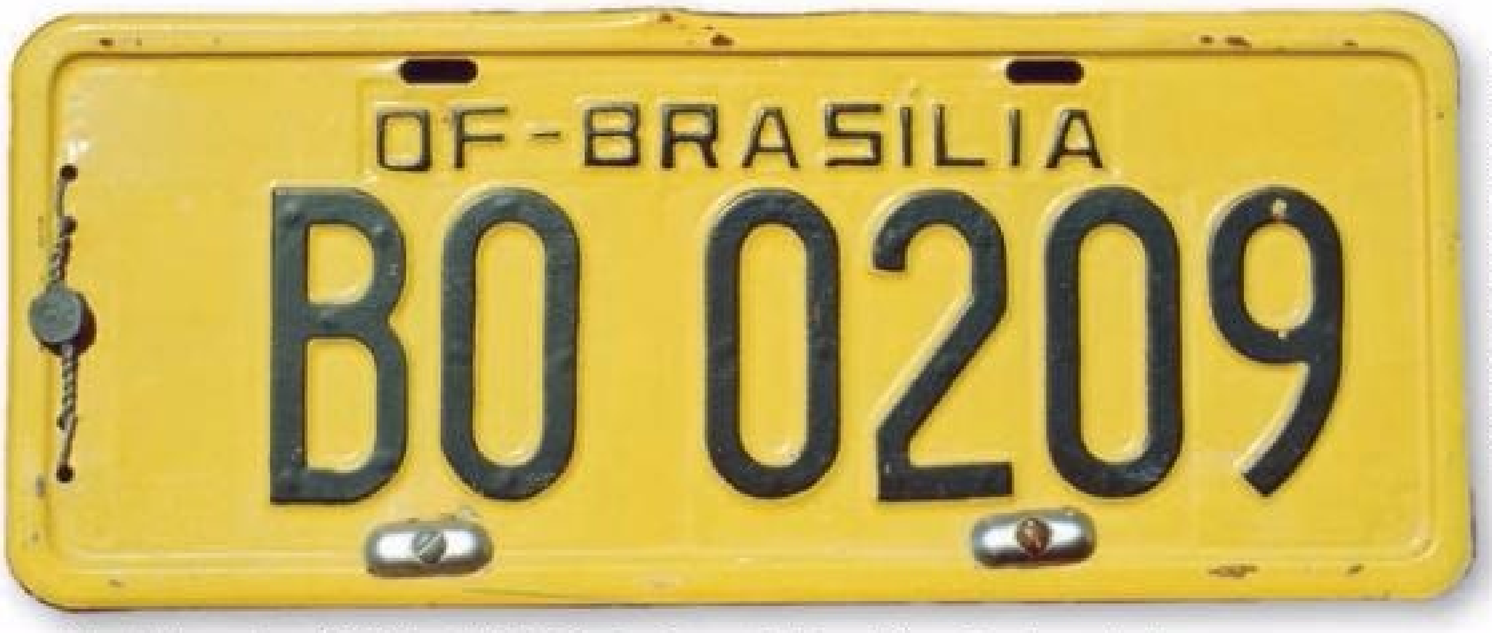
O sistema atual é composto por uma sequência de 3 letras do nosso alfabeto e 4 números, e está em vigor no Brasil desde 1990. Veja um exemplo.



Cesar Diniz/ Pulsar Imagens

Modelo atual de placa de identificação de veículos.

De 1969 a 1990, o sistema era formado por apenas 2 letras e 4 números. O aumento do número de veículos gerou uma limitação técnica para esse sistema em vigor, levando a criação do modelo atual. Veja ao lado um exemplo de placa do modelo antigo.



Fridmar Damm/Corbis/Latinstock

Modelo antigo (1969 até 1990) de placa de identificação de veículos.

Utilize os conhecimentos obtidos ao longo do volume e resolva as atividades a seguir.

Atividades

Escreva no caderno

1. O sistema de identificação de veículos, em vigor de 1969 a 1990, possibilitava o emplacamento de quantos veículos distintos, segundo a sua limitação de composição?
6 760 000 emplacamentos distintos.

2. Qual a quantidade de emplacamentos distintos possíveis, segundo o novo sistema em vigor desde 1990? 175 760 000 emplacamentos distintos.

3. Em conjunto com os colegas, elabore um cartaz contendo os 3 modelos de emplacamento de veículos apresentados e suas respectivas limitações quantitativas. Pesquise e inclua em sua produção outros sistemas de identificação formados por códigos, como Registro Geral (RG), Cadastro de Pessoa Física (CPF), título de eleitor, entre outros. Apresente as limitações quantitativas associadas a cada um deles.
Atenção: números como RG e CPF possuem dígito verificador. Esse dígito é gerado automaticamente, a partir da combinação numérica formada. Ou seja, não deve ser levado em consideração no cálculo de combinações possíveis. Por exemplo: RG: XX.XXX.XXX-X. O cálculo da quantidade de registros possíveis não leva em conta o dígito verificador, apresentado após o hífen. Resposta pessoal.

Infográfico: Contexto histórico

Para muitas pessoas, a Matemática não passa de uma disciplina escolar excessivamente teórica e, portanto, "descolada" da realidade. Essa visão difundida promove alguns questionamentos do tipo "qual é a utilidade dessa matéria?", "por que esse assunto é importante?" ou então "o que esse conteúdo pode nos oferecer?".

Ao contrário do que esse ponto de vista sustenta, a Matemática é uma área intrinsecamente ligada à vivência humana. Desde os afazeres mais triviais, como a compra em um supermercado ou o rateio dos gastos de uma viagem, até empreendimentos de alta complexidade – a exemplo do lançamento de um satélite artificial –, usamos o saber proveniente do universo matemático.

Sem o raciocínio matemático e o extenso conhecimento ligado a essa capacidade, as sociedades humanas não teriam condições de superar os obstáculos que atravancavam sua existência. O que constatamos é que a "mais abstrata das disciplinas" é uma ferramenta imprescindível ao desenvolvimento de nossa espécie.

Por essa razão, não seria exagero parafrasear o filósofo alemão Friedrich Nietzsche (1844-1900) ao afirmar que o campo matemático é "humano, demasiado humano". O que constatamos é que, desde os primórdios, a história dos seres humanos e a evolução da Matemática sofrem uma influência mútua, constante e enriquecedora.

Assim como todos os povos, as produções humanas contam com uma história, ou seja, foram elaboradas e desenvolvidas a partir de contextos históricos específicos. Como consequência, não é raro encontrar publicações que apresentam a história do vestuário, da arquitetura ou da gastronomia.

Sendo uma antiquíssima criação humana, a Matemática também ostenta uma rica historicidade. Ao contrário do que muitas pessoas acreditam, os saberes matemáticos não "caíram do céu", mas foram forjados e aprimorados em vários períodos da nossa história. Egípcios, gregos, árabes, renascentistas ou pensadores iluministas contribuíram, cada um à sua forma, para enriquecer o milenar campo do conhecimento matemático.

A partir dessa constatação, procuramos tornar a aprendizagem da Matemática mais instigante por meio da elaboração de um infográfico que apresenta uma linha do tempo sobre a história da Matemática de alguns conteúdos abordados nesta coleção.

A utilização de um infográfico se deve ao seu potencial de valorizar visualmente informações. Diversos veículos de comunicação, peças publicitárias e campanhas públicas utilizam esse recurso, constituído por quadros informativos que misturam textos e imagens com um chamativo apelo visual.

O infográfico que construímos está organizado de acordo com as diferentes fases da humanidade. Em cada período da história, procuramos apresentar pensadores ou estudos que proporcionaram grande desenvolvimento ao campo matemático. Também temos uma legenda que indica o volume desta coleção que aborda os conteúdos citados. Os períodos em que o infográfico foi organizado são os seguintes:

Pré-história (cerca de 2,5 milhões de anos atrás – 4.000 a.C.)	**Antiguidade** (4.000 a. C. – 476 d.C.)	**Idade Média** (476 – 1453/1492)	**Idade Moderna** (1453/1492 – 1789)	**Era Contemporânea** (1789 – dias atuais)

Caso haja alguma dúvida, não deixe de consultar seus professores de Matemática e de História.

CONTEXTO HISTÓRICO

Principais conteúdos matemáticos abordados nesta coleção

Legenda

X Número correspondente ao volume em que o conteúdo é apresentado.

Sítio Arqueológico gruta do Pitoco, Alcinópolis, MS. Bufinha/SEMUDES

Milhares de anos

Estilo geométrico produzido por povos ancestrais do Brasil, Gruta do Pitoco (MS).

Números

Durante o período Paleolítico, a maioria das comunidades humanas usava apenas três números: um, dois e “muitos”. Mesmo com um conhecimento numérico rudimentar, tais povos vivenciavam a Matemática de uma forma empírica, ao entrar em contato com elementos geométricos da natureza.

PRÉ-HISTÓRIA

(cerca de 2,5 milhões de anos atrás-4000 a.C.)

1 1 1 1

James Di Loreto & Donald H. Hurlbert. Smithsonian Institution

4000 a.C.

Registro numérico

A partir do período Neolítico, diversas comunidades humanas sedentarizaram-se e passaram a estocar o alimento excedente. Gradualmente, surgem os primeiros centros urbanos, as relações comerciais, a divisão social e o conceito de propriedade privada. A necessidade de contar motivou a associação entre uma quantidade de objetos e a mesma quantidade de pequenos seixos. Surgem registros de números, como marcas em ossos, pedaços de madeira e pedra.

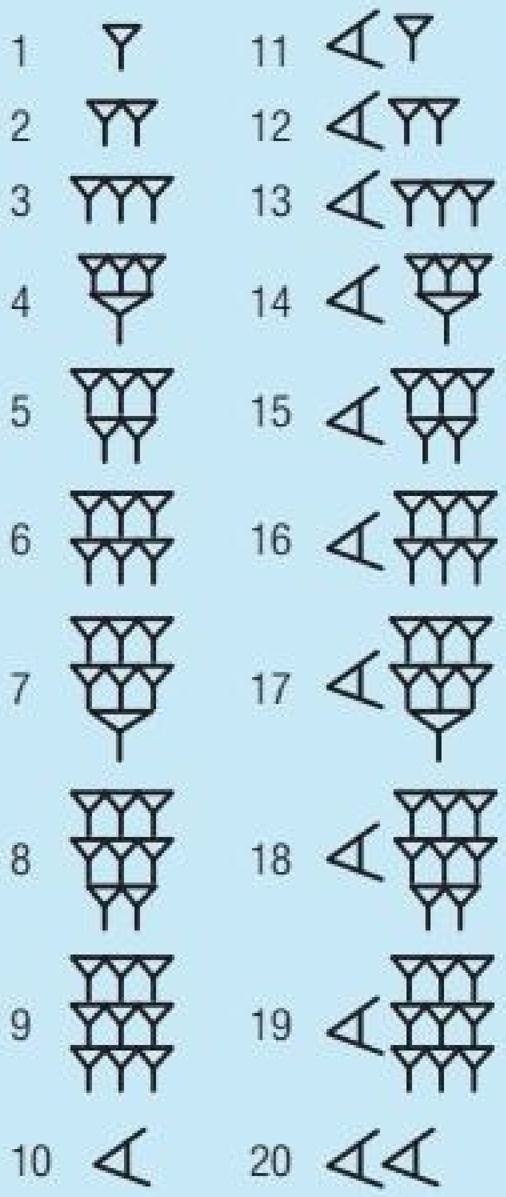
Fragmento de osso marcado por comunidades da Pré-História.

3000 a.C.

Números naturais

Durante a Antiguidade, egípcios, mesopotâmicos e outras civilizações promoveram um notável desenvolvimento da Matemática, impulsionado, sobretudo, por demandas do cotidiano. A construção de monumentos fúnebres, a contagem do tempo e a construção de canais de irrigação são alguns dos problemas superados com o auxílio do saber matemático.

Mesopotâmicos e egípcios criaram símbolos para representar os números naturais. Egípcios usavam base 10, mas notação não posicional. Já os sumérios, um dos povos da Mesopotâmia, usavam base 60 com notação posicional. Os matemáticos da antiga Suméria precisavam de 59 símbolos diferentes para representar seus números. Não existia representação do zero. Quando nada havia, deixava-se um espaço em branco.



Editoria de Arte

Sistema numérico arcaico desenvolvido na Suméria (atual Iraque).

2000 a.C.

Frações

Por volta do segundo milênio antes de Cristo, povos antigos já contavam com muitas invenções consagradas, a exemplo da roda, da escrita, da Astronomia e do calendário. Em tal contexto, mesopotâmicos e egípcios criaram símbolos para representar as frações. Os egípcios usavam apenas frações de numerador 1. Assim, no Egito antigo, a fração $\frac{3}{5}$ era representada como $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$.

Fonte de pesquisa do infográfico:
BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.
EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2007.
KINDER, Hermann; HILGEMANN, Werner; HERGT, Manfred. **Atlas histórico mundial**: De los orígenes a nuestros días. Madrid: Akal, 2007.

A linha do tempo não está representada em escala.

Album/Latinstock

Trecho do papiro restaurado de Ahmes.

1800 a.C.

Progressões

No Egito antigo, os escribas, grupo profissional que detinha o domínio da leitura e da escrita, produziram uma vasta quantidade de documentos sobre diversos assuntos concernentes a essa civilização. Atualmente, tais documentos são uma preciosa fonte de estudo para se compreender aspectos relevantes dessa civilização. Em um papiro elaborado pelo escriba Ahmes, por exemplo, aparecem problemas envolvendo sequências aritméticas e geométricas.

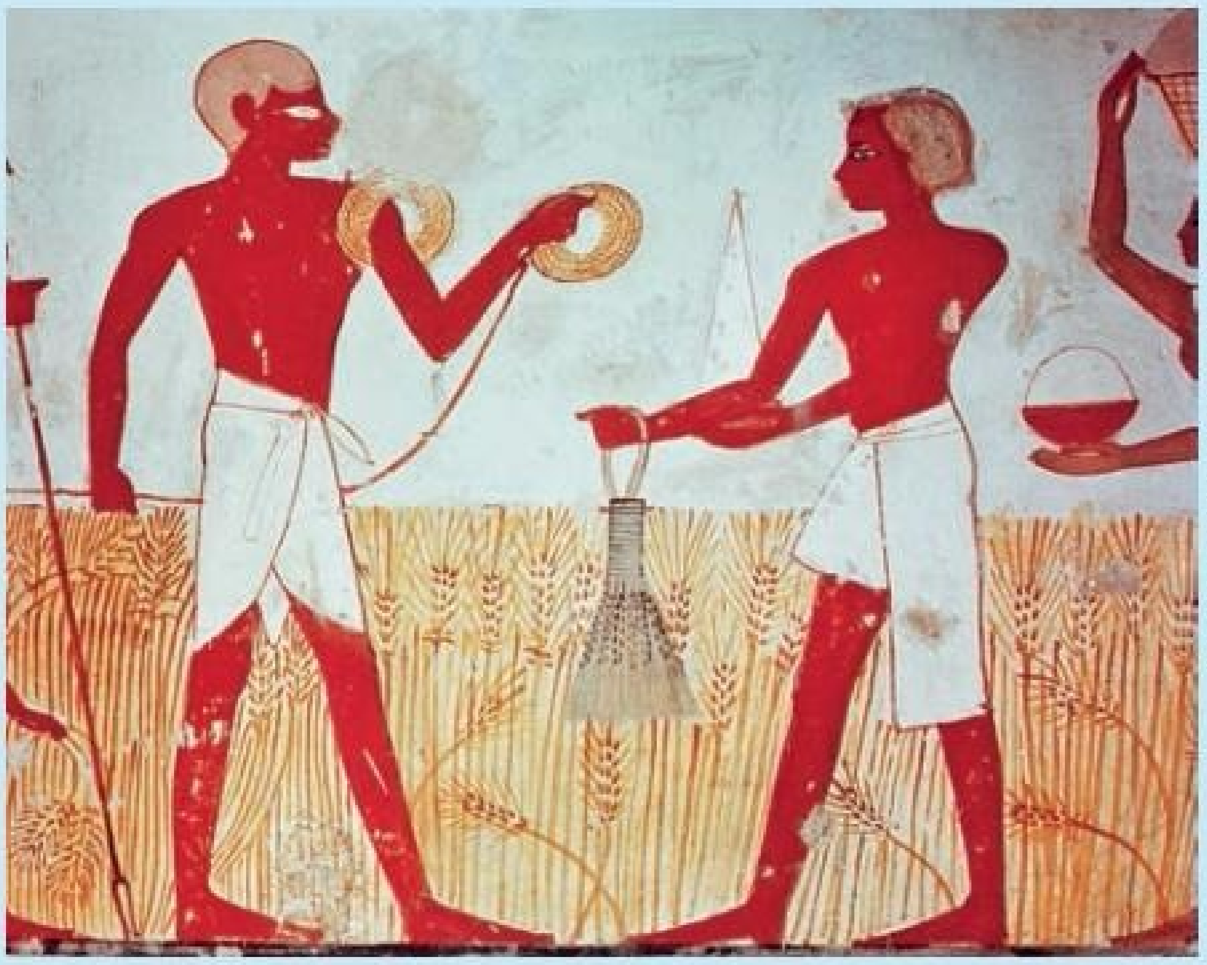

Werner Forman/ Werner Forman/Corbis/Latinstock

Imagem de agrimensores egípcios trabalhando em uma plantação às margens do rio Nilo.

Século XVI a.C.

Conceito de área

As áreas de figuras próximas do retângulo eram calculadas no antigo Egito pelo produto das médias dos lados opostos do quadrilátero. Não era um método exato, mas resultava em uma boa aproximação para a área. Tal conhecimento foi imprescindível para o surgimento da agrimensura, atividade que tem como função medir e dividir lotes de terra. Em muitas imagens produzidas por essa sociedade, podemos observar o árduo trabalho dos agrimensores às margens do rio Nilo, sua principal fonte de água.

① ②

ANTIGUIDADE

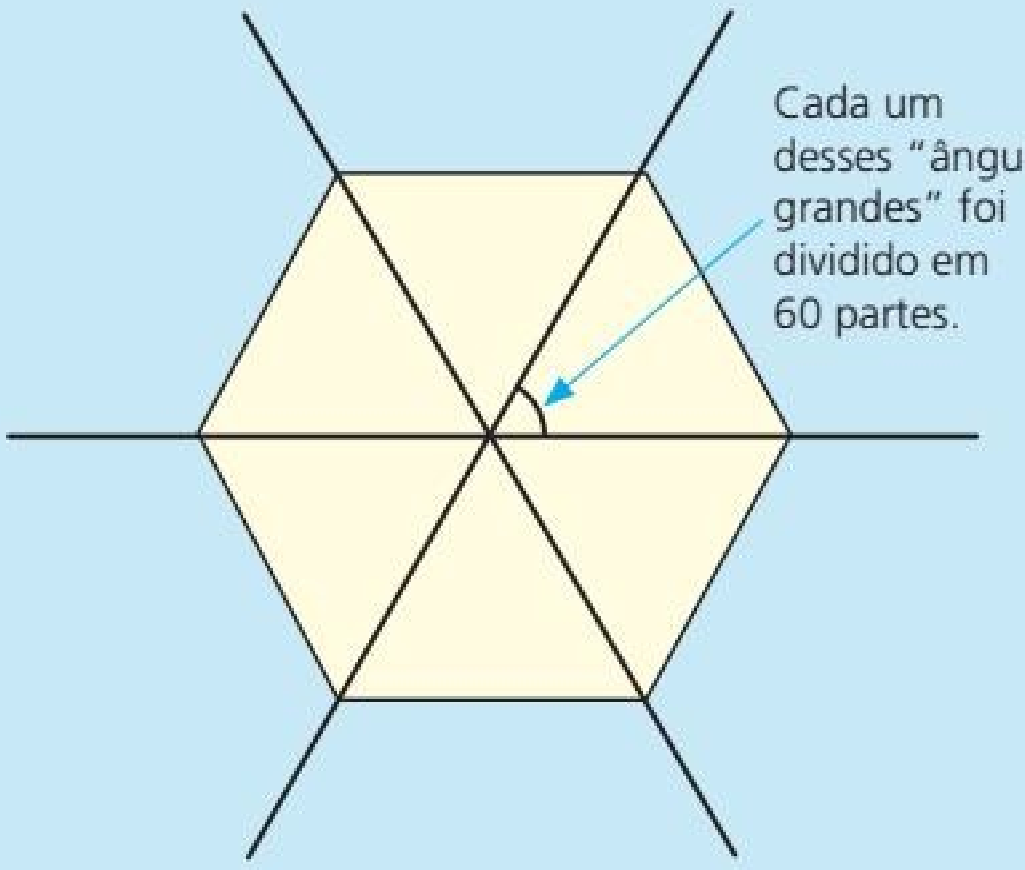
(4000 a.C.-476 d.C.)

①

Século XVI a.C.

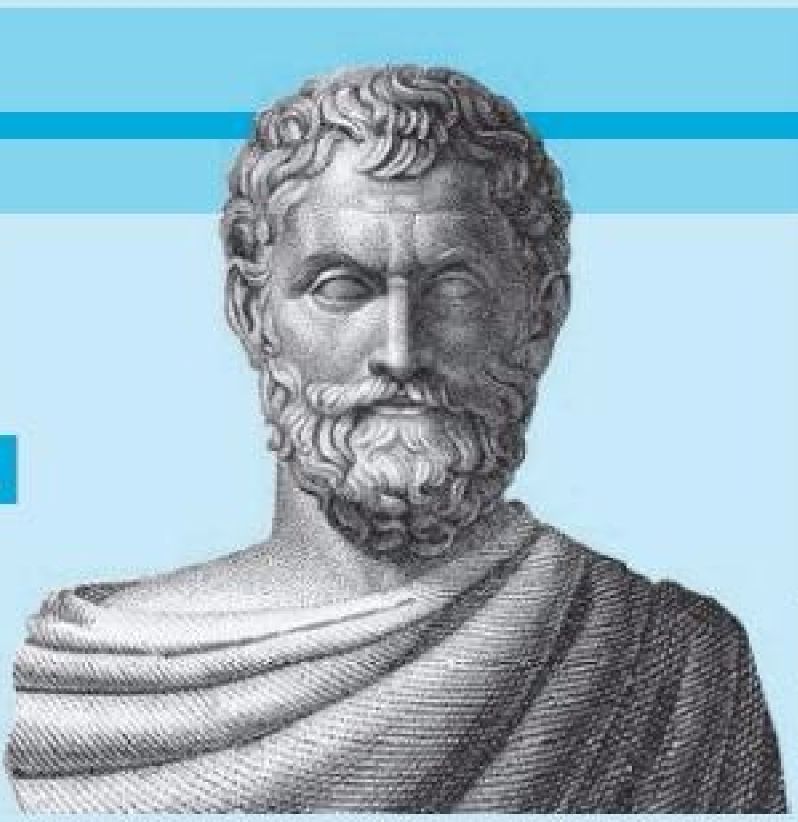
Medida de ângulos

Os mesopotâmicos conheciam o hexágono regular. Como seu sistema de numeração era em base 60, optaram por dividir cada “ângulo grande” em 60 partes.



Editoria de Arte

Século VI a.C.


Corbis/Latinstock

Busto de Tales de Mileto, considerado o primeiro filósofo da História ocidental.

Semelhança

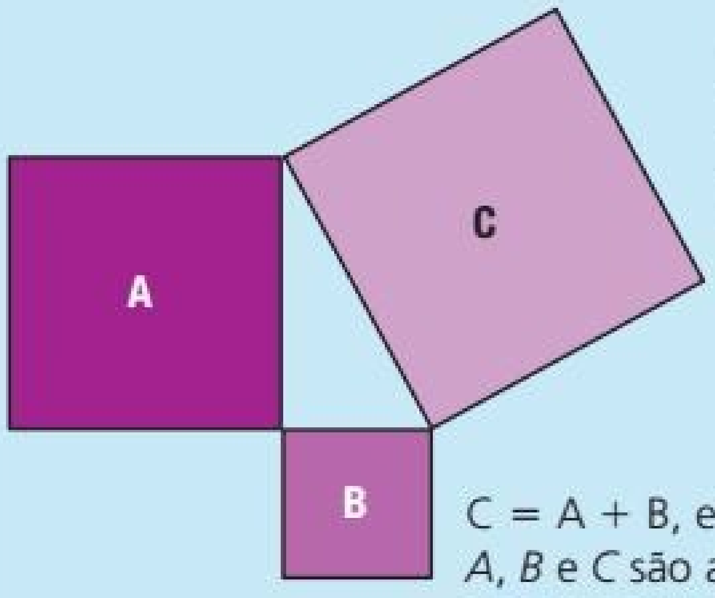
Nas colônias gregas da Ásia Menor (atual Turquia), um grupo de pensadores desprendeu-se gradualmente das explicações mitológicas usadas para a compreensão do mundo. Esse lento processo promoveu o surgimento do racionalismo, da Filosofia e do pensamento científico. Seu precursor foi Tales de Mileto (c. 623 a.C.-c. 546 a.C.), um hábil astrônomo que sustentava a ideia de que todos os elementos do Universo foram criados a partir da água. Na Matemática, Tales de Mileto demonstrou diversas propriedades de figuras geométricas e desenvolveu o conceito de semelhança mostrando diversas aplicações.

Professor, comente com os alunos que é muito comum em História da Matemática escrever “c.” (cerca de) quando não se tem certeza da data.

500 a.C.

Teorema de Pitágoras

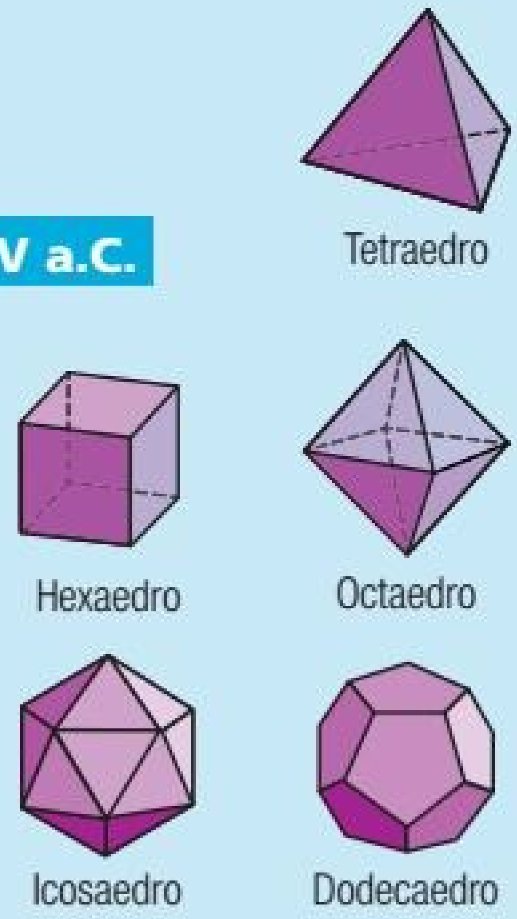
Nos primórdios da Filosofia grega, Pitágoras de Samos (c. 570 a.C. - c. 495 a.C.) afirmava que a essência das coisas são os números. Estudioso profícuo da Música e da Matemática, sua mais famosa contribuição é a confirmação de um antigo enunciado matemático: "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".



Editoria de Arte

$C = A + B$, em que A, B e C são as áreas dos respectivos quadrados.

Século V a.C.



Editoria de Arte

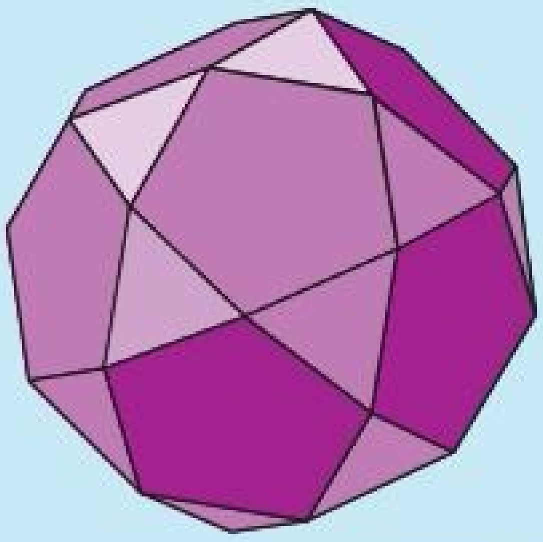
Poliedros

No auge da civilização grega, Atenas havia se convertido na *pólis* (cidade-estado) modelar, adornada com templos e monumentos custeados pelo comércio marítimo. Sócrates (c. 469 a.C. - c. 399 a.C.), Platão (c. 428 a.C. - c. 348 a.C.) e outros filósofos de renome promoviam debates, envolvendo, por exemplo, os conceitos de moral, beleza e verdade. No campo da Matemática, por sua vez, estudiosos já dominavam o conhecimento sobre os cinco poliedros regulares, representados acima.

Século III a.C.

Poliedros

Arquimedes de Siracusa (c. 287 a.C. - c. 212 a.C.) é considerado o maior matemático da Antiguidade. Filho de um astrônomo, estudou em Alexandria e desenvolveu célebres contribuições ao universo das ciências exatas – entre as quais as leis físicas do empuxo e da alavanca. Arquimedes também descobriu os 13 poliedros semirregulares. Um deles está representado na figura. O icosidodecaedro é formado por 12 pentágonos e 20 triângulos. No total, tal figura apresenta 32 faces, 30 vértices e 60 arestas.



Editoria de Arte

Representação de um icosidodecaedro.

ANTIGUIDADE

(4000 a.C.-476 d.C.)

400 a.C.

Matemática financeira

A princípio, as relações comerciais entre as primeiras comunidades humanas ocorriam com base na noção de escambo: os produtos eram trocados de forma amonetária, isto é, sem a utilização de moedas. Entretanto, o aprimoramento do comércio e a introdução de moedas exigiram a elaboração de novos saberes matemáticos. A primeira operação de Matemática financeira foi o câmbio, sendo necessário estabelecer as relações de equivalência entre o sistema monetário de diversas regiões.

Século III a.C.

Corpos redondos

No século III a.C., Arquimedes já sabia calcular os volumes dos sólidos redondos: cilindro, cone e esfera. Em 212 a.C., morreu tragicamente, aos 75 anos, pela espada de um soldado romano durante as Guerras Púnicas – um conjunto de conflitos travados entre Roma e Cartago. Sua tumba foi adornada com a relação entre os volumes da esfera e do cilindro de acordo com seu desejo.

Século III a.C.

Números irracionais e Geometria espacial de posição

Para promover seu poder, o conquistador Alexandre, o Grande (356 a.C.-323 a.C.) fundou diversas cidades com o nome de Alexandria – entre as quais se destaca o centro urbano do norte do Egito. Após sua morte, tal cidade converteu-se em um cobiçado polo de pesquisa, atraindo inúmeros sábios do mundo antigo a sua prestigiosa biblioteca, dotada de uma grande coleção de obras de caráter científico.

Em Alexandria, Euclides (c. 330 a.C.-?) escreveu a obra **Os Elementos**, a qual reunia grande parte do conhecimento matemático da época. Nessa coleção de 13 volumes, aparece a demonstração da existência de segmentos de retas que não podem ser medidos em nenhuma unidade. O 11º volume de tal publicação apresenta a Geometria espacial de posição, a qual se propõe a analisar as relações entre pontos, retas e planos.

Egypt Exploration Fund/University of Pennsylvania Museum of Archaeology and Anthropology

Fragmento da obra **Os Elementos**, de Euclides de Alexandria.

A linha do tempo não está representada em escala.

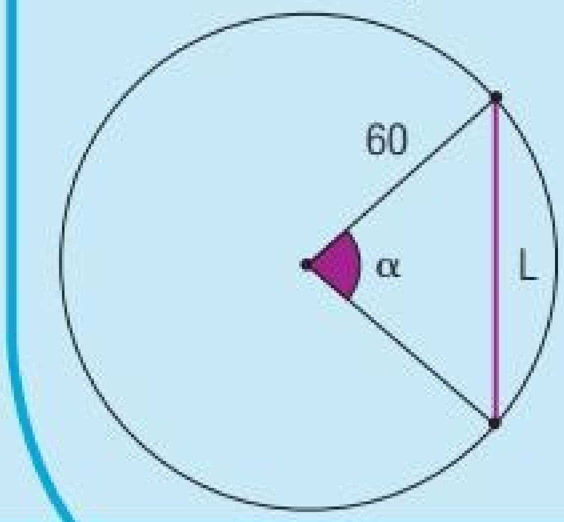
150

Trigonometria

Claudio Ptolomeu (c. 90 - c. 168) foi outro grande intelectual a habitar a cidade de Alexandria. Além da Matemática e da Astronomia, tal pensador apresentou grande contribuição no campo da Geografia. Suas produções cartográficas e a teoria geocêntrica que elaborou influenciaram os pensadores europeus até o fim da Idade Média.

Além disso, Ptolomeu construiu a primeira tabela de cordas. Em uma circunferência de raio 60, para cada ângulo α (de meio em meio grau) está associado o comprimento L da corda correspondente.

Por exemplo, para $\alpha = 80°$ tem-se $L = 77{,}13$. A metade da corda dividida por 60 é o seno da metade do ângulo.



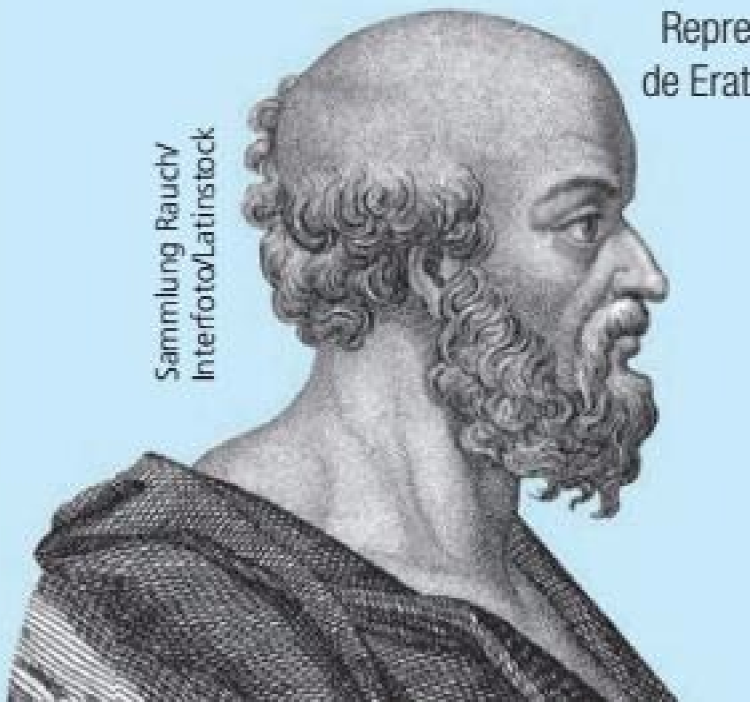
Editoria de Arte

Século III a.C.

Comprimento da circunferência

Eratóstenes de Cirene (c. 276 a.C. - c. 194 a.C.) mediu a circunferência da Terra. Ele calculou a medida de 5 000 estádios para a distância entre Siena (Assuã) e Alexandria e descobriu que entre essas cidades o ângulo central é de 7,5°. Como o estádio era uma unidade aproximadamente igual a 185 m, Eratóstenes estimou a circunferência terrestre em cerca de 46 000 km.

O resultado apresenta uma pequena margem de erro diante das medições atuais, que estipulam o valor em 40 075 km.



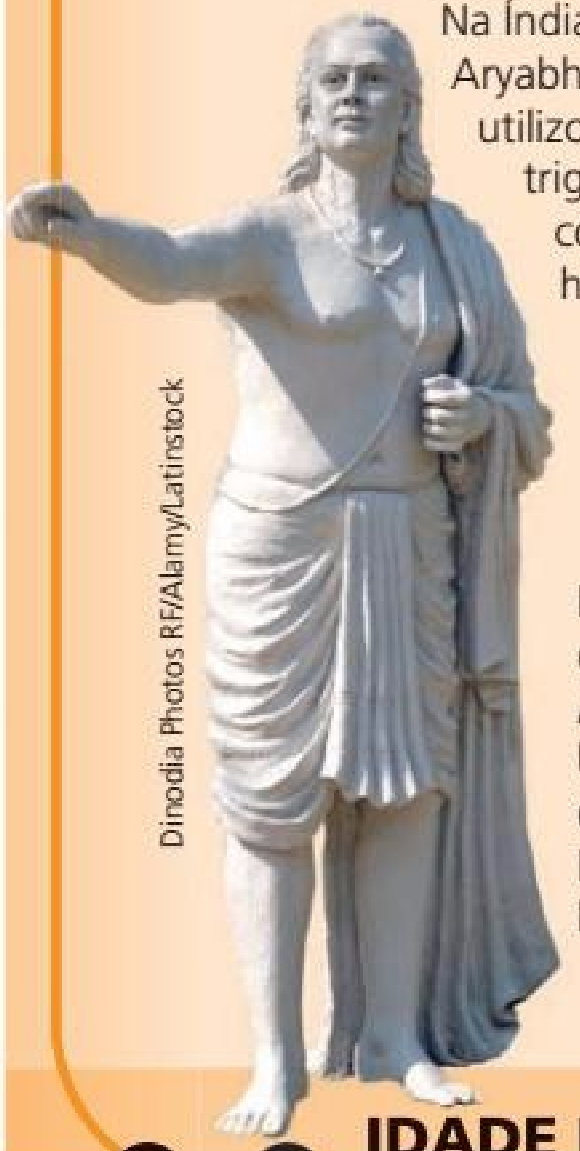
Representação moderna de Eratóstenes de Cirene.

Sammlung Rauch/Interfoto/Latinstock

500

Trigonometria

Durante a Idade Média, uma força religiosa arrebatadora espalhou-se pela Europa: o Cristianismo. O conhecimento produzido na época submeteu-se aos ditames da Igreja, conferindo uma autonomia relativa ao desenvolvimento da Ciência. Paralelamente a esse fenômeno, civilizações de destaque foram forjadas na África e no Oriente, a exemplo dos bizantinos, indianos e árabes muçulmanos. Na Índia, o astrônomo Aryabhata (476-550) utilizou as razões trigonométricas como fazemos hoje em dia.



Estátua do estudioso indiano Aryabhata na Universidade de Pune, em Maharashtra, Índia. Fotografia de 2008.

Dinodia Photos RF/Alamy/Latinstock

Século X

Relações entre funções trigonométricas e Trigonometria

A partir do século VII, o Islamismo foi difundido a diversas regiões do Oriente Médio, norte da África, Ásia Central e Península Ibérica. No antigo território da Pérsia (atual Irã), o matemático muçulmano Abu al-Wafa al-Buzjani (940-998) mostrou as relações entre as funções trigonométricas e utilizou, pela primeira vez, a circunferência de raio 1. Ele também deduziu as seguintes fórmulas:

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

IDADE MÉDIA

(476-1453/1492)

Séculos VII ao XV

Números negativos

Na Idade Média, o surgimento de números negativos em civilizações do Oriente comprovava sua sofisticação intelectual. Os primeiros registros datam do século VII, na Índia, em uma época de esplendor do império Brahmagupta. Duzentos anos depois, o muçulmano persa Al-Khwarizmi (780-c.-850) aprimora os estudos sobre os números negativos. Tempos depois, Abu al-Wafa também aprofundou o conhecimento matemático em tal área.

A Europa, por sua vez, sofreu uma mudança de mentalidade a partir do alvorecer da Idade Moderna. O Teocentrismo da Idade Média cedeu lugar ao Racionalismo e ao Humanismo do Renascimento. No auge de tal período, o italiano Luca Pacioli (1445-1517) entra em contato com os saberes matemáticos do Oriente e promove relevantes estudos acerca dos números negativos.

Luca Pacioli.

Akg-Images/Latinstock

Estátua no Uzbequistão homenageia Al-Khwarizmi, considerado por muitos matemáticos como o “pai da Álgebra”. Fotografia de 2013.

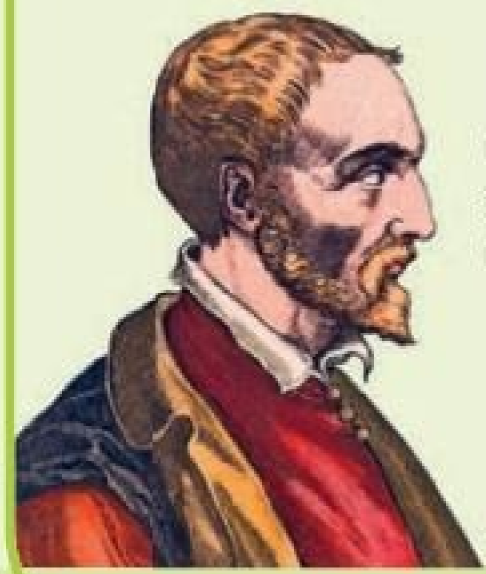
Melvyn Longhurst/Alamy/Latinstock

1526

Probabilidade

Durante a Renascença, o norte da Península Itálica presenciou o enriquecimento de cidades de tradição comercial, em especial Florença, Veneza e Gênova. As riquezas acumuladas foram utilizadas para o patrocínio de artistas geniais. Filippo Brunelleschi (1377-1446), Sandro Botticelli (1445-1510), Leonardo da Vinci (1452-1519) e Michelangelo Buonarroti (1475-1564) são alguns dos nomes consagrados em tal contexto.

Já no final do Renascimento, Girolamo Cardano (1501-1576), um cientista e matemático italiano, escreveu o livro **Liber de ludo aleae** (Livro dos jogos de azar). Esse livro marcou o início do estudo da probabilidade em jogos, sendo publicado apenas em 1663.



Gravura do cientista italiano Girolamo Cardano.

Akg-Images/Latinstock

1614

Logaritmos

A revolução científica contou com figuras do quilate de Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630). Tal fenômeno, que engloba grande parte da Idade Moderna, passou a questionar as antigas verdades por meio da atenta observação do objeto do conhecimento e da experimentação de hipóteses produzidas.

Durante essa profunda transformação do paradigma da Ciência, o escocês John Napier (1550-1617) publicou seu trabalho sobre logaritmos, cujo título em latim é **Mirifici logaritmorum canonis descriptio**.

1624

Equações polinomiais

Em meados do século XVII, a revolução científica chegou à França da Idade Moderna, momento de esplendor da corte dos Bourbon, caso do extravagante Luís XIV. Durante a época de Luís XIII, pai do "rei Sol", Albert Girard (1595-1632) lançou o livro **Invention nouvelle en l'algebre** contendo as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial.

Meados do século XVII

Probabilidade

Cartas entre Pierre de Fermat e o filósofo e teólogo Blaise Pascal (1623-1662) auxiliaram no desenvolvimento do raciocínio de probabilidade em jogos. Christian Huygens (1629-1695), matemático holandês, escreveu um livro sobre probabilidades, cujo título é **De Ratiociniis in ludo aleae** (Sobre o raciocínio em jogos de azar).

❷ ❸ **IDADE MODERNA** ❶ ❸ ❸ ❸ ❷

(1453/1492-1789)

1542

Números complexos

Girolamo Cardano elaborou a solução da equação $x^3 + px + q = 0$, que tinha sido descoberta por Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccoló Tartaglia (1499-1557).

Na solução de uma dessas equações aparece a igualdade $\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-4}} = -2$, a qual contém um número negativo dentro de uma raiz quadrada; apesar disso, o resultado é um número real.

Esse fato marcou o nascimento dos números complexos, compreendidos apenas séculos depois.

1635

Cálculo

A Idade Moderna vivenciou também a Reforma religiosa, uma ruptura da cristandade europeia motivada, entre outros fatores, pela ascensão de uma mentalidade questionadora e irreverente. Como resposta ao surgimento das correntes protestantes, o católico Ignácio de Loyola fundou a Companhia de Jesus em 1534, cujos membros são conhecidos como jesuítas. Entre os seguidores da ordem, o italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) conquistou reconhecimento ao produzir a obra **Geometria indivisibilibus continuorum**. Tal produção contém o famoso princípio que serviu de inspiração ao aparecimento e ao desenvolvimento do Cálculo.

1636

Geometria analítica

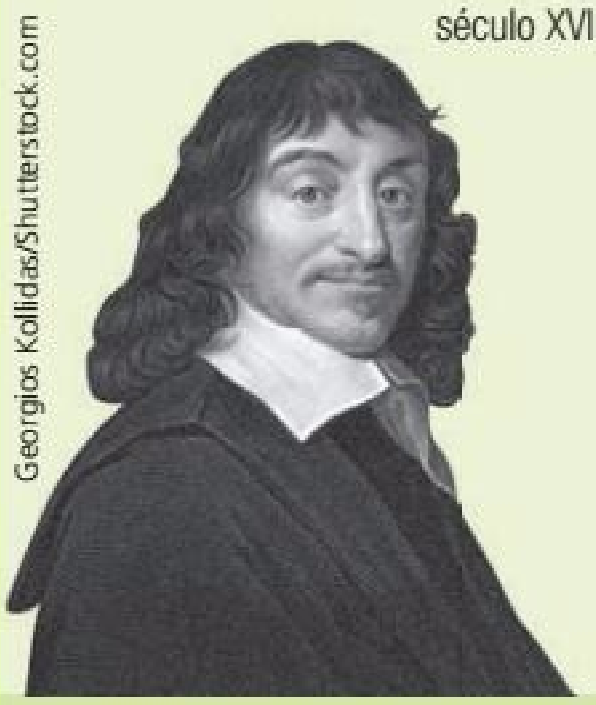
O francês Pierre de Fermat (1601-1665) teve a ideia de representar pontos no plano por meio de duas coordenadas. Com elas, ele estudou as cônicas. Tal proposta foi também enunciada pelo filósofo René Descartes (1596-1650), um dos pensadores mais versáteis da Idade Moderna. Sua produção matemática foi tão relevante quanto suas divagações filosóficas, entre as quais a famosa sentença *"cogito, ergo sum"* (penso, logo existo).

A linha do tempo não está representada em escala.

1637

Geometria analítica

René Descartes produziu a obra **Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências**. No apêndice desse livro, aparecem os fundamentos que permitiram o aparecimento da Geometria analítica décadas depois. Descartes foi um dos primeiros matemáticos a ter a ideia de reunir a Geometria e a Álgebra.

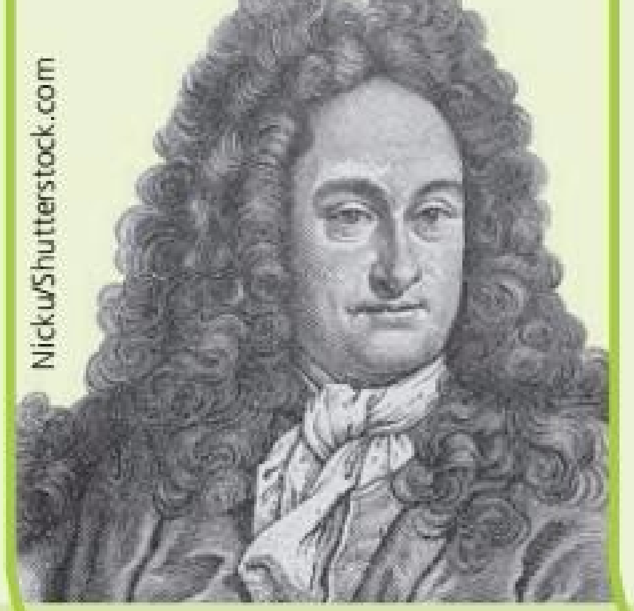

O filósofo francês René Descartes mostrou como poucos o espírito da Ciência moderna no século XVII.

Georgios Kollidas/Shutterstock.com

1666

Combinatória

Com apenas 20 anos, Gottfried Leibniz (1646-1716), matemático, cientista e diplomata alemão, lançou o trabalho **Dissertatio de arte combinatoria** com as principais técnicas de contar de forma eficiente.

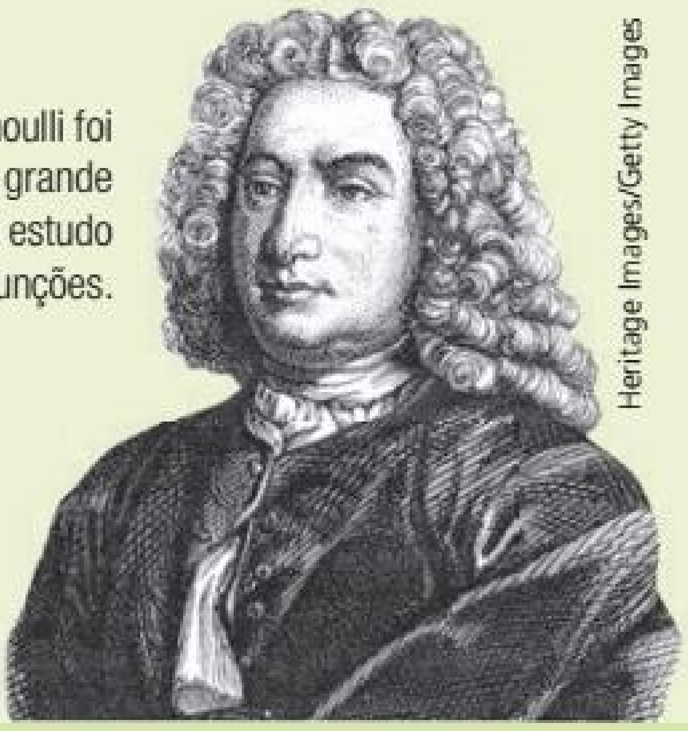

Pensador e diplomata alemão Gottfried Leibniz.

Nicku/Shutterstock.com

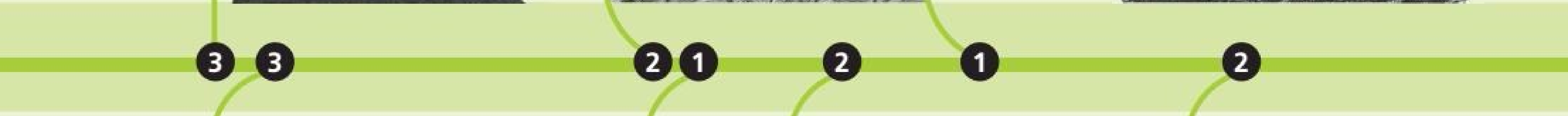
1702

Representação de funções

O século XVIII ficou conhecido como "Era das Luzes", uma vez que contou com o esplendor do Iluminismo. Os membros de tal corrente intelectual defendiam a tese de que a razão e o saber resolveriam os males da humanidade. Suas críticas, por sua vez, voltavam-se ao fanatismo, à ignorância e a outras características da sociedade europeia da Idade Moderna. No início do século, o estudioso suíço Jean Bernoulli (1667-1748) propôs o símbolo φ (x) para representar uma função de *x*. A partir dessa época, as funções elementares tornam-se comuns.


Jean Bernoulli foi uma figura de grande relevância para o estudo das funções.

Heritage Images/Getty Images



1662

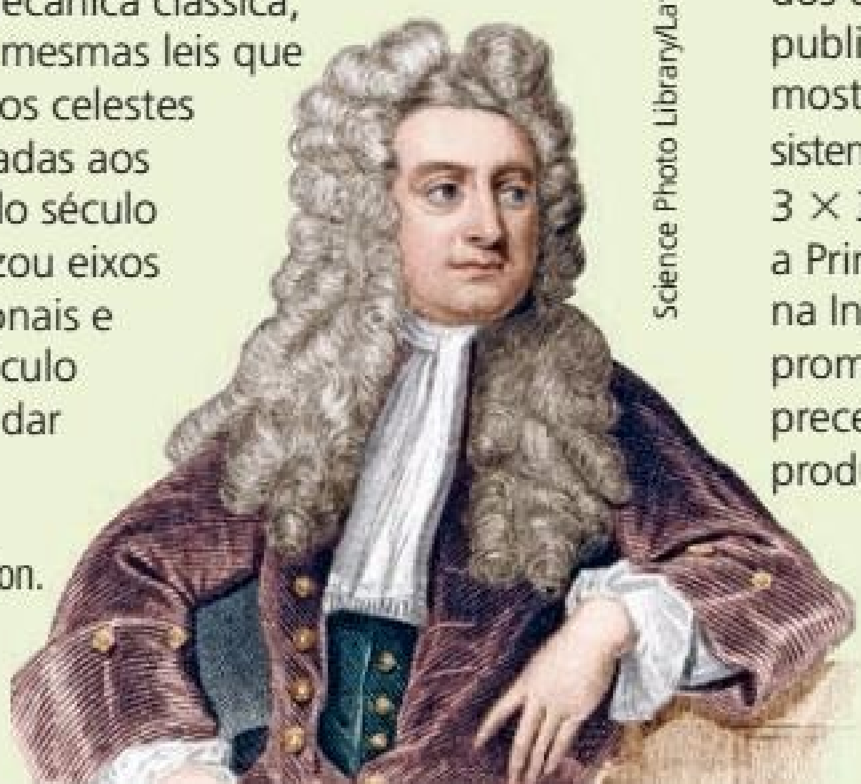
Estatística

O britânico John Graunt (1620-1674) elaborou métodos para analisar o censo populacional na Inglaterra, reunindo grande quantidade de dados sobre a população da época. Seu livro **Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality** apresentava tabelas sobre a expectativa de vida da população e marcou o início da Estatística moderna. O aumento exponencial da população europeia converteu-se em um assunto prioritário dos Estados modernos, interessados em utilizar o "capital" humano à disposição para atender a seus interesses políticos e econômicos. Já no século XVIII, o economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) criou uma teoria populacional alarmista. De acordo com sua pesquisa, a população mundial cresceria em um ritmo maior que a oferta de alimento. Entretanto, tal previsão não se concretizou ao longo do tempo.

Final do século XVII

Sistema cartesiano ortogonal

Sir Isaac Newton (1643-1727), considerado um dos maiores físicos da história, consagrou o processo de Revolução Científica. Ao longo de suas pesquisas, o famoso inglês fundamentou a Mecânica clássica, afirmando que as mesmas leis que governam os corpos celestes também são aplicadas aos objetos. No final do século XVII, Newton utilizou eixos cartesianos ortogonais e desenvolveu o Cálculo diferencial ao estudar diversas funções.


Sir Isaac Newton.

Science Photo Library/Latinstock

1700

Determinantes

Leibniz inventou uma operação com os elementos de uma matriz quadrada que ele chama de "resultado". É o mesmo número chamado, tempos depois, de "determinante".

1730

Determinantes

Colin Maclaurin (1698-1746), um matemático de origem escocesa, escreveu sua obra **Treatise on Algebra** contendo propriedades dos determinantes. Nessa publicação, Maclaurin havia mostrado a regra para resolver sistemas lineares 2 × 2 e 3 × 3. Anos depois, iniciou-se a Primeira Revolução Industrial na Inglaterra, fenômeno que promoveu uma mudança sem precedentes no processo de produção de mercadorias.

Meados do século XVIII

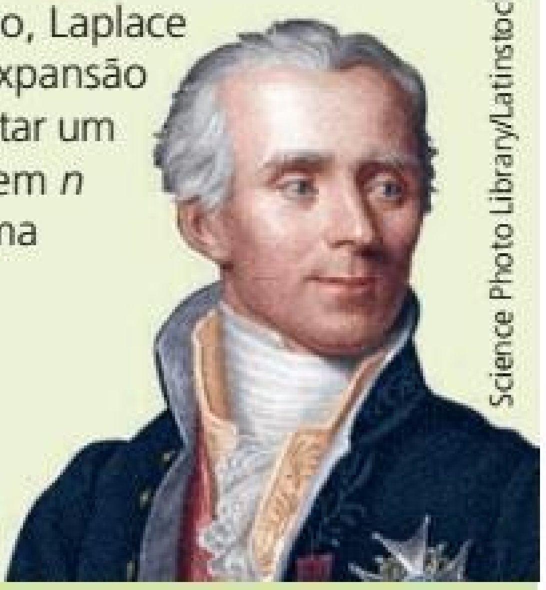
Sistemas lineares

Em 1750, o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) elaborou o método geral para a resolução de sistemas lineares com *n* equações e *n* incógnitas usando determinantes. Já em 1764, o estudioso francês Étienne Bézout (1730-1783) descobriu métodos para calcular determinantes grandes.

1772

Determinantes

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), intelectual francês que organizou a chamada Astronomia Matemática, publicou a **Teoria geral dos determinantes**. Por meio desse estudo, Laplace explicou a regra de expansão que permitiu representar um determinante de ordem *n* por meio de uma soma de determinantes de ordem $n-1$.



Representação artística do matemático francês Laplace.

Science Photo Library/Latinstock

① ③ ② ② **IDADE MODERNA**

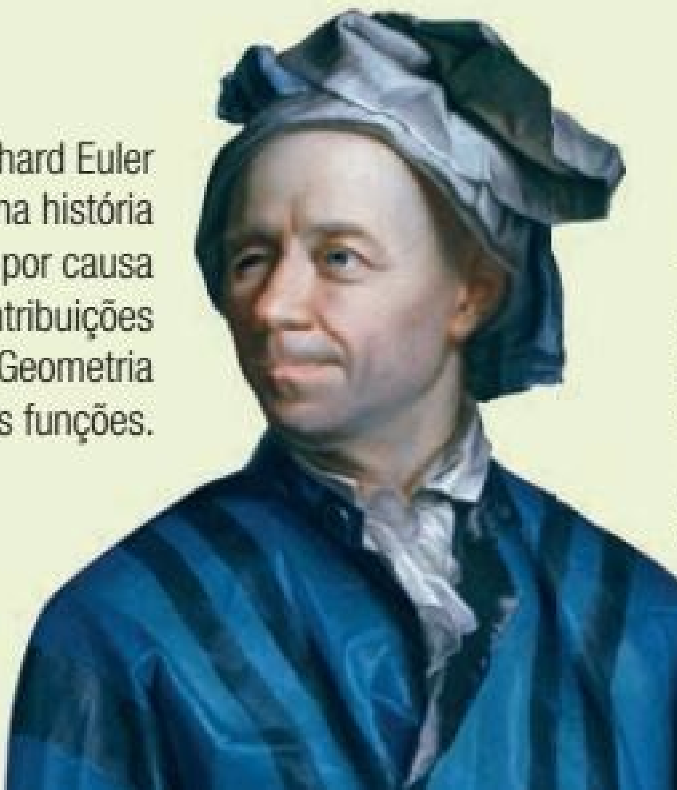
(1453-1789)

1748

Função exponencial e poliedros

O suíço germanófilo Leonhard Euler (1707-1783) descobriu que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$.

Em 1752, desenvolveu a fórmula dos poliedros convexos: A + 2 = F + V, em que *A* é o número de arestas, *F* é o número de faces e *V* é o número de vértices de um poliedro convexo.



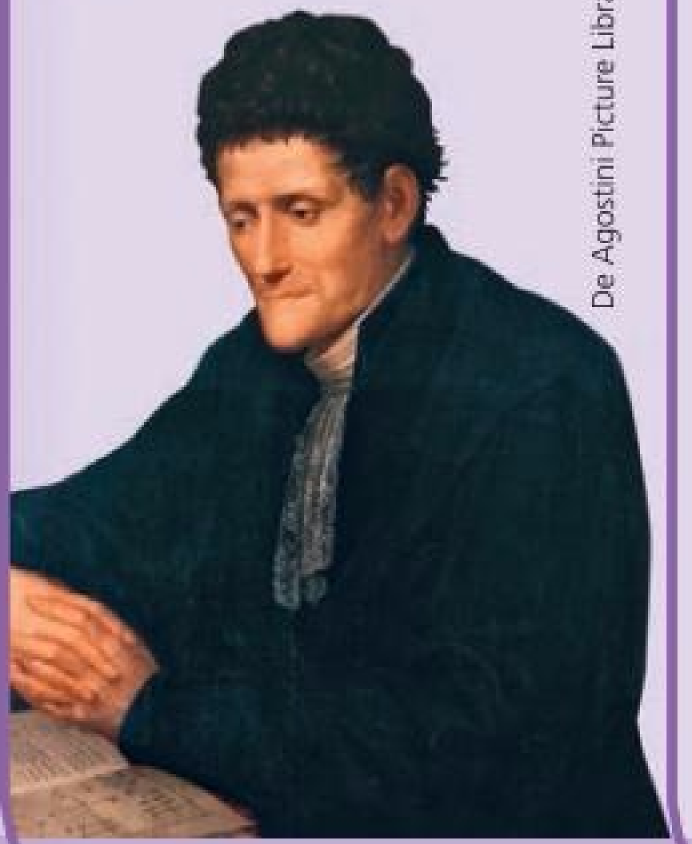
Leonhard Euler consagrou-se na história da Matemática por causa de suas contribuições no campo da Geometria espacial e das funções.

© Roger-Viollet/Glow Images

1807

Polinômios

O italiano Paolo Ruffini (1765-1882) produziu um livro de Álgebra elementar contendo o algoritmo da divisão de um polinômio p(x) por (x – a).



Paolo Ruffini foi um matemático de destaque na Álgebra elementar.

De Agostini Picture Library/Glow Images

1812

Matrizes e determinantes

Jacques Binet (1786-1856), matemático de origem francesa, descobriu a regra de multiplicação de matrizes e provou que "o determinante do produto de duas matrizes quadradas é o produto dos seus determinantes".

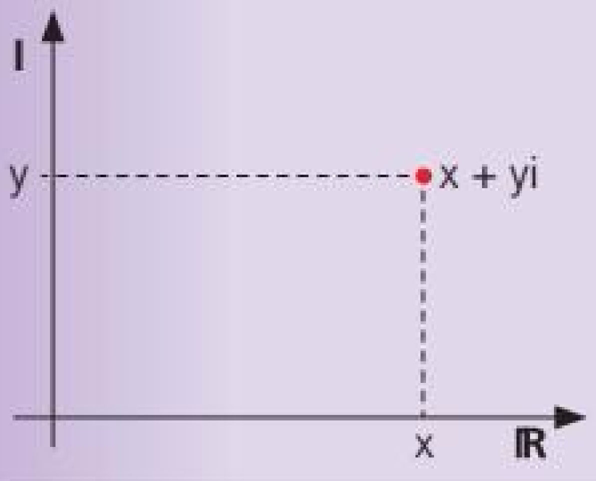
det (AB) = det A · det B

③ ③ ② ②

1806

Números complexos

No século XIX, os saberes científicos, notadamente as chamadas ciências exatas, galgaram uma importância incomparável na civilização europeia. Em tal contexto, o francês Auguste Comte (1798-1857) fundou o Positivismo, corrente de pensamento que defendia a inquestionabilidade do método científico, único instrumento capaz de promover a "ordem" e o "progresso" aos países evoluídos. No campo da Matemática, o suíço e matemático amador Jean-Robert Argand (1768-1882) teve a ideia de representar geometricamente os números complexos e criou o "Plano complexo".

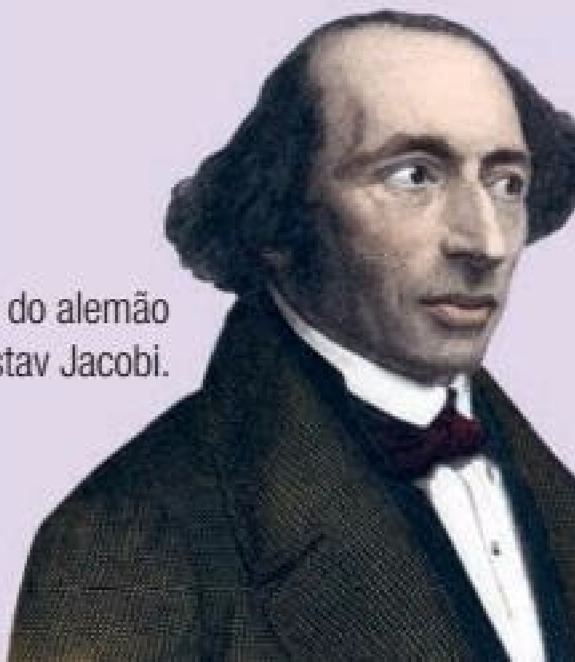


A linha do tempo não está representada em escala.

1841

Determinantes

O pensador alemão Carl Gustav Jacobi (1804-1851) lançou o livro **De determinantibus functionalibus** contendo diversas propriedades dos determinantes e aplicações em Cálculo diferencial.



Retrato do alemão Carl Gustav Jacobi.

Corbis Corporation/Fotoarena

Meados do século XIX

Matriz

Em 1850, o britânico James Sylvester (1814-1897) inventou a expressão "matriz" para representar um quadro retangular de números. Cinco anos depois, Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglês, descobriu métodos para calcular o que chamou de "matriz inversa" de uma determinada matriz.

1842

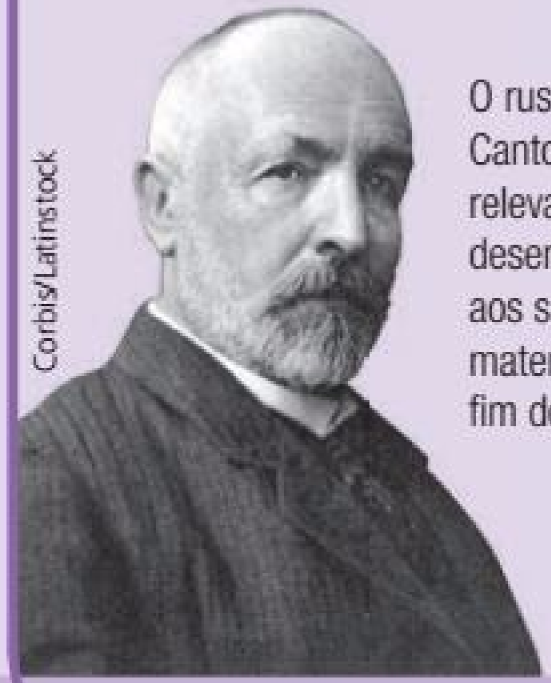
Determinantes

O matemático francês Pierre Sarrus (1798-1861) divulgou a regra para o cálculo do determinante 3 × 3, a qual foi universalmente adotada pelos estudantes.

1870

Conjuntos

Por volta de 1860, iniciou-se a Segunda Revolução Industrial, nova fase de aprimoramento da produção fabril. Em tal conjuntura, algumas invenções difundidas mundialmente foram criadas, como a locomotiva, o telefone, o telégrafo, o rádio e o cinema. Na segunda metade do século XIX, o russo Georg Cantor (1845-1918) e o estudioso alemão Richard Dedekind (1831-1916) começaram a desenvolver a **Teoria dos Conjuntos**. A grande dúvida era como tratar conjuntos com número infinito de elementos.


Corbis/Latinstock

O russo Georg Cantor promoveu relevante desenvolvimento aos saberes matemáticos no fim do século XIX.

Década de 1930

Nas pesquisas da Química, o alemão Werner Heisenberg (1901-1976) elaborou o princípio da incerteza: não se pode determinar de forma simultânea a posição e a velocidade das partículas atômicas.

Na década de 1930, a Matemática também vivenciou uma quebra de paradigmas. Kurt Gödel (1906-1978), um estudioso austríaco naturalizado estadunidense, demonstrou que o conjunto de preceitos que estruturam a Matemática é incompleto. Por meio do Teorema da Incompletude, assegurou que não se pode demonstrar nem a verdade nem a falsidade de algumas propriedades matemáticas.

Granger/Fotoarena

Kurt Gödel causou uma fissura nas certezas matemáticas ao fundar o Teorema da Incompletude.

② ② ①

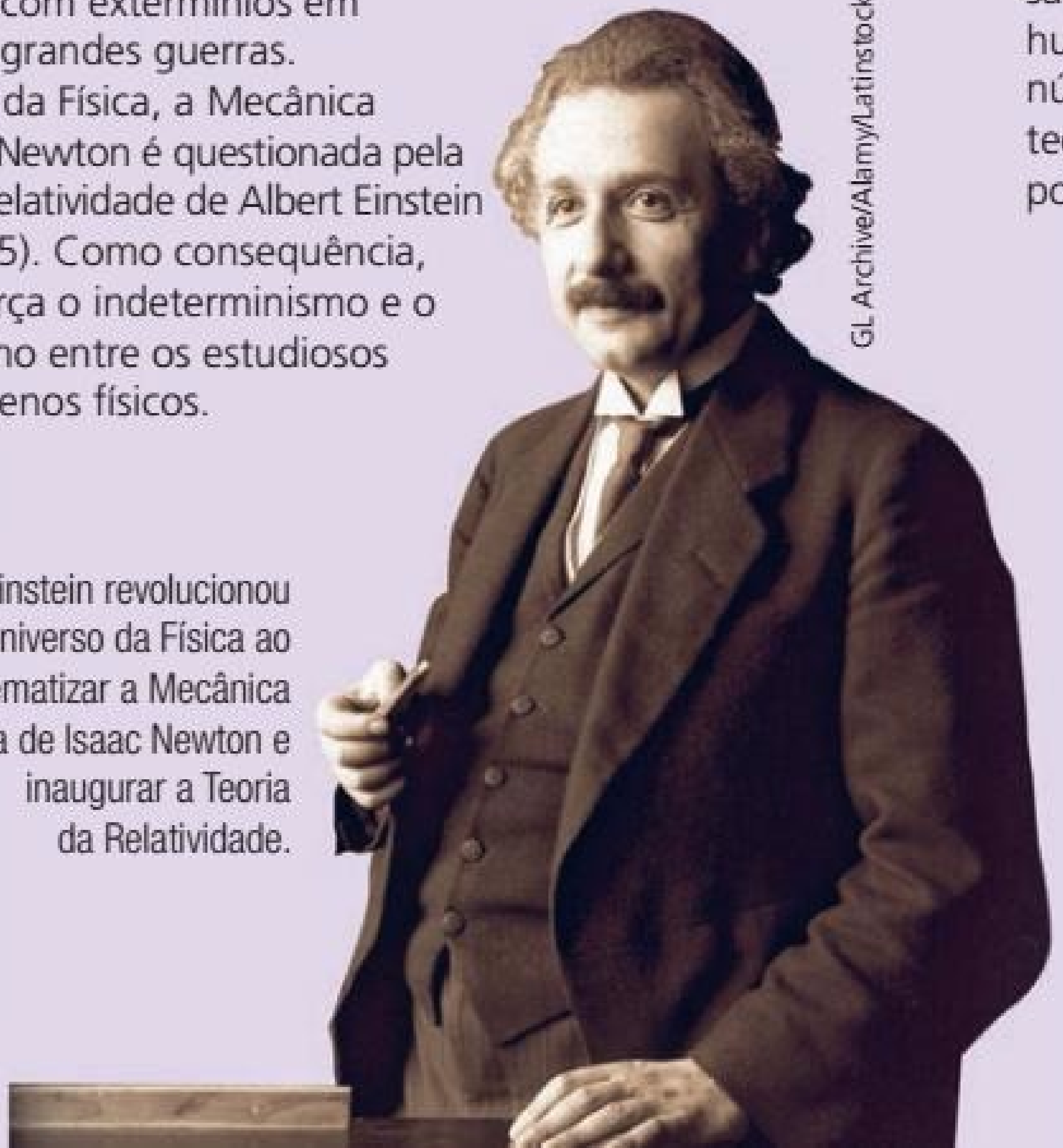
ERA CONTEMPORÂNEA

(1789-dias atuais)

Início do século XX

O entusiasmo quanto à suposta onisciência e onipotência da Ciência no século XIX deu lugar a um profundo sentimento de desesperança nas primeiras décadas do século XX, pois o primoroso desenvolvimento científico contribuiu com extermínios em massa nas grandes guerras.

No campo da Física, a Mecânica clássica de Newton é questionada pela Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879-1955). Como consequência, ganhou força o indeterminismo e o probabilismo entre os estudiosos dos fenômenos físicos.


GL Archive/Alamy/Latinstock

Albert Einstein revolucionou o universo da Física ao problematizar a Mecânica clássica de Isaac Newton e inaugurar a Teoria da Relatividade.

Meados do século XX e início do século XXI

O terceiro estágio da Revolução Industrial ocorreu nas últimas décadas do século XX e início do século XXI. Testemunha-se uma evolução em diversas áreas do saber, sobretudo nas telecomunicações, na robótica, na informática e na engenharia genética. Intelectuais e outras figuras ligadas ao conhecimento são conclamados a solucionar demandas criadas pela própria humanidade, caso da degradação ambiental. É crescente o número de pensadores que procuram questionar uma visão tecnicista do mundo, ao passo que valorizam uma postura científica mais humana, inclusiva e plural.

Michael D. Brown/Shutterstock.com

A robótica foi uma das áreas tecnológicas que conheceram grande impulso graças ao advento da Terceira Revolução Industrial.

Respostas

Unidade 1 – Trigonometria na circunferência

Capítulo 1 – Razões trigonométricas na circunferência

Exercícios propostos

1. a) $\frac{\pi}{3}$ rad   d) 200°

b) $\frac{7\pi}{6}$ rad   e) 9°

c) $\frac{3\pi}{8}$ rad   f) ≃229°18'

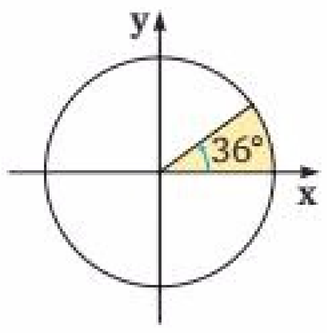
2. $\frac{5\pi}{6}$ rad   **3.** 0,5 rad

4. 197 cm   **5.** 51,4 cm

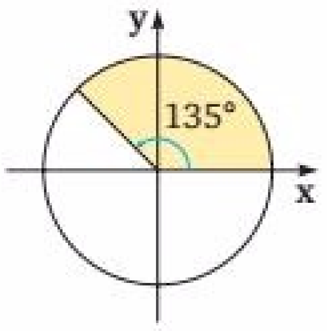
6. a) 22,5°; $\frac{\pi}{8}$ rad   b) 135°; $\frac{3\pi}{4}$ rad

7. $\frac{\pi}{6}$ m

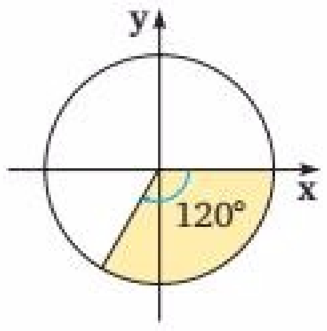
8. a) 36°



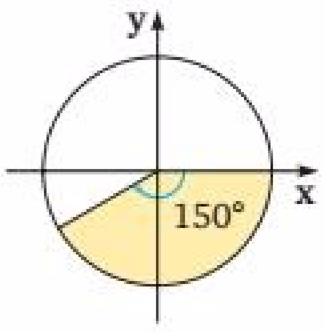
b) 135°



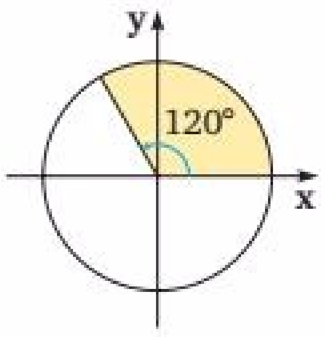
c) 120° sentido horário



d) 150° sentido horário



e) 120°



9. a) 63° + k360°, k ∈ $\mathbb{Z}$

b) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

10. a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

b) $\pi + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

c) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

d) $-\frac{3\pi}{2} - 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

11. a) Côngruos.   b) Não côngruos.

12. Sim.

13. a) 2º quadrante   c) 4º quadrante

b) 2º quadrante

14. a) 5 voltas: 1º quadrante

b) 3 voltas: 1º quadrante

c) 3 voltas: 3º quadrante

d) 6 voltas: 3º quadrante

e) 2 voltas: 3º quadrante

f) 1 volta: 1º quadrante

15. a) 110°; $\alpha = 110° + k \cdot 360°$, k ∈ $\mathbb{Z}$

b) 355°; $\alpha = 355° + k \cdot 360°$, k ∈ $\mathbb{Z}$

c) $\frac{7\pi}{4}$; $\alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

d) $\frac{5\pi}{3}$; $\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, k ∈ $\mathbb{Z}$

16. 104,67 cm

17. a) M = 60° ou M = $\frac{\pi}{3}$ rad

N = 150° ou N = $\frac{5\pi}{6}$ rad

P = 240° ou P = $\frac{4\pi}{3}$ rad

Q = 330° ou Q = $\frac{11\pi}{6}$ rad

b) A = 30° ou A = $\frac{\pi}{6}$ rad

B = 90° ou B = $\frac{\pi}{2}$ rad

C = 150° ou C = $\frac{5\pi}{6}$ rad

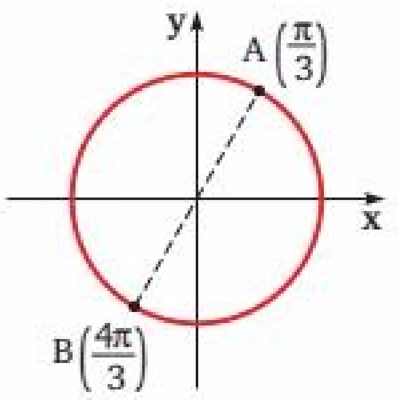
D = 210° ou D = $\frac{7\pi}{6}$ rad

E = 270° ou E = $\frac{3\pi}{2}$ rad

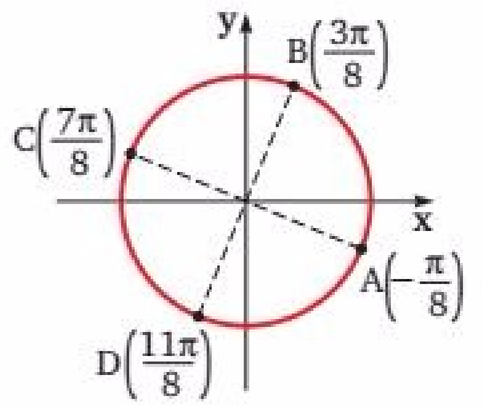
F = 330° ou F = $\frac{11\pi}{6}$ rad

18. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi + k \in \mathbb{Z}$

19. a)

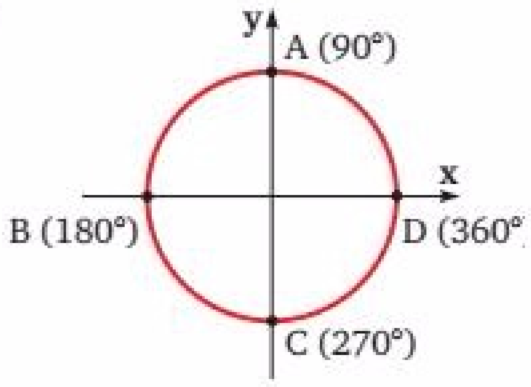

y
A $\left(\frac{\pi}{3}\right)$
x
B $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

b)

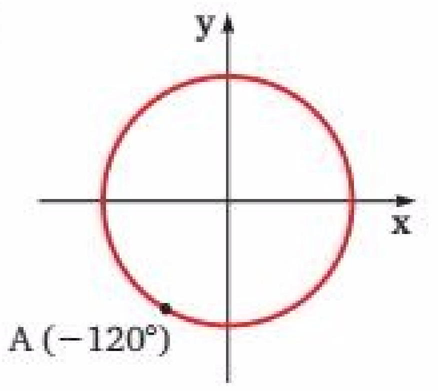

y
B $\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
C $\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
x
A $\left(-\frac{\pi}{8}\right)$
D $\left(\frac{11\pi}{8}\right)$

Ilustrações: Editoria de arte

c)


y
A (90°)
x
B (180°)
D (360°
C (270°)

d)



20. a) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 0

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

21. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$.   d) $\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$.   e) $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22. V–V–F.

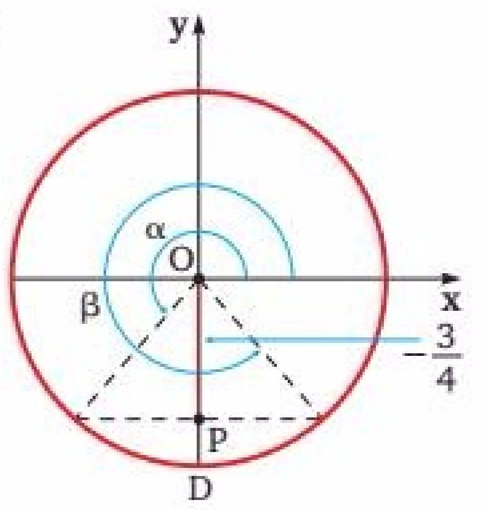
23. a) 4   b) −4

24. a) 2 sen α   c) cos α

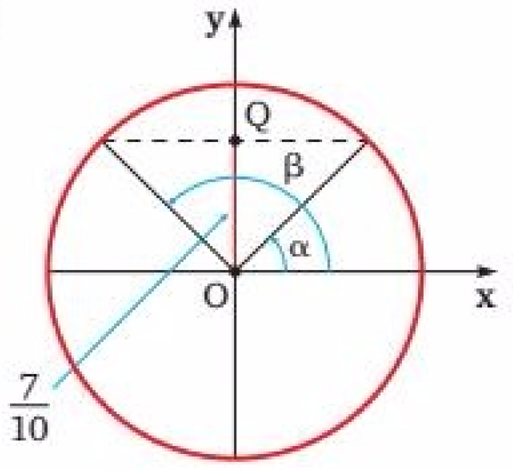
b) – sen α – cos α

25. a) 1º quadrante.   b) 2º quadrante.

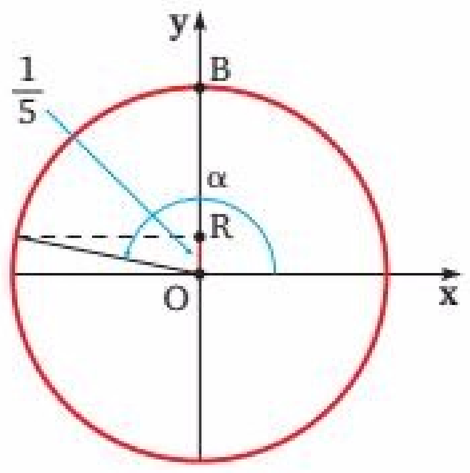
26. a)


y
α
O
β
x
$-\frac{3}{4}$
P
D

b)


y
Q
β
α
O
x
$\frac{7}{10}$

c)



27. sen $\frac{\pi}{7}$; sen $\frac{\pi}{5}$; cos $\frac{\pi}{5}$; cos $\frac{\pi}{7}$

28. $-\frac{3}{2}$ **29.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

30. $\frac{3}{2}$ **31.** 0 **32.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **33.** $z = 1$

34. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sqrt{3}$ d) 1 f) $\sqrt{3}$

35. Alternativa **b**.

36. a) $-2\,\text{tg}\,\alpha$ b) 0

37. 0 **38.** $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ **39.** $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$

40. tg 1 **41.** -1

42. a) 1 b) $-\sqrt{3}$

43. $m = 15$

44. $\left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3\right\}$

45. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

46. a) 0,97 c) 0,26 e) 3,73
b) 0,26 d) 0,27

47. a) $-\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4}$

48. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{15}$

49. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \pm\sqrt{1-p^2}$;
$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pm\sqrt{1-p^2}}{p}$

50. Alternativa **b**. **51.** 2 **52.** $a = 2$

53. $m = -1$ ou $m = 2$ **54.** $-\frac{1}{5}$

55. a) 3º quadrante c) 2º quadrante
b) 3º quadrante

56. a) 0 d) Não existe.
b) Não existe. e) Não existe.
c) $\sqrt{3}$ f) 1

57. a) e b) Demonstração.

58. a) 2 d) -1 g) $\sqrt{2}$
b) 2 e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ h) -1
c) $-\sqrt{2}$ f) Não existe.

59. $\frac{1}{2}$ **60.** $\left\{m \in \mathbb{R} \,|\, m \geq -\frac{1}{2}\right\}$

61. $\{k \in \mathbb{R} \,|\, 2 < k < 5\}$

62. a) $\left\{m \in \mathbb{R} \,|\, 0 < m \leq \frac{1}{3}\right\}$
b) $\{m \in \mathbb{R} \,|\, m \leq -4 \text{ ou } m \geq 0\}$

63. a) sec α b) cotg² α

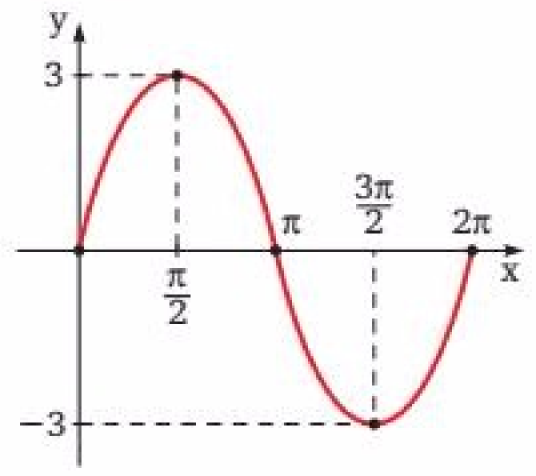
64. 1 **65.** $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

66. a) Resposta pessoal.
b) O Espectro da frequência ou timbre.
c) 70Pa; Pressão nula; −A
d) Resposta pessoal.

Capítulo 2 – Funções trigonométricas

Exercícios propostos

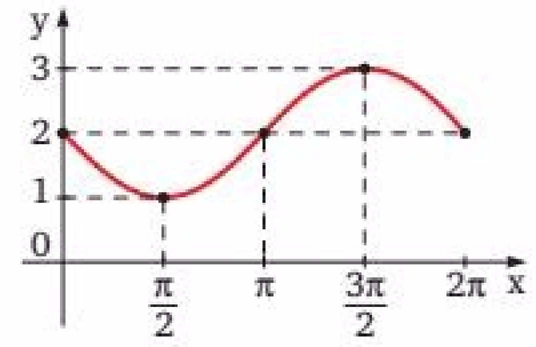
1. a)



Ilustrações: Editoria de arte

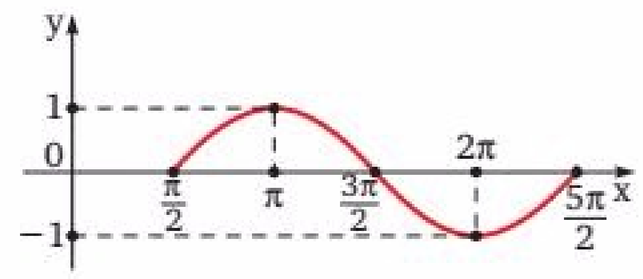
$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 3]$
$p = 2\pi$

b)



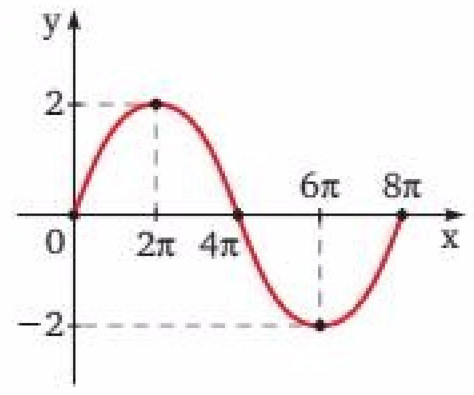
$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 3]$
$p = 2\pi$

c)



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = 2\pi$

d)



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 8\pi$

2. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{5}$

3. $Im = [-7, 7]$

4. a) $p = \frac{\pi}{3}$ b) $p = 8$

5. a) valor máximo: 4; valor mínimo: −4.
b) valor máximo: 7; valor mínimo: 3.
c) valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$.

6. $S = \{m \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq m \leq 1\}$

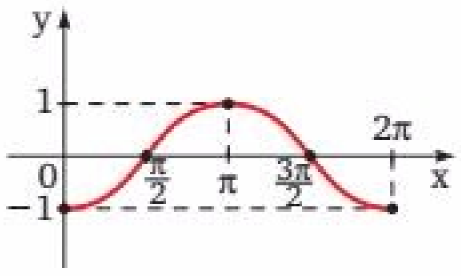
7. Alternativa **a**. **8.** Alternativa **b**.

9. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6}\right\}$

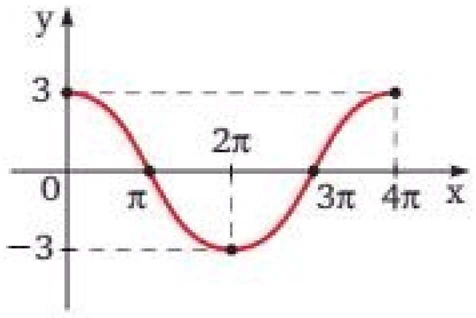
10. Alternativa **d**. **11.** Alternativa **e**.

12. Alternativa **c**. **13.** Alternativa **e**.

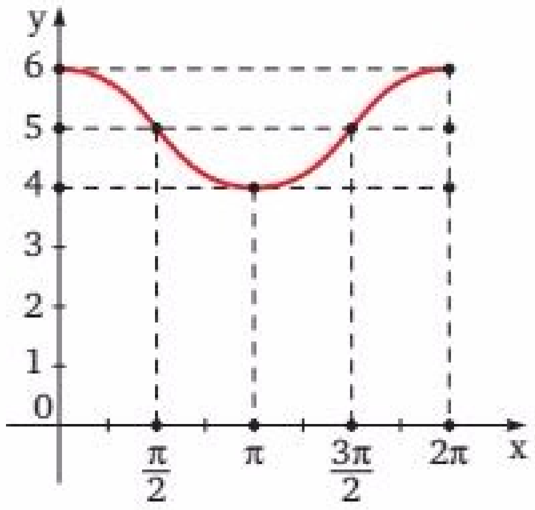
14. a)



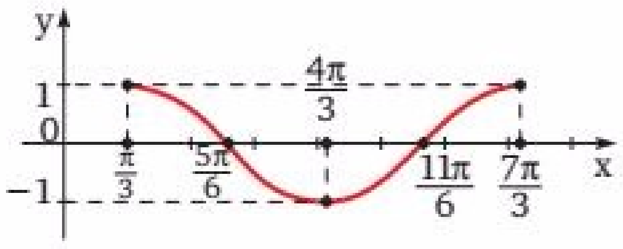
b)



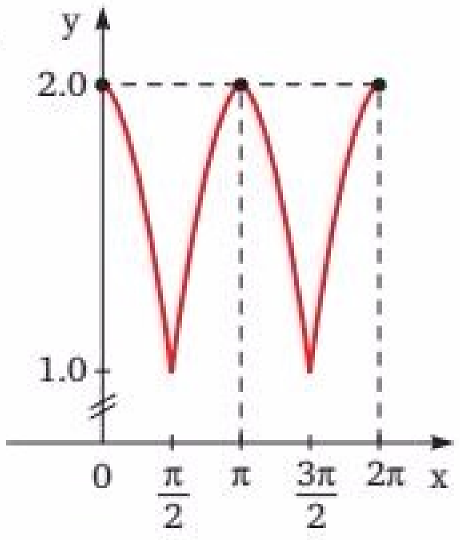
c)



d)



15.



16. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{7\pi}{2}$ d) 8π

17. $m = 4$

18. a) valor máximo: 4; valor mínimo: −4.
b) valor máximo: 7; valor mínimo: 3.
c) valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$.

19. 5

20. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq m \leq -1$ ou $1 \leq m \leq \sqrt{2}\}$

21. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leq m \leq 0\}$

22. a) $p = 5\pi$ b) $p = \pi$

23. -20

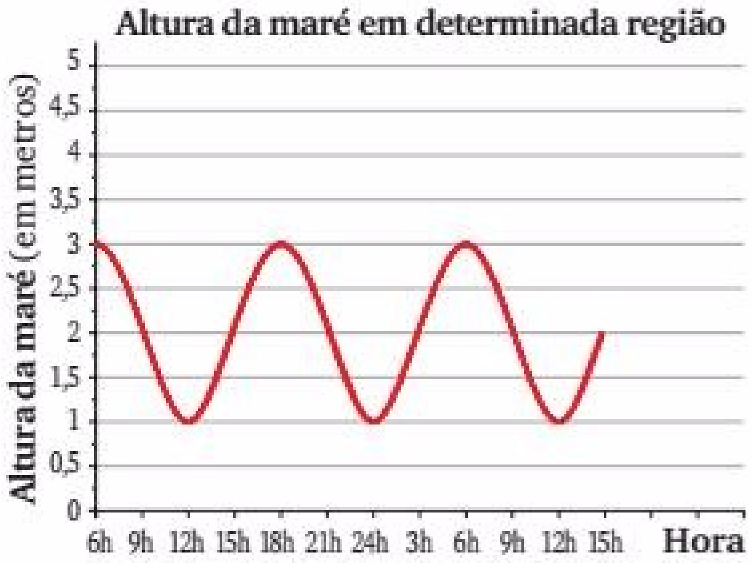
24. a) $\frac{1}{2}$ b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

25. a) Lua e Sol, secundariamente.

b) Resposta pessoal.

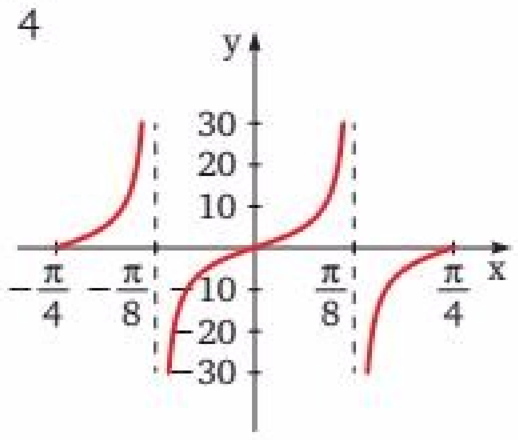
c) Função seno ou cosseno.

d)



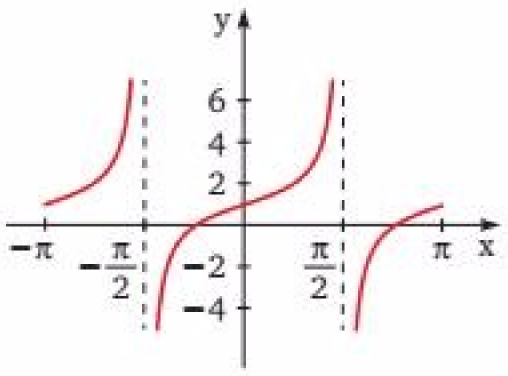
$f(x) = 2 + \cos(\pi x)$

26. $T = \frac{\pi}{4}$

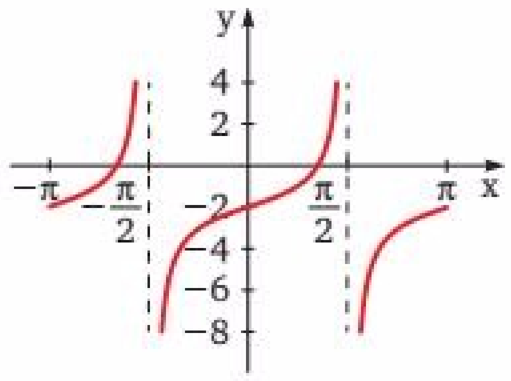


Ilustrações: Editoria de arte

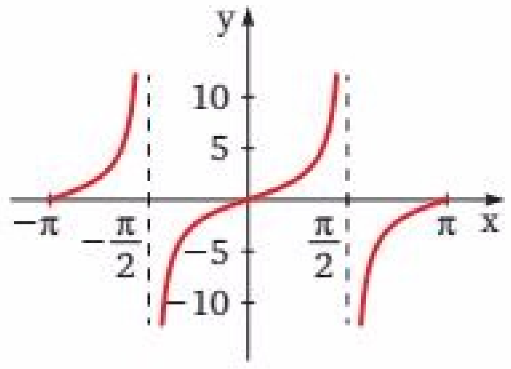
27. a)



b)



c)



28. Deslocar a função, alterar a concavidade e o domínio da função.

29. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 30° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 27° + k \cdot 36°, k \in \mathbb{Z}\}$

30. 3π

31. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. $\{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leq m \leq 3\}$

33. a) $p = \pi$

$y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $p = \frac{\pi}{2}$

$y = \text{tg}\, 2\pi$

34. $\left\{a \in \mathbb{R} \mid a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3\right\}$

35. $\text{sen}\, 105° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

$\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

36. $\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

$\text{sen}\, 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

37. a) Demonstração. b) Demonstração.

38. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

39. a) Demonstração. b) Demonstração.

40. $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$

41. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $-2 - \sqrt{3}$

42. a) 0,78 b) 0,21

43. $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$

44. a) 0,59 b) 0,81 c) 0,73

45. $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$

46. a) $2 \cdot \text{sen}\, 3x \cdot \cos x$

b) $2 \cdot \text{sen}\, 2x \cdot \cos 3x$

c) $\sqrt{2} \cdot \cos 10°$

47. a) $\cos \frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

48. a) $2 \cdot \text{sen}\, \frac{2x + m}{2} \cdot \cos \frac{m}{2}$

b) $2 \cdot \text{sen}\, \frac{m}{2} \cdot \cos \frac{2x + m}{2}$

49. a) $2 \cdot \text{sen}\, 55° \cdot \cos 35°$

b) $-2 \cdot \text{sen}\, 220° \cdot \text{sen}\, 140°$

50. $-\frac{\cos 55°}{\cos 15°}$

51. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

52. a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ d) $S = \{\pi\}$

53. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

54. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

55. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

56. $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ **57.** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

58. $\simeq 0{,}0014$ s **59.** 0 **60.** 15

61. $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

62. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

63. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

64. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

65. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

66. $S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

67. a) Demonstração. b) Demonstração.

68. a) Demonstração. b) Demonstração.

69. Demonstração.

70. Demonstração.

71. Demonstração.

72. Demonstração.

73. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

74. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right\}$

b) $S=\left\{x\in \mathbb{R} \mid 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2\pi\right\}$

c) $S=\left\{x\in \mathbb{R} \mid 0\leqslant x<\frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}\right.$

$\left.\text{ou } \frac{11\pi}{6}<x\leqslant 2\pi\right\}$

d) $S=\left\{x\in \mathbb{R} \mid 0\leqslant x<\frac{\pi}{4} \text{ ou}\right.$

$\left.\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4}<x\leqslant 2\pi\right\}$

75. $S=\left\{x\in \mathbb{R} \mid 0+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou}\right.$

$\frac{5\pi}{6}+2k\pi<x\leqslant 2k\pi \text{ e}$

$\left.x\neq \frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbb{Z}\right\}$

76. $S=\left\{x\in \mathbb{R} \mid 0<x<\frac{\pi}{6} \text{ ou}\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}<x<2\pi\right\}$

77. $S=\left\{x\in \mathbb{R} \,\middle|\, 0<x<\frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi<x<\frac{5\pi}{4}\right\}$

78. Alternativa **d.**

Exercícios complementares

1. 6π metros

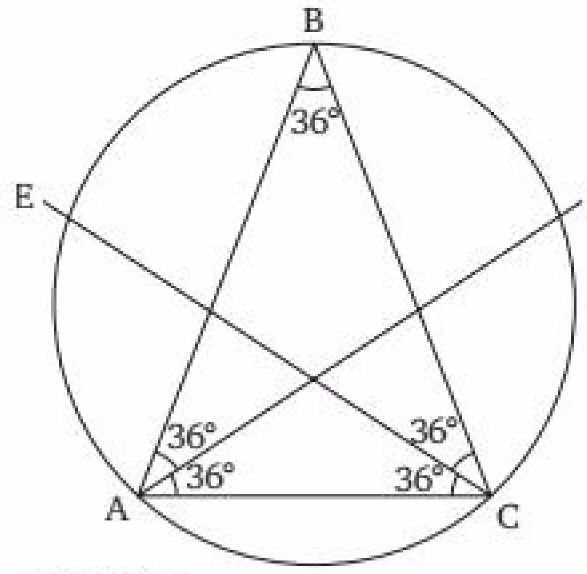
2. Alternativa **d.**

3. Alternativa **d.**

4. $\frac{\pi}{2}$ rad

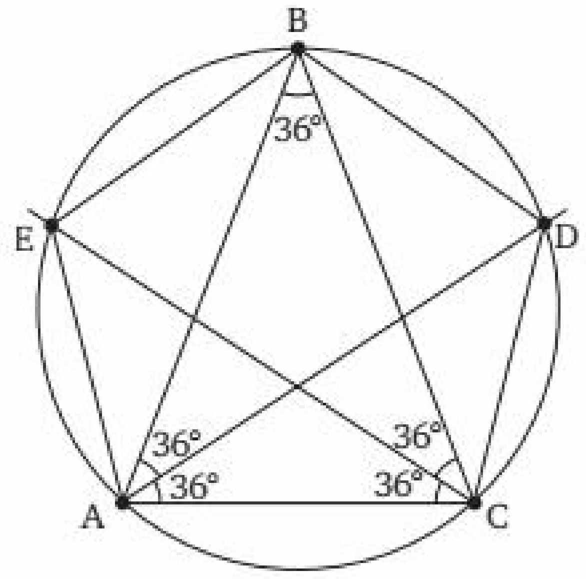
5. a) 2π m b) 13 voltas.

6. a)



b) ≃ 2 512 m

c) ≃ 11 800 m



Ilustrações: Editoria de arte

7. a) sen 830°
b) cos 190°

8. Alternativa **d.**

9. Alternativa **e.**

10. Alternativa **d.**

11. $A=\sqrt{3}, B=-\sqrt{3}, C=0, D=\sqrt{3}, E=-\sqrt{3}, F=0$

12. Alternativa **e.**

13. Alternativa **d.**

14. 10 m

15. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. Alternativa **e.**

17. Alternativa **d.**

18. Alternativa **a.**

19. a) sen x b) $\frac{\text{sen } t-4}{\text{sen } t-2}$

20. a) 3,2 b) t = 12 ou t = 24

21. V – V – V – F – F

22. a) 1 840 bilhões de dólares.
b) 800 bilhões de dólares.

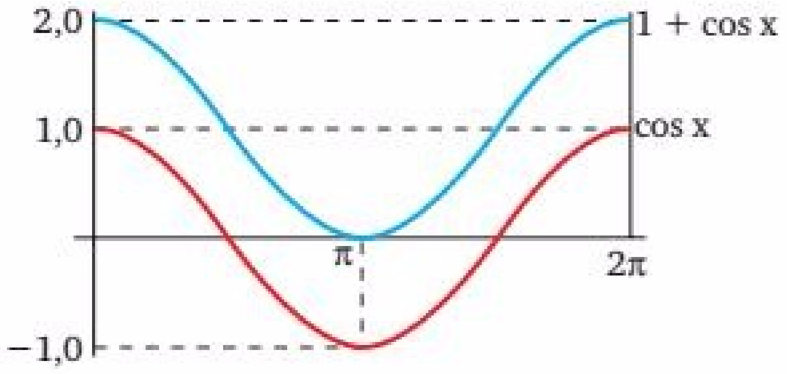
23. Alternativa **a.**

24. Alternativa **d.**

25. x = 8 e 19 quilogramas.

26. a) BC = 2,4 m b) h = 1,6 m

27.



28. Alternativa **e.**

29. Alternativa **c.**

30. AC = 18,8 km

31. a) θ = 30°; d = 6 400 km
b) $\frac{3}{8}$

32. Alternativa **c.**

33.

$$S=\left\{x\in \mathbb{R} \,\middle|\, x=k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbb{Z}\right\}$$

34. a) Demonstração. c) Demonstração.
b) Demonstração.

35. $\frac{\pi}{3}$

36. Alternativa **c.**

37. Alternativa **d.**

38. Alternativa **a.**

39. 01 + 02 = 03

40. Alternativa **d.**

41. F – V – V – V – F

Unidade 2 – Matrizes, determinantes e sistemas lineares

Capítulo 3 – Matrizes

Exercícios propostos

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

2. a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. a) $A=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 4 & 3 & 32 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) 2ª linha b) 107ª coluna.

5. Alternativa **a.**

6. Alternativa **b.**

7. As matrizes *A* e *B* são quadrados mágicos.

8. a) $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $I_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Zero.

10. a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

11. Alternativa **b.**

12. a) Sim. b) Não.

13. Alternativa **a.**

14. a = −5; b = 1; c = 5; x = 5; y = 4; z = −3

15. x = −3; y = 5; z = ± 9

16. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

18. a), b) c) e d) Demonstração.

19. a) $A+B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & 13 \end{bmatrix}$

b) $B-A=\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

20. 4

21. m = 5; n = 2; p = 2; q = −1

22. $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

23. x = 1 e y = −1

24. a) $A = \begin{bmatrix} 340 & 410 \\ 105 & 87 \\ 96 & 134 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 180 & 152 \\ 64 & 36 \\ 113 & 88 \end{bmatrix}$

b) $C = A + B = \begin{bmatrix} 520 & 562 \\ 169 & 123 \\ 209 & 222 \end{bmatrix}$

25. a) $2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

b) $-3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -18 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $3A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & 24 \\ 2 & 17 & 8 \end{pmatrix}$

26. Demonstração.

27. $x = -2$

28. a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -26 & 20 & -22 \end{bmatrix}$

29. a) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{33}{2} & -2 \\ \frac{23}{2} & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

30. a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

31. $x = 4$; $y = 8$; $z = -3$; $m = 0$

32. $x = \pm 2$ **33.** Demonstração.

34. $x = 4$; $y = 1$; $z = 5$.

35. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **37.** $C_{31} = 0$

38. a) $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

39. Não.

40. Alternativa **e**.

41. $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

42. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$

43. $a = 2$

44. a) A: R$ 32 000,00; B: R$ 8 000,00

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}15 & 0{,}30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ R \cdot C \end{bmatrix}$

45. Alternativa **c**.

46. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

b) Não é invertível.

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$

48. Demonstração. **49.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$

50. $X = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

52. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -2 \\ \frac{5}{6} & -4 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

54. $p + q = 0$ **55.** Alternativa **a**.

56. a) Corresponde a uma mensagem incompreensível, utilizando um determinado conjunto de técnicas.

b)

-

E	S	T	U	D	A	N	D	O		M	A	T	R	I	Z	E	S
5	19	20	21	4	1	14	4	15	29	13	1	20	18	9	26	5	19

;

- $\begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 14 & 4 & 15 \\ 29 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \end{bmatrix}$;
- $\begin{bmatrix} 140 & 46 & -15 & 79 & 86 & 44 & 116 & 21 & 80 \\ -77 & -1 & 37 & -18 & -26 & -25 & -50 & -7 & -27 \end{bmatrix}$;
- $M = A^{-1} \cdot C$;
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$;
- $\begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 14 & 4 & 15 \\ 29 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \end{bmatrix}$;
- Estudando matrizes.

c) Resposta pessoal.

Capítulo 4 – Determinantes

Exercícios propostos

1. a) 14 c) 11
b) 26 d) 10

2. a) -3 c) 12
b) -39 d) -3

3. a) $S = \{5\}$ c) $S = \{-1, 4\}$
b) $S = \{0, 5\}$ d) $S = \{-2, 2\}$

4. $S = \{-7, 2\}$ **5.** 37

6. 22 **7.** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

8. $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ **9.** $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$

10. $x = -\frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$ **11.** $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$

12. Demonstração.

13. a) 15 b) 0 c) -11

14. 18

15. a) $S = \{-1\}$ b) $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

16. 93 **17.** $k = 0$

18. $-\frac{3}{4}$ **19.** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ **20.** -3

21. $f(x) = 0$, para $x = 0$ ou $x = 1$
$f(x) > 0$, para $x < 0$ ou $x > 1$
$f(x) < 0$, para $0 < x < 1$

22. $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$

23. a) 921 600 *pixels*
b) 49 315 *pixels*^{2}
c) Resposta pessoal.

24. a) det = 0 c) det = 0
b) det = 0 d) det = 0

25. a) 2 b) 1 c) 1

26. $\det B = 2 \cdot \det A$.

27. 36 **28.** 9 **29.** 3,5

30. a) 0 b) 120

31. a) 0 c) 0
b) 0

32. -8 **33.** $S = \{-1\}$

34. a) $\frac{257}{16}$ b) 1

35. Alternativa **c**.

36. Alternativa **c**. **37.** 64

38. Alternativa **b**. **39.** Alternativa **b**.

Capítulo 5 – Sistemas lineares

Exercícios propostos

1. Alternativa **a**.

2. $(0, -3)$ e $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

3. a) É solução.
b) Sugestão de resposta: (3, 2, 0)

4. Não. **5.** $m = -\frac{10}{3}$

6. $m = 2$ ou $m = -2$ **7.** Demonstração.

8. Alternativas **b** e **d**.

9. É solução.

10. Sim, (4, 3).

11. 325 km de motocicleta e 225 km de automóvel.

12. $S = \{(10, 5)\}$

13. $S = \{-2, 1\}$.

14. a) Possível e determinado.
b) Impossível.
c) Possível e indeterminado.

15. $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -9\}$

16. $k = 10$

17. $a = 10$ e $b = 3$.

18. Alternativa **b**.

19. a) Capacidade superior de transporte de passageiros.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
d) 100 ônibus e 15 000 carros.

20. a) É solução.
b) Não é solução.

21. a) $S = \{(0, -5, -5)\}$ → Sistema possível e determinado
b) $S = \{\ \}$ → Sistema impossível
c) $S = \{(-\alpha, \alpha, 0); \alpha \in \mathbb{R}\}$ → Sistema possível e indeterminado
d) $S = \{(1, 2, -2)\}$ → Sistema possível e determinado

22. Alternativa **e**.

23. Alternativa **c**.

24. R$ 800,00.

25. Alternativa **a**.

26. a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

27. a) $\begin{cases} 2a - 5b = -4 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4m + n = 1 \\ 3m + 5n - 2p = 2 \\ m + 6p = 3 \end{cases}$

28. $S = \left\{\left(\dfrac{30}{41}, \dfrac{7}{41}\right)\right\}$

29. $x = -2$, $y = 3$ e $z = 0$

30. $i_1 = -3{,}5$; $i_2 = 6{,}25$ e $i_3 = 2{,}75$

31. 7

32. $\begin{cases} 8x + 9y + 10z = 93 \\ 9x + 9y + 7z = 80 \\ 8x + 8y + 7z = 75 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 80 \\ 75 \end{bmatrix}$

33. $x = 2$, $y = 1$ e $z = 0$

34. Alternativa **c**.

35. a) $S = \{(10, 20)\}$.
b) $S = \{(-12, 7, 3)\}$.
c) $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$
d) $S = \varnothing$

36. a) $S = \left\{\left(\dfrac{13 - \lambda}{2}, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

b) $S = \left\{\left(\lambda, \dfrac{-8 + 4\lambda}{5}\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

37. a) $S = \varnothing$
b) $S = \{(-7, -2, 2)\}$

38.
$S = \left\{\left(\dfrac{5t}{2} + 5, \dfrac{-19t - 20}{6}, \dfrac{t + 2}{6}, t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

39. a) $\{(1, -2)\}$
b) $S = \{(3, -2, 2)\}$
c) $S = \{(40 + 7b, -2b - 9, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$
d) $\varnothing$
e) $S = \{(0, 0, 0)\}$
f) $S = \left\{\left(\dfrac{14 - a}{7}, \dfrac{4a + 7}{7}, a\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$

40. a) $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$
b) $S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

41. $t = 8$

42. $S = \{(5, 6, 7, 8)\}$

43. $a = -6$

44. $a = 6$ e $b = 8$

45. a) SPD, $S = \{(1, 2)\}$
b) SI, $S = \varnothing$
c) SPI, $S = \{(4 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

46. SPD para qualquer *m* real.

47. a) SPD se $m \neq -1$ e SI se $m = -1$
b) SPD se $k \neq 1$ e SI se $k = 1$

48. $\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 2 \text{ e } a \neq -2\}$

49. $\{p \in \mathbb{R} \mid p \neq -1\}$

50. $k = 1$ ou $k = 15$

51. $k \neq 5$

52. $m = \dfrac{3}{4}$ e $k = -6$

53. $m \neq 1$ e $m \neq -2$

54. $m \neq 10$ (SPD)
$m = 10$ (SI)

55. a) $\{(1, 2)\}$
b) $\{(1, 2, 3)\}$

56. O sistema é possível e determinado.

57. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

58. a) $a = -0{,}1$; $b = 1$ e $c = 1{,}1$
b) 11 m

59. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $D_A = 6 - 3c$
b) $c \neq 2$

60. a) SPI
b) SPD

61. $a = 0$ ou $a = 1$

62. $m = \dfrac{3}{13}$

63. $a = -4$ ou $a = 1$

Exercícios complementares

1. a) 3 unidades
b) 33 unidades

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A^1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} & \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

4. a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Alternativa **e**.

6. 94

7. $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

8. a) $\begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix}$

b) $x = 0$ e $x = 2\pi$

9. a) $X = A^{-1} \cdot (C - B)$
b) $X = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$

10. a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4096 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. Alternativa **d**.

12. $S = \{5\}$

13. $S = \{0, 5\}$

14. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

15. $S = \{0, 2\}$

16. -2, 0 ou 2

17. Alternativa **e**.

18. Alternativa **a**.

19. $x = 4$

20. Há várias respostas possíveis.

21. $a \neq -1$

22. $a = 0$ e $b = 1$

23. $x = 19$ e $y = -10$

24. $S = \{(-1, 1)\}$

25. 7

26. Alternativa **b**.

27. Alternativa **e**.

28. Alternativa **c**.

29. Alternativa **c**.

30. Alternativa **e**.

31. SPI, $S = \left\{\left(\lambda + \dfrac{9}{5}, -\dfrac{2}{5} + \lambda, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

32. $S = \left\{\left(-\dfrac{\lambda}{2}, 4 + \lambda, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

33. $S = \{(2, 1, -3)\}$

34. Alternativa **b**.

35. Alternativa **a**.

36. a) $S = \left\{\left(\dfrac{13}{4}, \dfrac{7}{8}\right)\right\}$

b) $m \neq -\dfrac{4}{3}$

37. Alternativa **d.**

38. 01 e 02

39. $a = -2$ ou $a = 1$

40. Beatriz.

41. $x = 4$ e $y = 2$

42. Alternativa **c.**

43. Alternativa **a.**

44. 0

45. Alternativa **d.**

46. a) $a = 0$, $b = 2$ e $c = -1$.
b) $c = 0$ e $d = -4$.

47. Alternativa **a.**

48. Alternativa **a.**

49. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

50. $m = 2$ ou $m = -1$

51. $\lambda = 2$

52. Alternativa **c.**

Unidade 3 – Geometria plana e espacial

Capítulo 6 – Áreas

Exercícios propostos

1. 8 200 cm²

2. 48 m²

3. 11 azulejos.

4. $5\sqrt{2}$ cm

5. 32 cm²

6. Aumenta 44%

7. 12

8. Alternativa **d.**

9. Alternativa **e.**

10. a) i) Não.
ii) São Paulo e Piauí.
b) i) Sim, este recurso pode ser utilizado.
ii) 16 944, ou seja, 183 km² equivalem a 16 944 campos de futebol, aproximadamente.

11. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm²
b) 18 cm²

12. 32,4 m²

13. R$ 188 160,00

14. $\frac{255\sqrt{3}}{4}$ dm²

15. $25\sqrt{3}$ cm²

16. $\sqrt{145}$ dm

17. $\frac{30}{11}$ cm²

18. a) 2 cm
b) $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 30°$
c) $\sqrt{3}$ cm
d) $\sqrt{3}$ cm²

19. $600\sqrt{3}$ cm²

20. $96\sqrt{3}$ cm²

21. $12\sqrt{5}$ cm²

22. Alternativa **b.**

23. Alternativa **c.**

24. a) 64 cm²
b) 1 200 cm²

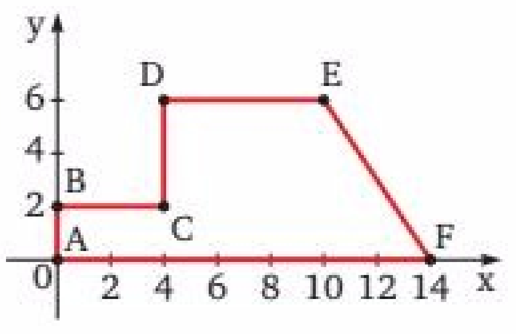
25. $\frac{17}{3}$ m

26. a) 1 950 m²
b) R$ 5 850 000,00

27. a) $8\sqrt{3}$ m²
b) 18 cm²

28. $24\sqrt{3}$ cm²

29. a)



Editoria de arte

b) 56 cm²

30. 439,2 m²

31. $(144 + 2\sqrt{905})$ cm

32. $480\sqrt{3}$ cm²

33. 20 dm

34. $28{,}125\pi$ m²

35. 16π m²

36. 75π cm²

37. 75π cm²

38. 628 cm²

39. R$ 50 253,00

40. $\frac{\pi}{3}$ u. a.

41. Alternativa **a.**

42. Alternativa **b.**

43. Alternativa **e.**

44. a) 200 cm²
b) $600\sqrt{3}$ cm²

45. 216 dm²

46. 10,38 cm²

47. 859,5 cm²

48. $27\sqrt{3}$ cm²

49. a) $2\sqrt{3}$ cm
b) $\sqrt{3}$ cm

50. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{1}{2}$

51. a) 12 cm
b) $216\sqrt{3}$ cm²

52. $54\sqrt{3}$ cm²

53. Falsa.

54. Alternativa **e.**

55. Alternativa **d.**

56. Alternativa **d.**

Capítulo 7 – Geometria espacial de posição

Exercícios propostos

1. a) Um plano contém infinitas retas.
b) Uma reta divide um plano em dois semiplanos.
c) Espaço é o conjunto de todos os pontos.
d) No espaço existem infinitas retas e infinitos planos.
e) Sim.

2. a) Infinitos.
b) Um plano pode ser determinado: por três pontos não colineares; por uma reta e um ponto fora dela; por duas retas concorrentes e por duas retas paralelas.
c) Quando não estiverem alinhados.
d) Sim.
e) Quatro.

3. a) Infinitos, infinitos.
b) Infinitas.
c) Uma.
d) Infinitos, infinitos.
e) Sim.

4. Um ou três.

5. Nenhum, um ou quatro.

6. a) Falsa.
b) Falsa.
c) Falsa.
d) Verdadeira.

7. a) *r* é paralela a *s*; *s* é perpendicular a *t*; *x* é reversa a *r*; *y* é reversa a *t*.
b) A reta *t* é paralela ao plano α e a reta *r* é secante ao plano β.

8. Respostas possíveis:
a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EI}$
b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$
c) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$
d) $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$

9. a) Perpendiculares
b) Reversas ortogonais.

10. Não.

11. Falsa.

12. a) $\overleftrightarrow{BF}$ é secante ao plano (ABC).
b) $\overleftrightarrow{CD}$ está contida no plano (ABC).
c) $\overleftrightarrow{FG}$ é paralela ao plano (ABC).
d) $\overleftrightarrow{CG}$ está contida no plano (BCF).
e) $\overleftrightarrow{AE}$ é secante ao plano (EFG).
f) $\overleftrightarrow{DH}$ é paralela ao plano (ACG).

13. a) Os planos são secantes.
b) É a reta BC.
c) Não há planos paralelos na figura.
d) São planos secantes

14. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Verdadeira.
d) Falsa.
e) Verdadeira.

15. Alternativa **c.**

16. F – F – V – F.

17. a) $\overleftrightarrow{FB}$
b) Um losango.
c) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EB}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{FC}$
d) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$
e) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FC}$

18. Alternativa **e.**

19. Alternativa **a.**

20. Alternativa **b.**

21. $\sqrt{106}$ cm

22. Alternativa **e.**

23. Alternativa **c.**

24. 02 + 08 + 16 = 26

25. Alternativa **a.**

26. Alternativa **c.**

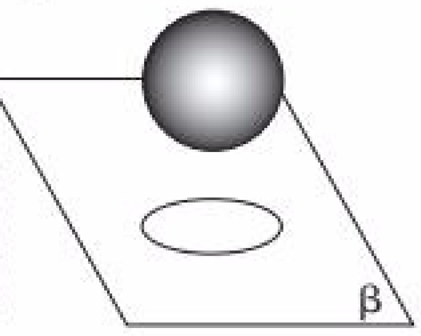
27. Alternativa **e.**

28. A afirmação III é a verdadeira.

29. a) C
b) B
c) V_2

30. a) $\overline{PQ}$
b) A distância entre *r* e α é a distância entre o ponto *A* e a sua projeção ortogonal A' em α.
c) Não.
d) A distância é igual à distância entre um ponto qualquer de *r* e o plano α que contém *s* e é paralelo a *r*.

31. a) Boicotes, doping, corrupção de agentes públicos e terrorismo.
b) Corresponde a um circulo.



Editoria de arte

c) Resposta pessoal.

32. II. Verdadeira.

33. 20 cm

34. 60°

35. São perpendiculares.

Exercícios complementares

1. Alternativa **e.**

2. Alternativa **b.**

3. Alternativa **d.**

4. Alternativa **b.**

5. $S = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

6. Alternativa **b.**

7. Alternativa **e.**

8. a) $\frac{5}{3}$ b) R$ 550,00 c) 18,18%

9. Alternativa **a.**

10. Alternativa **e.**

11. Alternativa **c.**

12. Alternativa **b.**

13. Alternativa **e.**

14. $S = 4{,}56\ \text{m}^2$

15. Alternativa **a.**

16. Alternativa **c.**

17. Alternativa **b.**

18. Alternativa **a.**

19. Alternativa **d.**

20. Alternativa **c.**

21. Alternativa **a.**

22. V – V – V – F – F

23. Resposta pessoal. 10 cm

24. Verdadeiras: 02 + 04 + 16 = 22

25. Alternativa **d.**

26. Alternativa **c.**

27. 01 + 02 + 04 + 08 = 15

28. Alternativa **e.**

29. V – V – V – F – F

30. Alternativa **b.**

31. Apenas a III.

32. Alternativa **e.**

33. Alternativa **b.**

34. Alternativa **d.**

35. Alternativa **d.**

36. a) $\overline{AM} = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm e

$\overline{MB} = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm ou

$\overline{AM} = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm e

$\overline{MB} = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm

b) $\overline{AM} = \overline{MB} = 2$ cm

37. a) 72 cm e $216\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

b) $\overline{CE} = 12\sqrt{3}$ cm e $\overline{CF} = 24$ cm

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

38. a) $2r\left(1+\sqrt{3}\right)$ b) $r^2\left(3+\sqrt{3}\right)$

39. $\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\text{cm}^2$

40. Alternativa **b.**

41. Alternativa **b.**

42. Alternativa **c.**

Unidade 4 – Análise combinatória

Capítulo 8 – Combinatória

Exercícios propostos

1. 40 pares de modelos.

2. 15

3. 16

4. 56 modos.

5. a) 6 números. b) 27 números.

6. 336 possibilidades.

7. 32 maneiras.

8. 18 possibilidades.

9. 600 modos.

10. Alternativa **c.**

11. a) $\frac{181}{30}$ b) 21

12. a) n c) –n

b) 2n + 2 d) n(n + 1)(n + 2)

13. a) S = {8} c) S = {9, 10}

b) S = {4}

14. a) S = {6} b) {1, 2}

15. Alternativa **c.**

16. 15 120 números.

17. 504 palavras.

18. 168 números.

19. a) 840 bandeiras. b) 480 bandeiras.

20. a) S = {6} c) S = {3}

b) S = {7} d) S = {4}

21. a) 2 160 números pares.

b) 2 880 números ímpares.

22. a) 600 b) 288 ímpares. c) 126

23. 36 números.

24. a) 720 anagramas.

b) 120 anagramas.

c) 360 anagramas.

d) 24 anagramas.

e) 144 anagramas.

25. Alternativa **d.**

26. −2 916

27. a) 720 números. b) 361 c) 34

28. a) 720 anagramas.

b) 120 anagramas.

29. 1 728 modos.

30. 3

31. a) 12 c) 15 120

b) 129 729 600

32. a) 60 b) 20

33. 210 maneiras.

34. 75 600

35. 840 anagramas.

36. 126 caminhos.

37. 30

38. Alternativa **e.**

39. Alternativa **c.**

40. 56

41. 120

42. 200 grupos.

43. 200 provas.

44. a) 1 b) 76

45. a) n = 3 b) n = 22

46. 21 professores.

47. 45 784 grupos.

48. Alternativa **c.**

49. a) Avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade.

b) Resposta pessoal.

c) $C_{20}^{250} + C_{15}^{180} + C_{10}^{80}$

50. a) 5 b) 190 c) 30 d) 120

51. {10}

52. a) S = {1, 2} b) S = {2, 3}

53. S = {−1, 4}

54. S = {6}

55. 7

56. Demonstração.

57. 75

58. 11

59. a) 2^{10} b) $2^{20} - 1$

60. S = {5}

61. S = {(5, 3)}

62. a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b) $k^{10} + 5k^8 + 10k^6 + 10k^4 + 5k^2 + 1$

c) $1 + 9a + \frac{135}{4}a^2 + \frac{135}{4}a^3 +$
$+ \frac{1215}{16}a^4 + \frac{729}{16}a^5 + \frac{729}{64}a^6$

d) $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

e) $a^{18} - 6a^{15}x^2y + 15a^{12}x^4y^2 - 20a^9x^6y^3 +$
$+ 15a^6x^8y^4 - 6a^3x^{10}y^5 + x^{12}y^6$

f) $\frac{1}{x^6} + 3 \cdot \frac{1}{x^3} + 3 + x^3$

63. $176 + 80\sqrt{5}$

64. a) $88 - 50\sqrt{2}$ b) $28 + 16\sqrt{3}$

65. 2^n

66. a) 16 b) 3 125 c) 256

67. $\frac{1}{64} - \frac{3}{8}x + \frac{15}{4}x^2 - 20x^3 +$
$+ 60x^4 - 96x^5 + 64x^6$

68. Alternativa **b.**

69. Alternativa **e.**

70. Alternativa **e.**

71. $30\,618a^4b^5$

72. $-1\,140x^{17}$

73. $80x^5$

74. Não. $T_3 = 40x^4$ e $T_4 = -80x$

75. 8

76. 7º termo; $\frac{28}{9}$

77. 84

78. −15 120

79. Alternativa **b.**

80. Alternativa **c.**

81. Alternativa **a.**

82. Alternativa **a.**

83. Alternativa **d.**

84. Alternativa **e.**

85. Alternativa **d.**

Capítulo 9 – Probabilidade

Exercícios propostos

1. a) U = {C, K}

b) U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c) U = {(C, C), (C, K), (K, K), (K, C)}

2. a) {U = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

b) E_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

c) E_2 = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

d) n(U) = 36, n(E_1) = 6, n(E_2) = 4

3. Exemplos de respostas:

a) Evento A: a carta é de copas e de espadas.

Evento B: a carta é representada por um número maior que 10.

b) Evento C: a carta é vermelha.

Evento D: a carta é preta.

Evento E: a carta é uma figura ou um ás.

Evento F: a carta é representada por um número de 2 a 10.

4. a) E = {(1, 5), (2, 4)}

b) E = {(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (1, 5), (2, 4), (4, 5)}

c) E = {(2, 5), (3, 4)}

5. a) U = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)}

b) E = {(C, 1), (C, 3), (C, 5)}

c) E = {(K, 2), (K, 4), (K, 6)}

6. a) 1 possibilidade

b) 27 possibilidades

7. P(azul) = $\frac{3}{5}$ e P(amarela) = $\frac{2}{5}$

8. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 0

9. a) 1 ou 100% b) 0

10. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{18}$

11. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{13}{20}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{10}$

12. a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{52}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{13}$

13. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$

14. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$

15. 24,4%

16. Alternativa **e**. **17.** Alternativa **d**.

18. Alternativa **c**. **19.** Alternativa **e**.

20. Alternativa **c**. **21.** Alternativa **c**.

22. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{1}{8}$

23. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$

24. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{10}$

25. a) 37% b) 29%

26. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{2}{5}$

27. $\frac{31}{40}$ **28.** $\frac{5}{12}$

29. $\frac{16\pi + 24\sqrt{3}}{3000}$ **30.** $\frac{4}{13}$

31. a) 20 e 150 b) 400 e $\frac{1}{10}$

32. Alternativa **c**. **33.** Alternativa **d**.

34. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$

35. Alternativa **d**.

36. a) A condição de desocupado ou desempregado desestrutura a vida das pessoas, das famílias; fragiliza ou rompe relações sociais; reduz o nível de atividade econômica, o consumo etc.

b) 32,9%

c) Resposta pessoal.

37. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$

38. a) P(A) = $\frac{1}{13}$ e P(B) = $\frac{1}{4}$

b) P(A/B) = $\frac{1}{13}$ e P(B/A) = $\frac{1}{4}$

39. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

c) $\frac{7}{11}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{6}{10}$

40. a) 0% b) $\frac{1}{9}$

41. $\frac{35}{72}$ **42.** $\frac{2}{13}$

43. a) 105 maneiras diferentes.

b) $\frac{8}{35}$ c) $\frac{5}{27}$

44. a) P(B) = $\frac{3}{66}$

b) P(A ou B ou C) = $\frac{19}{66}$

c) P(segundo aluno de A) = $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$

45. $\frac{1}{2}$ ou 50% **46.** $\frac{1}{9}$

47. $\frac{1}{216}$ **48.** ≃44,12%

49. $\frac{1}{4}$ **50.** $\frac{1}{16}$ **51.** $\frac{1}{16}$ **52.** $\frac{1}{36}$

53. a) $\frac{1}{1594323}$ c) $\frac{53248}{1594323}$

b) $\frac{26}{1594323}$ d) $\frac{8192}{1594323}$

54. Alternativa **c**.

55. a) $\frac{1}{5525}$ b) $\frac{8}{16575}$ c) $\frac{13}{102}$

56. $\frac{64}{343}$ **57.** Alternativa **b**.

58. Alternativa **e**. **59.** Alternativa **e**.

60. a) Não equiprovável. c) Equiprovável.

b) Não equiprovável.

61. a) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{8}$

62. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

63. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{64}$

64. a) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{6}$

65. Alternativa **d**. **66.** Alternativa **b**.

Exercícios complementares

1. 24 números.

2. 24 anagramas. **3.** 18º lugar.

4. a) S = {6} b) S = {2}

5. S = {0, 3} **6.** Alternativa **d**.

7. S = {2} **8.** 600 maneiras

9. 360 maneiras **10.** 210 tipos

11. 3 003 cartelas **12.** Alternativa **d**.

13. Alternativa **e**. **14.** Alternativa **e**.

15. Alternativa **b**. **16.** Alternativa **c**.

17. 17 equipes participantes

18. Alternativa **b**.

19. S = {14} **20.** 56 **21.** x = 8

22. Alternativa **a**. **23.** Alternativa **d**.

24. 10 **25.** Alternativa **d**.

26. Alternativa **e**. **27.** Alternativa **d**.

28. Alternativa **b**. **29.** Alternativa **c**.

30. a) A∪B = {(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)}

b) A ∩ B = {5, 5}

31. a) U = {(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K) (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)}

b) U = {(F, F, F, F), (F, F, F, M), (F, F, M, F), (F, F, M, M) (F, M, F, F), (F, M, F, M), (F, M, M, F), (F, M, M, M), (M, F, F, F), (M, F, F, M), (M, F, M, F), (M, F, M, M), (M, M, F, F), (M, M, F, M), (M, M, M, F), (M, M, M, M)}

32. Alternativa **c**. **33.** $\frac{5}{36}$

34. a) $\frac{5}{37}$ b) $\frac{6}{37}$

35. $\frac{1}{5}$ ou 20%

36. $\frac{73}{100}$ ou 73% **37.** Alternativa **a**.

38. a) $\frac{2}{13}$ b) $\frac{4}{13}$

39. Alternativa **a**.

40. a) 56 b) $\frac{3}{8}$

41. Alternativa **b**. **42.** 67

43. $\frac{7}{36}$ **44.** Alternativa **d**.

45. a) $\frac{1}{11}$ b) $\frac{5}{22}$

46. $\frac{2}{5}$ **47.** Alternativa **e**.

48. a) 0,020 ou 2% b) 0,526 ou 52,6%

49. $\frac{1}{10}$ **50.** $\frac{1}{2}$ ou 50%

51. Alternativa **c**.

52. a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{7}$

53. Alternativa **c**. **54.** Alternativa **c**.

55. Alternativa **b**.

56. 1 + 4 + 8 = 13

57. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{6}{51}$ c) $\frac{39}{102}$

58. Alternativa **a**. **59.** Alternativa **e**.

Sugestões para pesquisa e leitura

Sites

Nos *sites* indicados a seguir você encontra leituras e aplicativos para aprofundar seus estudos.

http://tub.im/qceb3p

Publicação do Instituto Ciência Hoje (CH), organização social vinculada à Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC). Traz notícias científicas sobre diversos assuntos. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/twgjmm

Apresenta uma visão panorâmica sobre vários tópicos de Matemática, como Geometria Analítica, Trigonometria etc. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/wnii3r

Informações sobre o Cabri-Géomètre, *software* de geometria dinâmica. Acesso em: 16 abr. 2016

http://tub.im/9cqokk

Conteúdo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para pesquisa de dados estatísticos regionais e nacionais do Brasil. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/topzkx

Laboratório de Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/hw2rnc

Site do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), que traz a história da Matemática, problemas, entre outros. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/dyg67g

Página desenvolvida por professores e alunos do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Entre outros itens, este *site* apresenta vários textos sobre história da Matemática, alguns aplicativos que podem ser usados para estudar a disciplina, além de problemas e desafios. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/99tt4j

Informações sobre o GeoGebra, *software* de geometria dinâmica. No *site*, é possível baixar o programa para diversas plataformas, além de apresentar materiais para estudo em diversas áreas da Matemática usando o GeoGebra. Acesso em: 19 abr. 2016.

http://tub.im/e7pvo5

Revista **Números Lógicos**; traz jogos *on-line* e outros passatempos. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/uzhuk9

Olimpíada Brasileira de Matemática. Traz as questões das provas, *links*, bibliografias, entre outros. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/roe3dx

Informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como informações sobre inscrições, datas das provas, provas anteriores, banco de questões etc. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/tu3tdg

Questões da Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/8i5htr

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), com dissertações, teses, jornais, boletins, concursos etc. Acesso em: 16 abr. 2016

http://tub.im/c23hyf

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com publicações, notícias sobre eventos e olimpíadas da disciplina, por exemplo. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/coje77

Apresenta biografias, provas *on-line*, grande acervo de *softwares* matemáticos, artigos, jogos, curiosidades, histórias e muito mais. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/wkrj88

Página da Universidade Federal Fluminense, que disponibiliza vários aplicativos voltados para o estudo de conteúdos matemáticos. Os aplicativos podem ser baixados (*download*) ou acessados pelo *link* indicado na página. Acesso em: 16 abr. 2016.

Livros e revistas

A Geometria na Antiguidade Clássica, de Francisco C. P. Milies e José Hugo de Oliveira Bussad. São Paulo: FTD, 1999.

A janela de Euclides, de Leonard Mlodinow. Trad. Enézio E. Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2008.

Aplicações da Matemática escolar, de Donald Burshaw e outros. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Aprenda álgebra brincando, de J. Perelmann. Trad. Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 2001.

A vida secreta dos números, 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos, de George G. Szpiro. Trad. J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.

Coleção Contando a história da Matemática, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática.
Volume: Equação: o idioma da álgebra, 1999.

Coleção Fundamentos da Matemática elementar, de Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce (Coords.). São Paulo: Atual.
Volumes: Geometria plana, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu (8. ed., 2005).
Conjuntos, funções, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami (8. ed., 2004).

Coleção Imortais da Ciência, de Marcelo Gleiser (Coord.). São Paulo: Odysseus.
Volume: Euclides: a conquista do espaço, de Carlos Tomei, 2003.

Coleção Investigação matemática, São Paulo: Scipione.
Volumes: Atividades e jogos com estimativas, de Smoothey Marion, 1998. Trad. Sérgio Quadros.
Atividades e jogos com círculos, de Smoothey Marion, 1999. Trad. Antônio Carlos Brolezzi.

Coleção Noções de Matemática, de Aref Antar Neto e outros. Fortaleza: VestSeller, 2009.

Coleção Pra que serve a Matemática, de Luiz M. Imenes, José Jakubovic e Marcelo Lellis. São Paulo: Atual, 2009.

Coleção Primeiros passos, São Paulo: Brasiliense (vários anos).
Volume: O que é estatística, de Sônia Vieira e Ronaldo Wada (2. ed., 2010).

Coleção Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula, São Paulo: Atual.
Volumes: Álgebra, de John K. Baumgart, 1992.

Coleção Vivendo a Matemática, de Nilson José Machado (Coord.). São Paulo: Scipione, 2006.

Computação, de Harold T. Davis, 1994.

Descobrindo padrões pitagóricos, de Ruy Madsen Barbosa. São Paulo: Atual, 1993.

Geometria, de Howard Eves, 2005.

Introdução à história da Matemática, de Howard Eves. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Logaritmos, de Elon Lages Lima. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

Matemática e língua materna, de Nilson José Machado. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

O homem que calculava, de Malba Tahan. 79. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

Os números da natureza: a realidade irreal da imaginação matemática, de Ian Stewart. Trad. Alexandre Tort. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos, de Richard Courant e Herbert Robbins. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

O teorema do papagaio, de Denis Guedj. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

Padrões numéricos e sequências, de Maria Cecília Costa e Silva Carvalho. São Paulo: Moderna, 1998.

Lista de siglas

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais

Cefet-PE: Centro Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco

Cefet-PR: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná

Cesgranrio-RJ: Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio

Cesupa-PA: Centro Universitário do Pará

EEM-SP: Escola de Engenharia Mauá

Efoa-MG: Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas

Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio

Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar

EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército

Faap-SP: Fundação Armando Álvares Penteado

Facimpa-MG: Faculdade de Ciências Médicas Dr. José Antonio Garcia Coutinho

Fasp-SP: Faculdades Associadas de São Paulo

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia de São Paulo

FCMSC-SP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial

FGV-RJ: Fundação Getúlio Vargas (RJ)

FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (SP)

FMABC-SP: Faculdade de Medicina do ABC

FUR-RN: Fundação Universidade Regional do Rio Grande do Norte

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

IFRS: Instituto Federal do Rio Grande do Sul

IFSP: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

IFSul-RS: Instituto Federal Sul-rio-grandense

IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia do Rio de Janeiro

Insper-SP: Ensino Superior em Negócios, Direito e Engenharia

ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie

OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PUCCamp-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas

PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

UCB-DF: Universidade Católica de Brasília

UCSal-BA: Universidade Católica de Salvador

Udesc-SC: Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

UECE-CE: Universidade Estadual do Ceará

UEMG: Universidade do Estado de Minas Gerais

UEPA: Universidade do Estado do Pará

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

UEPG-PR: Universidade Estadual de Ponta Grossa

UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UERN: Universidade Estadual do Rio Grande do Norte

Uespi-PI: Universidade Estadual do Piauí

UFABC-SP: Universidade Federal do ABC

UFAL: Universidade Federal de Alagoas

UFBA: Universidade Federal da Bahia

UFC-CE: Universidade Federal do Ceará

UFCG-PB: Universidade Federal de Campina Grande

UFES: Universidade Federal do Espírito Santo

UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense

UFG-GO: Universidade Federal de Goiás

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

Ufla-MG: Universidade Federal de Lavras

UFMA: Universidade Federal do Maranhão

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

UFMS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPB: Universidade Federal da Paraíba

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina

UFSCar-SP: Universidade Federal de São Carlos

UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria

UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia

UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa

UMC-SP: Universidade de Mogi das Cruzes

Unama-PA: Universidade da Amazônia

UnB-DF: Universidade de Brasília

Uncisal-AL: Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas

Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

Unimep-SP: Universidade Metodista de Piracicaba

Unimontes-MG: Universidade Estadual de Montes Claros

Unioeste-PR: Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Unit-SE: Universidade Tiradentes

UPE-PE: Universidade de Pernambuco

Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Referências bibliográficas

AGUIAR, Alberto Flávio Alves; XAVIER, Airton; RODRIGUES, José Euny. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Harbra, 2009.

AMOROSO COSTA, M. **As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. São Paulo: Edusp, 1971.

ARTIGUES, Christian et al. **Géométrie**. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Math**: Analyse et probabilités: **Math**. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Math**: term C et E. Algèbre & Géométrie. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Mathématiques. 1res S et E**. 2. ed. Paris: Hachette Lycées, 1990.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais de Matemática. In: **A educação**. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

DINIZ, Maria Ignez de S. V.; SMOLE, Kátia Cristina S. **MC512: discussão sobre a área de Matemática a partir do documento de Ciência e Tecnologia para o Ensino Médio elaborado pelo SEMTC/MEC**. VI Enem, jul. 1998.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

GUZMÁN, Miguel de; COLERA, José. **Matemáticas I e II**. Barcelona: Anaya, 1989.

HERRERO, Fernando A.; GARCÍA, Carmen; VILA, Antonio. **Matemáticas – Factor 3**. Barcelona: Editorial Vicens-vives, 1987.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática elementar**. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 8.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do professor de Matemática, v. 1, 2 e 3).

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999. v. 1.

LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSER, Lílian (Coords.). **Geometria**: na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983 a 2013.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Matemática**: História, aplicações e jogos matemáticos. 2. ed. Campinas/São Paulo: Papirus, 2005.

SANTOS, Vânia Maria P. dos; REZENDE, Jovana Ferreira de. **Números**: linguagem universal. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1996.

SÃO PAULO (Estado). **Prática pedagógica**: Matemática 2º grau: Geometria I. São Paulo, 1994. v. 2.

SÃO PAULO (Estado). **Prática pedagógica**: Matemática 2º grau. São Paulo, 1992. v. 1.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**: 2º grau. 3. ed. São Paulo, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação/Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**: 2º grau. 3. ed. São Paulo, 1992.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. **Matemática**: curso colegial. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1965. v.1.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com estimativas**. São Paulo: Scipione, 1998.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com círculos**. São Paulo: Scipione, 1998.

ZWIRNER, G. **Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica**. Pádua: Cedam, 1991.